

具有软、硬输出约束的不确定非线性系统漏斗控制： 一种直接修正方法

左 凰^{1, 2, 3, 4} 陶 杰^{1, 2, 3, 4} 林 明^{1, 2, 3, 4} 刘勇华^{1, 2, 3, 4} 苏春翌^{1, 2, 3, 4}

摘 要 本文研究一类同时存在软、硬输出约束的不确定非线性系统跟踪控制问题。其中，安全相关的输出约束被建模为不可违背的硬约束，而期望的跟踪性能则通过可调节的软约束加以刻画。针对软、硬约束可能发生冲突的情形，引入一种光滑过渡函数，并基于此构造凸组合算子对软约束边界进行直接修正，从而保证其与硬约束的兼容性。在此基础上，将硬约束与修正后的软约束进行统一整合，构造具有光滑边界的约束结构。基于该约束结构并结合漏斗控制技术，提出一种低复杂度鲁棒控制算法，确保系统同时满足硬约束与修正后的软约束。与现有基于辅助动态系统的软约束间接调整方法不同，所提策略无需引入额外动态系统，即可得到结构简洁、易于实现的静态控制器。此外，在软、硬约束冲突发生时，该方法能够将软约束违背量严格限制在满足硬约束所需的最小违背量与预设容差之和以内，且在有限时间内实现约束解耦，优先确保硬约束的严格满足。仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词 非线性系统；不确定系统；硬约束；软约束；漏斗控制

引用格式 左凰, 陶杰, 林明, 刘勇华, 苏春翌. 具有软、硬输出约束的不确定非线性系统漏斗控制：一种直接修正方法. 自动化学报, 2026, 52(9): 2057–2067

DOI 10.16383/j.aas.c260016 **CSTR** 32138.14.j.aas.c260016

Funnel Control for Uncertain Nonlinear Systems Under Soft and Hard Output Constraints: A Direct Modification Approach

ZUO Huang^{1, 2, 3, 4} TAO Jie^{1, 2, 3, 4} LIN Ming^{1, 2, 3, 4} LIU Yong-Hua^{1, 2, 3, 4} SU Chun-Yi^{1, 2, 3, 4}

Abstract This paper investigates the tracking control problem for a class of uncertain nonlinear systems subject to simultaneous soft and hard output constraints. The safety-related output constraints are modeled as inviolable hard constraints, while the desired tracking performance is characterized by adjustable soft constraints. To address potential conflicts between soft and hard constraints, a smooth transition function is introduced, based on which convex combination operators are constructed to directly modify the soft constraint boundaries, thereby ensuring their compatibility with the hard constraints. On this basis, the hard constraints and the modified soft constraints are consolidated to construct a constraint structure with smooth boundaries. Based on this consolidated constraint structure and combined with funnel control techniques, a low-complexity robust control algorithm is proposed to ensure the simultaneous satisfaction of the hard constraints and the modified soft constraints. Unlike existing methods that rely on auxiliary dynamic systems to indirectly adjust soft constraints, the proposed strategy eliminates the need for extra dynamic systems, resulting in a structurally simple and easy-to-implement static controller. Furthermore, when conflicts between soft and hard constraints occur, the proposed method ensures that the soft-constraint violation remains within a prescribed tolerance above the minimum violation necessary to satisfy the hard constraints, and achieves constraint decoupling within a finite time, thereby prioritizing the strict satisfaction of hard constraints. Simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords nonlinear systems; uncertain systems; hard constraints; soft constraints; funnel control

Citation Zuo Huang, Tao Jie, Lin Ming, Liu Yong-Hua, Su Chun-Yi. Funnel control for uncertain nonlinear systems under soft and hard output constraints: A direct modification approach. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(9): 2057–2067

收稿日期 2026-01-07 录用日期 2026-04-01

Manuscript received January 7, 2026; accepted April 1, 2026
国家自然科学基金 (62173097, U2013601), 广东省基础与应用基础研究基金面上项目 (2022A1515011239), 广东省特支计划本土创新创业项目 (2019BT02X353) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62173097, U2013601), the General Program of Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2022A1515011239), and the Local Innovative and Research Team Project of Guangdong Special Support Program (2019BT02X353)

本文责任编辑 王卓

Recommended by Associate Editor WANG Zhuo

1. 低空感知探测技术与智能物联教育部工程研究中心 广州 510006 2. 智能决策与协同控制粤港澳联合实验室 广州 510006 3. 广东省智能决策与协同控制重点实验室 广州 510006 4. 广东工业大学自动化学院 广州 510006

1. Engineering Research Center of Low-altitude Perception and Detection Technology & Intelligent IoT, Ministry of Education, Guangzhou 510006 2. Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory for Intelligent Decision and Cooperative Control, Guangzhou 510006 3. Guangdong Provincial Key Laboratory of Intelligent Decision and Cooperative Control, Guangzhou 510006 4. School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006

近年来,无人自主系统领域取得显著进展,尤其在四旋翼飞行器^[1-3]、双足机器人^[4-6]和自动驾驶汽车^[7-9]等前沿应用中发展迅速.这些系统在实际运行过程中通常面临双重需求:一方面,与系统安全直接相关的约束(如避障边界、稳定裕度等)必须严格满足,因此被视为硬约束;另一方面,为提升系统性能,诸如轨迹跟踪精度、响应速度或能量效率等指标需根据任务需求与环境变化进行调节,通常以软约束形式加以刻画.这种双重需求在动态复杂环境下不可避免地引入一个核心挑战:当软约束与硬约束发生冲突时,如何在确保硬约束满足的前提下,尽可能兼顾软约束的性能要求.

针对非线性系统的约束控制问题,现有研究提出多种解决方案,包括漏斗控制(funnel control, FC)^[10-15]、预设性能控制(prescribed performance control, PPC)^[16-20]以及控制障碍函数(control barrier function, CBF)^[21-25]等.其中,漏斗控制通过构造时变漏斗边界,将系统输出跟踪误差限制在预先设计的性能包络内,为不确定非线性系统提供一种低复杂度、不依赖精确模型的鲁棒约束控制方案.近年来,漏斗控制方法已成功应用于线性系统^[26-27]、高阶非线性系统^[28]以及无限维系统^[29-31],并在与事件触发机制^[32]和输入约束处理^[33]等控制策略的结合中展现出良好的可扩展性.需要指出的是,漏斗控制的核心是利用依赖系统状态的时变非线性增益,实现对输出误差的自适应高增益调节,从而避免传统固定增益设计引起的保守性问题.

PPC方法则从期望性能指标出发,通过设计性能变换函数,将跟踪误差的瞬态与稳态性能要求转化为等价约束问题,并据此构造控制律以保证变换后信号的有界性.该方法最初为解决具有任意相对阶的非线性系统鲁棒自适应控制问题而提出^[16, 34].随后,通过引入无逼近设计技术,控制器结构得到显著简化^[17, 35].近年来,PPC方法进一步拓展至输入受限、初始条件依赖、有限时间收敛以及复杂约束情形等更一般的控制场景^[36-42].

相比之下,CBF方法通过在优化框架中将安全约束显式建模为硬约束,同时将性能指标视为可放宽的软约束.现有CBF方法主要针对常值约束,近期研究通过引入时变CBF框架^[43-45],将其推广至具有时变硬输出约束的情形.然而,该类方法通常依赖精确的系统模型信息,且计算复杂度较高.

尽管FC和PPC在处理不确定条件下的约束控制方面取得丰富成果,但现有研究大多聚焦单一类型约束.面对需同时兼顾硬约束(如避障边界)与软约束(如跟踪精度)的复杂场景,系统性解决方案

仍相对有限.为应对这一问题,文献[46]提出一种面向时变软、硬输出约束的漏斗控制方法,其核心思想是通过在线漏斗重构,在严格满足硬约束的同时尽可能满足软约束.但该方法仍存在两个显著局限:其一,所采用的近似机制(包括LSE(Log-SumExp)与基于 $\tanh(\cdot)$ 的符号函数逼近)不可避免地引入逼近误差;其二,由于依赖辅助动态系统对软约束进行修正,难以在冲突区间内对软约束违背量进行精确调控.此外,针对具有多个时变输出约束的不确定高阶多输入多输出非线性系统,文献[47]提出一种将多约束合并为单一约束的设计方法,但该方法难以有效处理具有不同优先级的软约束与硬约束问题.

基于上述分析,本文针对一类不确定非线性系统的软、硬输出约束控制问题,提出一种基于光滑过渡函数与凸组合算子的漏斗控制框架.为应对软、硬约束可能发生的冲突,本文引入光滑过渡函数和凸组合算子对软约束边界进行直接修正,在保证其与硬约束兼容的同时,将软约束违背量严格限制在满足硬约束所需的最小违背量与预设容差之和以内.在此基础上,对硬约束与修正后的软约束进行整合,并结合漏斗控制方法,设计一种低复杂度鲁棒控制算法,确保系统能够同时满足硬约束与修正后的软约束.与现有方法相比,所提方法结构简洁、易于实现,且在约束冲突发生时能够在有限时间内实现约束解耦,从而优先保障硬约束的严格满足.仿真结果验证了所提方法的有效性.

本文采用如下符号: $\mathbf{N}$ 表示自然数集合; $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_{\geq 0}$, $\mathbf{R}_{>0}$ 分别表示实数、非负实数和正实数集合;对 $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^k$ 表示 k 维欧几里得空间; $C^k(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$ 表示从 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ 到 $\mathbf{R}$ 的 k 次连续可微函数集合; $BC^k(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$ 表示其直至 k 阶导数均有界的子集;对集合 $A, B \subset \mathbf{R}^m$,定义两集合之间的距离为 $\text{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$;对点 $x \in \mathbf{R}^m$ 与集合 $S \subset \mathbf{R}^m$,定义点到集合的距离为 $\text{dist}(x, S) := \inf_{s \in S} \|x - s\|$; $\exp(\cdot)$ 表示指数函数.

1 问题描述与预备知识

1.1 问题描述

考虑如下—类不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbf{R}^i$, $i = 1, \dots, n$; $\bar{x}_n \in$

$\mathbf{R}^n$ 为系统状态向量, 初始条件为 $\bar{x}_n(0) = [x_1(0), \dots, x_n(0)]^T$; $u \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别表示控制输入和系统输出; $f_i, g_i: \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}$ 为满足局部 Lipschitz 连续的未知函数, $i = 1, \dots, n$.

假设 1. 函数 $g_i(\bar{x}_i)$ 符号已知, 且存在未知常数 $g_i^0 > 0$ 使得 $|g_i(\bar{x}_i)| \geq g_i^0$, $i = 1, \dots, n$. 不失一般性, 假设 $g_i(\bar{x}_i) > 0$.

假设 2. 期望轨迹 $y_d(t) \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$.

给定满足假设 2 的期望轨迹 $y_d(t)$, 系统输出 $y(t)$ 受到如下两类时变约束.

• **硬 (安全) 约束:**

$$\underline{h}(t) < y(t) < \bar{h}(t), \forall t \geq 0 \quad (2)$$

其中 $\bar{h}, \underline{h} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$ 分别表示硬约束的上界和下界.

• **软 (性能) 约束:**

$$\hat{s}(t) < y(t) - y_d(t) < \bar{s}(t), \forall t \geq 0 \quad (3)$$

其中 $\hat{s}, \bar{s} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$. 令 $\bar{s}(t) := \hat{s}(t) + y_d(t)$ 和 $\underline{s}(t) := \hat{s}(t) - y_d(t)$, 则软约束可改写为 $\underline{s}(t) < y(t) < \bar{s}(t)$, 其中 $\bar{s}, \underline{s} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$ 分别表示软约束的上界和下界.

假设 3. 存在常数 $\sigma_h, \sigma_s > 0$, 使得 $\bar{h}(t) - \underline{h}(t) \geq \sigma_h$ 且 $\bar{s}(t) - \underline{s}(t) \geq \sigma_s$.

假设 4. 在 $t = 0$ 时刻, 硬约束 (2) 和软约束 (3) 兼容, 且系统输出 $y(t)$ 同时满足 (2) 和 (3), 即 $y(0) \in (\underline{s}(0), \bar{s}(0)) \cap (\underline{h}(0), \bar{h}(0)) \neq \emptyset$. 记 $x_1^0 := x_1(0) = y(0)$.

为刻画系统输出的可行域, 引入如下时变集合:

$$R_h(t) := \{x_1 \in \mathbf{R} \mid \underline{h}(t) < x_1 < \bar{h}(t)\}, t \geq 0 \quad (4a)$$

$$R_s(t) := \{x_1 \in \mathbf{R} \mid \underline{s}(t) < x_1 < \bar{s}(t)\}, t \geq 0 \quad (4b)$$

为准确描述软、硬约束之间的兼容关系, 定义兼容时间集合 I_c 为

$$I_c := \{t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \mid R_h(t) \cap R_s(t) \neq \emptyset\} \quad (5)$$

补集 $\mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$ 表示软、硬约束发生冲突的时间集合. 进一步, 在冲突时间区间上, 定义最小软约束违背量函数 $d_{\min}(t)$ 为

$$d_{\min}(t) := \text{dist}(R_h(t), R_s(t)), t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c \quad (6)$$

该函数刻画了在严格满足硬约束时, 软约束的最小违背量.

控制目标. 设计一个鲁棒、低复杂度的状态反馈控制器 $u(t, \bar{x}_n)$, 使得下列目标同时成立:

1) 系统输出严格满足硬约束, 即 $y(t) \in R_h(t)$, $\forall t \geq 0$;

2) 在兼容时间集合 I_c 上, 系统输出尽可能满足软约束;

3) 在冲突时间集合 $\mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$ 上, 对于给定的容差 $\delta > 0$, 将软约束违背量严格限制在满足硬约束所需的最小违背量与 δ 之和以内, 即确保 $\text{dist}(y(t), R_s(t)) < d_{\min}(t) + \delta$.

1.2 相关定义和引理

定义 1^[48]. 光滑过渡函数 $\theta_\tau \in BC^\infty(\mathbf{R}; [0, 1])$ 定义为

$$\theta_\tau(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \tau \\ 0, & x \leq 0 \\ \nu(x), & 0 < x < \tau \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\tau > 0$ 为过渡延迟参数; 函数 $\nu(x)$ 为定义在时间区间 $(0, \tau)$ 上的光滑严格单调递增函数, 确保函数 $\theta_\tau(x)$ 从 0 到 1 的光滑过渡.

注 1. 本文中函数 $\nu(x)$ 选取为^[49]

$$\nu(x) = \frac{1}{1 + \exp\left[\tau\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tau - x}\right)\right]}, x \in (0, \tau) \quad (8)$$

定义 2. 设函数 $\mu \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; [0, 1])$ 且 $a, b \in C(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$, 称 $\mu(\cdot)$ 为凸组合权函数. 相应地, 凸组合算子 $P_\mu: C(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R}) \times C(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$ 定义如下:

$$[P_\mu(a, b)](t) := \mu(t)a(t) + (1 - \mu(t))b(t) \quad (9)$$

其中 $t \geq 0$.

考虑如下初值问题:

$$\dot{\xi} = \Phi(t, \xi), \xi(0) = \eta \in G \quad (10)$$

其中, η 为初值; $G \subset \mathbf{R}^n$ 为非空开集; 函数 $\Phi: \mathbf{R}_{\geq 0} \times G \rightarrow \mathbf{R}^n$ 关于 t 分段连续, 且关于 ξ 局部 Lipschitz 连续.

定义 3^[50]. 若初值问题 (10) 的解不存在合适的右延拓, 则称该解为最大解.

引理 1^[50]. 对任意初值 $\xi(0) = \eta \in G$, 初值问题 (10) 存在唯一最大解 $\xi: [0, t_f) \rightarrow G$, 其中 $t_f > 0$.

引理 2^[51]. 若 $\xi: [0, t_f) \rightarrow G$ 为 (10) 的最大解且满足 $t_f < \infty$, 则对任意紧子集 $G' \subset G$, 存在 $t_s \in [0, t_f)$ 使得 $\xi(t_s) \notin G'$.

2 输出可行域在线修正

系统输出 y 同时受到硬约束 (2) 和软约束 (3) 的限制. 相应地, 定义输出可行域 $\mathcal{O}$ 为

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \quad (11)$$

其中 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 定义为

$$\begin{cases} \mathcal{O}_1 := \{(t, x_1) \mid t \in I_c, x_1 \in R_h(t) \cap R_s(t)\} \\ \mathcal{O}_2 := \{(t, x_1) \mid t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c, x_1 \in R_h(t)\} \end{cases}$$

输出可行域 $\mathcal{O}$ 的连通性对于连续反馈控制设计至关重要. 然而, 当软、硬约束发生冲突, 即 $R_h(t) \cap R_s(t) = \emptyset$ 时, 有 $I_c \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ 且 $\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$, 从而 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, 故 $\mathcal{O}$ 不连通.

为了恢复输出可行域的连通性, 本文在严格满足硬约束的前提下对软约束边界进行在线实时修正, 从而构造了修正后的输出可行域 $\mathcal{O}'$. 需要指出的是, 尽管 $\mathcal{O}'$ 为连通集, 但其边界一般为非光滑函数. 为便于后续漏斗控制器设计与稳定性分析, 本文进一步将原始硬约束与修正后的软约束整合为一组光滑约束边界, 由此得到一个边界光滑且包含于 $\mathcal{O}'$ 的输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$.

2.1 软约束在线修正

针对软、硬输出约束冲突引起的可行域不连通问题, 首先利用定义 1 中的光滑过渡函数 $\theta_{\kappa-\delta}(\cdot)$ 来表征软、硬约束的兼容与冲突状态, 具体如下:

$$\mu_1(t) := \theta_{\kappa-\delta}(\bar{h}(t) - \underline{s}(t) - \delta) \quad (12a)$$

$$\mu_2(t) := \theta_{\kappa-\delta}(\bar{s}(t) - \underline{h}(t) - \delta) \quad (12b)$$

其中 $\delta \in (0, \sigma_h/2)$ 为给定的容差参数, $\kappa \in (\delta, \sigma_h/2)$ 为待设计的过渡参数.

定理 1. 函数 $\mu_1, \mu_2 \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; [0, 1])$, 且满足如下性质:

- 1) 若 $\mu_1(t)\mu_2(t) = 1$, 则 $R_h(t) \cap R_s(t) \neq \emptyset$;
- 2) 若 $R_h(t) \cap R_s(t) = \emptyset$, 则 $\mu_1(t)\mu_2(t) = 0$.

证明. 由于 $\bar{h}, \underline{h}, \bar{s}, \underline{s} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$, 结合式 (12) 和定义 1 可知, $\mu_1, \mu_2 \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; [0, 1])$.

令 $\bar{\varphi}(t) := \bar{h}(t) - \underline{s}(t)$ 和 $\underline{\varphi}(t) := \bar{s}(t) - \underline{h}(t)$, 由式 (12) 可得

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 1, & \bar{\varphi}(t) > \kappa \\ \nu(\bar{\varphi}(t) - \delta), & \delta \leq \bar{\varphi}(t) \leq \kappa \\ 0, & \bar{\varphi}(t) < \delta \end{cases} \quad (13a)$$

$$\mu_2(t) = \begin{cases} 1, & \underline{\varphi}(t) > \kappa \\ \nu(\underline{\varphi}(t) - \delta), & \delta \leq \underline{\varphi}(t) \leq \kappa \\ 0, & \underline{\varphi}(t) < \delta \end{cases} \quad (13b)$$

注意到, 对任意 $t \geq 0$, $R_h(t) \cap R_s(t) \neq \emptyset$ 当且仅当 $\bar{h}(t) > \underline{s}(t)$ 且 $\bar{s}(t) > \underline{h}(t)$, 即 $\bar{\varphi}(t) > 0$ 且 $\underline{\varphi}(t) > 0$.

当 $\mu_1(t)\mu_2(t) = 1$ 时, 由式 (13) 可知 $\bar{\varphi}(t) > \kappa > 0$ 且 $\underline{\varphi}(t) > \kappa > 0$, 从而 $R_h(t) \cap R_s(t) \neq \emptyset$.

同理, 对任意 $t \geq 0$, 当 $R_h(t) \cap R_s(t) = \emptyset$ 时, 必

有 $\bar{\varphi}(t) \leq 0$ 或 $\underline{\varphi}(t) \leq 0$. 又由于 $\delta > 0$, 可推得 $\mu_1(t) = 0$ 或 $\mu_2(t) = 0$. 因此, $\mu_1(t)\mu_2(t) = 0$. $\square$

注 2. 由定理 1 可知, 函数 $\mu_1(t)\mu_2(t)$ 可被视为软、硬约束兼容与冲突状态之间的光滑切换信号. 具体而言, $\mu_1(t)\mu_2(t) = 1$ 表示该时刻约束完全兼容; $\mu_1(t)\mu_2(t) = 0$ 表示该时刻约束冲突; 而 $0 < \mu_1(t)\mu_2(t) < 1$, 即 $\bar{h}(t) - \kappa < \underline{s}(t) < \bar{h}(t) - \delta$ 或 $\underline{h}(t) + \delta < \bar{s}(t) < \underline{h}(t) + \kappa$, 对应于软约束即将违背硬约束或当由冲突恢复至兼容状态时的过渡区间.

结合式 (12) 定义的函数 $\mu_1(t), \mu_2(t)$ 和凸组合算子 (9), 修正后的软约束边界设计为

$$\bar{p}(t) = [P_{\mu_2}(P_{\mu_1}(\bar{s}, \bar{h} + c), \underline{h} + \delta)](t) \quad (14a)$$

$$\underline{p}(t) = [P_{\mu_1}(P_{\mu_2}(\underline{s}, \underline{h} - c), \bar{h} - \delta)](t) \quad (14b)$$

其中 $c \in \mathbf{R}_{>0}$ 为设计参数. 相应地, 修正后的软约束集合定义为 $R_p(t) := \{x_1 \in \mathbf{R} \mid \underline{p}(t) < x_1 < \bar{p}(t)\}$, $t \geq 0$. 同时, 引入修正后的兼容时间集合 $I'_c := \{t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \mid R_h(t) \cap R_p(t) \neq \emptyset\}$. 由此, 修正后的输出可行域定义为 $\mathcal{O}' = \mathcal{O}'_1 \cup \mathcal{O}'_2$, 其中 $\mathcal{O}'_1 := \{(t, x_1) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R} \mid t \in I'_c, x_1 \in R_h(t) \cap R_p(t)\}$, $\mathcal{O}'_2 := \{(t, x_1) \in \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R} \mid t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I'_c, x_1 \in R_h(t)\}$.

定理 2. 若软、硬约束满足假设 3, 则修正后的软约束边界 (14) 满足如下性质:

- 1) $\bar{p}, \underline{p} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$, 且对于任意 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$, 有

$$\bar{h}(t) - \underline{p}(t) = \delta, \underline{s}(t) \geq \bar{h}(t) \quad (15a)$$

$$\bar{p}(t) - \underline{h}(t) = \delta, \bar{s}(t) \leq \underline{h}(t) \quad (15b)$$

- 2) 对所有 $t \geq 0$, $\bar{p}(t) - \underline{p}(t) \geq \min\{\sigma_s, \delta + c\} > 0$;
- 3) 修正后的输出可行域 $\mathcal{O}'$ 为连通集.

证明. 1) 由于 $\bar{h}, \underline{h}, \bar{s}, \underline{s} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$, 根据定理 1 可知 $\mu_1, \mu_2 \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; [0, 1])$. 结合凸组合算子 (9), 可知 $\bar{p}, \underline{p} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$.

对任意 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$, 当 $\underline{s}(t) \geq \bar{h}(t)$ 时, 必有 $\bar{s}(t) > \underline{s}(t) \geq \bar{h}(t) > \underline{h}(t)$, 进而可得 $\bar{\varphi}(t) \leq 0 < \delta$ 且 $\underline{\varphi}(t) > \sigma_h > \kappa$. 根据式 (13) 可知 $\mu_1(t) = 0$ 且 $\mu_2(t) = 1$. 将其代入式 (14), 计算可得 $\bar{p}(t) = \bar{h}(t)$ 且 $\underline{p}(t) = \bar{h}(t) - \delta$, 即 $\bar{h}(t) - \underline{p}(t) = \delta$, 故式 (15a) 成立.

同理, 当 $\bar{s}(t) \leq \underline{h}(t)$ 时有 $\mu_1(t) = 1$ 且 $\mu_2(t) = 0$, 可得 $\bar{p}(t) = \underline{h}(t) + \delta$ 且 $\underline{p}(t) = \underline{h}(t)$, 故式 (15b) 亦成立.

- 2) 根据 1) 中的证明过程可知, 对任意 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$, 性质 2) 显然成立. 下面考虑对任意 $t \in I_c$ 的情形.

当 $\underline{s}(t) \leq \bar{h}(t) - \kappa$ 且 $\bar{s}(t) \geq \underline{h}(t) + \kappa$ 时, 由定理 1 中的式 (13) 可知 $\mu_1(t) = 1$ 且 $\mu_2(t) = 1$, 此时软约束和硬约束兼容. 将其代入式 (14), 计算可得 $\bar{p}(t) = \bar{s}(t)$ 且 $\underline{p}(t) = \underline{s}(t)$. 因此, $\bar{p}(t) - \underline{p}(t) = \bar{s}(t) - \underline{s}(t) \geq \sigma_s \geq \min\{\sigma_s, \delta + c\}$.

当 $\bar{h}(t) - \kappa < \underline{s}(t) < \bar{h}(t) - \delta$ 时, 有 $\mu_1(t) \in (0, 1)$. 注意到 $\kappa < \sigma_h/2 \leq (\bar{h}(t) - \underline{h}(t))/2$, 可知 $\bar{s}(t) > \bar{h}(t) - \kappa > \underline{h}(t) + \kappa$, 进而可得 $\varphi(t) > \kappa$, 故 $\mu_2(t) = 1$. 将 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 代入式 (14), 可得 $\bar{p}(t) = [P_{\mu_1}(\bar{s}, \bar{h} + c)](t)$, $\underline{p}(t) = [P_{\mu_1}(\underline{s}, \bar{h} - \delta)](t)$. 结合凸组合算子 P_μ 的线性性质及 $\bar{s}(t) - \underline{s}(t) \geq \sigma_s$, 可推得

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) - \underline{p}(t) &= \mu_1(t)(\bar{s}(t) - \underline{s}(t)) + \\ &\quad (1 - \mu_1(t))(\delta + c) \geq \\ &\quad \mu_1(t)\sigma_s + (1 - \mu_1(t))(\delta + c) \geq \\ &\quad \min\{\sigma_s, \delta + c\} \end{aligned} \quad (16)$$

同理, 当 $\underline{h}(t) + \delta < \bar{s}(t) < \underline{h}(t) + \kappa$ 时, 有 $\mu_1(t) = 1$ 且 $\mu_2(t) \in (0, 1)$. 类似可推得 $\bar{p}(t) - \underline{p}(t) \geq \min\{\sigma_s, \delta + c\}$.

综上, 对所有 $t \geq 0$, 总有 $\bar{p}(t) - \underline{p}(t) \geq \min\{\sigma_s, \delta + c\} > 0$ 成立.

3) 首先证明, 对任意 $t \geq 0$, 修正后的软约束边界与硬约束始终满足如下兼容条件:

$$\underline{h}(t) < \bar{p}(t) \text{ 且 } \underline{p}(t) < \bar{h}(t) \quad (17)$$

仿照 2) 中的分析, 当 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$ 时, 易知 $\bar{p}(t) = \bar{h}(t) > \underline{h}(t)$ 且 $\underline{p}(t) = \bar{h}(t) - \delta < \bar{h}(t)$ 恒成立; 或 $\bar{p}(t) = \underline{h}(t) + \delta > \underline{h}(t)$ 且 $\underline{p}(t) = \underline{h}(t) < \bar{h}(t)$ 恒成立. 此时, 式 (17) 显然成立.

当 $t \in I_c$ 时, 原始软、硬约束兼容, 即满足 $\underline{s}(t) < \bar{h}(t)$ 且 $\bar{s}(t) > \underline{h}(t)$. 若 $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 1$, 则由 (14) 直接可得式 (17) 成立.

进一步地, 若 $0 < \mu_1(t) < 1$ 且 $\mu_2(t) = 1$, 将其代入 (14), 并利用凸组合算子 P_μ 的单调性, 有

$$\begin{cases} \bar{p}(t) = [P_{\mu_1}(\bar{s}, \bar{h} + c)](t) > [P_{\mu_1}(\underline{h}, \underline{h})](t) = \underline{h}(t) \\ \underline{p}(t) = [P_{\mu_1}(\underline{s}, \bar{h} - \delta)](t) < [P_{\mu_1}(\bar{h}, \bar{h})](t) = \bar{h}(t) \end{cases}$$

即式 (17) 成立.

类似地, 当 $\mu_1(t) = 1$ 且 $0 < \mu_2(t) < 1$ 时, 可推得

$$\begin{cases} \bar{p}(t) = [P_{\mu_2}(\bar{s}, \underline{h} + \delta)](t) > [P_{\mu_2}(\underline{h}, \underline{h})](t) = \underline{h}(t) \\ \underline{p}(t) = [P_{\mu_2}(\underline{s}, \underline{h} - c)](t) < [P_{\mu_2}(\bar{h}, \bar{h})](t) = \bar{h}(t) \end{cases}$$

故式 (17) 亦成立.

综上, 对任意 $t \geq 0$, 式 (17) 恒成立. 进一步结合性质 2) 可知 $\underline{p}(t) < \bar{p}(t)$, 且 $R_h(t) \cap R_p(t) \neq \emptyset$ 恒成立, 从而 $I'_c = \mathbf{R}_{\geq 0}$. 因此, 修正后的输出可行域

$\mathcal{O}'$ 为连通集. $\square$

注 3. 由定理 2 的性质 3) 可知, 修正后的软约束与原始硬约束构成的输出可行域 $\mathcal{O}'$ 可表示为

$$\mathcal{O}' = \{(t, x_1) \mid t \geq 0, x_1 \in R_h(t) \cap R_p(t)\} \quad (18)$$

令 $\bar{q}(t) := \min\{\bar{h}(t), \bar{p}(t)\}$, $\underline{q}(t) := \max\{\underline{h}(t), \underline{p}(t)\}$, 则式 (18) 中的条件 $x_1 \in R_h(t) \cap R_p(t)$ 等价于 $\underline{q}(t) < x_1 < \bar{q}(t)$. 由于 $\bar{q}(t)$ 和 $\underline{q}(t)$ 分别由 $\min$ 和 $\max$ 算子确定, 其边界通常不具备光滑性.

为便于后续控制器设计与稳定性分析, 第 2.2 节进一步将原始硬约束与修正后的软约束整合为一组光滑约束边界, 从而构造出边界光滑的输出可行域.

2.2 光滑约束边界构造

不同于文献 [46] 中基于 LSE 的约束边界构造方法 (该方法不仅会引入不可避免的逼近误差, 且可能导致数值稳定性问题), 本节利用光滑过渡函数与凸组合算子技术, 在不引入任何逼近误差的前提下, 构造了一组光滑约束边界 $\bar{\rho}(t)$ 和 $\underline{\rho}(t)$, 从而确立了边界光滑的输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$. 具体构造过程如下.

首先, 对任意函数 $m \in C(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$, 定义如下辅助函数 $\phi_\epsilon(m(t))$:

$$\begin{aligned} \phi_\epsilon(m(t)) &:= [P_{\theta_\epsilon(m)}(m, \epsilon)](t) = \\ &\quad \theta_\epsilon(m(t))m(t) + (1 - \theta_\epsilon(m(t)))\epsilon \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\epsilon \in (0, \sigma_s/2)$ 为设计参数, $\theta_\epsilon(m(t))$ 和 $P_{\theta_\epsilon(m)}$ 分别为光滑过渡函数和凸组合算子.

利用辅助函数 $\phi_\epsilon(m(t))$, 将原始硬约束 (2) 和修正后的软约束 (14) 整合, 构造如下光滑约束边界 $\bar{\rho}(t)$ 和 $\underline{\rho}(t)$:

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\bar{h}(t) + \bar{p}(t)}{2} - \phi_\epsilon\left(\frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2}\right) \quad (20a)$$

$$\underline{\rho}(t) = \frac{\underline{h}(t) + \underline{p}(t)}{2} + \phi_\epsilon\left(\frac{|\underline{h}(t) - \underline{p}(t)|}{2}\right) \quad (20b)$$

显然, $\bar{\rho}, \underline{\rho} \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$. 定义时刻 t 的输出可行区间为 $R_\rho(t) := \{x_1 \in \mathbf{R} \mid \underline{\rho}(t) < x_1 < \bar{\rho}(t)\}$. 相应地, 可定义具有光滑边界的输出可行域为

$$\mathcal{O}_\rho := \{(t, x_1) \mid t \geq 0, x_1 \in R_\rho(t)\} \quad (21)$$

定理 3. 光滑约束边界 $\bar{\rho}(t)$ 和 $\underline{\rho}(t)$ 满足如下性质:

1) 若 $|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)| \geq 2\epsilon$, 则 $\bar{\rho}(t) = \bar{q}(t)$; 若 $|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)| < 2\epsilon$, 则 $\bar{q}(t) - \epsilon \leq \bar{\rho}(t) < \bar{q}(t)$.

2) 若 $|\underline{h}(t) - \underline{p}(t)| \geq 2\epsilon$, 则 $\underline{\rho}(t) = \underline{q}(t)$; 若 $|\underline{h}(t) - \underline{p}(t)| < 2\epsilon$, 则 $\underline{q}(t) < \underline{\rho}(t) \leq \underline{q}(t) + \epsilon$.

证明. 下面仅给出性质 1) 的证明, 性质 2) 可完全类似地得到.

当 $|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)| \geq 2\epsilon$ 时, 由定义 1 可知 $\theta_\epsilon(|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2) = 1$, 从而 $\phi_\epsilon(|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2) = |\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2$. 代入 (20a) 可得

$$\bar{\rho}(t) = \frac{\bar{h}(t) + \bar{p}(t)}{2} - \frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} = \min\{\bar{h}(t), \bar{p}(t)\} = \bar{q}(t) \quad (22)$$

当 $|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)| < 2\epsilon$ 时, 有 $\theta_\epsilon(|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2) < 1$. 展开 ϕ_ϵ 并代入 (20a) 可得:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) &= \frac{\bar{h}(t) + \bar{p}(t)}{2} - \left[\frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} + \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \theta_\epsilon \left(\frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} \right) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\epsilon - \frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} \right) \right] = \\ &= \bar{q}(t) - \left(1 - \theta_\epsilon \left(\frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} \right) \right) \times \\ &\quad \left(\epsilon - \frac{|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

注意到 $0 < 1 - \theta_\epsilon(|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2) \leq 1$ 且 $0 < \epsilon - |\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2 \leq \epsilon$, 可得 $\bar{q}(t) - \epsilon \leq \bar{\rho}(t) < \bar{q}(t)$.

综上, 性质 1) 成立. 同理, 性质 2) 亦成立. $\square$

注 4. 由定理 3 可知, 输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 具有光滑边界, 且满足 $\mathcal{O}_\rho \subset \mathcal{O}'$. 进一步地, 若控制器 $u(t, \bar{x}_n)$ 能保证闭环系统输出满足 $y \in \mathcal{O}_\rho$, 则结合定理 2 和定理 3 可知: 对任意 $t \geq 0$, 有 $y \in R_h(t)$; 当 $t \in I_c$ 时, $y \in R_\rho(t) \subset R_h(t) \cap R_p(t)$; 当 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0} \setminus I_c$ 时, $y \in R_p(t)$. 因此有 $\text{dist}(y(t), R_s(t)) < d_{\min}(t) + \delta$. 至此, 原控制目标被等价转化为在线修正后输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 的约束满足问题.

注 5. 与文献 [46] 不同, 本文通过光滑过渡函数与凸组合算子直接对约束边界进行修正与整合, 避免了引入辅助动态系统、LSE 及符号函数逼近. 该直接修正机制不仅消除了逼近误差和规避了潜在的数值问题, 而且能够在约束冲突发生前于有限时间内实现软、硬约束的有效解耦.

注 6. 本文所提可行域在线修正方案中参数选取与调试策略可概括如下: 首先, 容差参数 $\delta \in (0, \sigma_h/2)$ 用于调节软约束的违背量. 选取较小的 δ 虽可减小实际违背量, 但可能导致控制输入幅值增大, 故需在控制代价与任务可容忍的违背量之间进

行合理折中. 其次, 过渡参数 $\kappa \in (\delta, \sigma_h/2)$ 决定软约束修正过程的过渡时长. 选取较小的 κ 能加快冲突响应, 但同样可能增大控制输入幅值, 其折中整定原则与 δ 类似. 再次, 设计参数 $c \in \mathbf{R}_{>0}$ 可用于进一步调节软约束的实际违背量, 其取值可结合输出可行域的裕度 (即软约束与硬约束的上下边界之差) 进行选取. 最后, 参数 $\epsilon \in (0, \sigma_s/2)$ 应依据软约束与硬约束边界的变化率进行设定.

2.3 漏斗控制器设计

本节针对上一节构造的输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ (由 (21) 给出), 设计一种结构简洁、计算复杂度低的鲁棒漏斗控制器, 以保证系统输出始终满足 $y(t) \in \mathcal{O}_\rho, \forall t \geq 0$.

控制器设计步骤具体如下:

步骤 1. 定义归一化坐标变换 $\xi_1(t) := (2x_1(t) - \bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))/(\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))$. 设计第一个虚拟控制器 v_1 为:

$$v_1 = -\frac{k_1 \xi_1}{1 - \xi_1^2} \quad (24)$$

其中 $k_1 > 0$ 为待设计的增益参数.

步骤 i ($i = 2, \dots, n$). 预选第 i 个辅助函数 $r_i \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R}_{>0})$ 为严格正函数, 且存在常数 $r_i^0 \in \mathbf{R}_{>0}$ 使得对所有 $t \geq 0$ 均有 $r_i(t) \geq r_i^0$. 此外, 该函数满足初始条件 $r_i(0) > |x_i(0) - v_{i-1}(0)|$. 在此基础上, 定义归一化误差变量 $\xi_i := (x_i - v_{i-1})/r_i$, 并分别设计第 i 个虚拟控制器 v_i 与实际控制器 u 为:

$$v_i = -\frac{k_i \xi_i}{1 - \xi_i^2}, \quad i = 2, \dots, n \quad (25)$$

$$u = v_n \quad (26)$$

其中 $k_i \in \mathbf{R}_{>0}$ 为待设计的增益参数, $i = 2, \dots, n$.

上述增益参数 k_1 到 k_n 在实际应用中应结合控制带宽与执行器受限情况进行选取.

注 7. 文献 [46] 通过引入辅助动态系统实现对软约束的间接修正, 因此在控制器执行过程中需额外求解微分方程以获得修正后的软约束边界, 这在一定程度上增加了控制器的计算复杂度. 与文献 [46] 不同, 本文采用光滑过渡函数与凸组合算子对软约束边界进行直接修正, 无需引入任何辅助动态系统, 从而保证所设计的控制器具有静态状态反馈形式, 有效降低了计算复杂度.

2.4 稳定性分析

下面给出本文的主要结果.

定理 4. 给定满足假设 3 的软约束边界 $\bar{s}(t)$,

$\underline{s}(t)$ 以及硬约束边界 $\bar{h}(t)$, $\underline{h}(t)$, 考虑系统 (1), 其初始条件 x_1^0 满足假设 4, 设计实际控制器 (26), 虚拟控制器 (24) 和 (25), 则闭环系统的所有信号均有界, 且系统输出 y 始终保持在输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 内.

证明. 证明分为三个部分. 首先, 证明闭环系统在其最大存在区间 $[0, t_f]$ 上存在唯一解; 其次, 利用反证法证明 $t_f = +\infty$; 最后, 实现预期控制目标.

第一部分. 定义 $a_1(t) := 2/(\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))$, $b_1(t) := (\bar{\rho}(t) + \underline{\rho}(t))/(\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))$ 以及 $a_i(t) := 1/r_i(t)$, $b_i(t) := v_{i-1}(\xi_{i-1}(t))/r_i(t)$, $i = 2, \dots, n$, 故 $\xi_j(t) = a_j(t) \times x_j(t) - b_j(t)$, $j = 1, \dots, n$. 进一步定义 $x_{n+1}(t) := u(t) = v_n(t)$, $\xi_{n+1}(t) := \xi_n(t)$.

由式 (24) ~ (26) 可知, v_j 可表示为 ξ_j 的函数, 记作 $v_j(t) = \check{v}_j(\xi_j(t))$, $j = 1, \dots, n$. 同时, $x_1 = ((\bar{\rho}(t) - \underline{\rho}(t))\xi_1 + (\bar{\rho}(t) + \underline{\rho}(t)))/2 = \check{x}_1(t, \xi_1)$, $x_i = v_{i-1} + r_i\xi_i = \check{x}_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i)$, $i = 2, \dots, n$. 对 ξ_1 沿时间求导并结合系统 (1), 可知 $\dot{\xi}_1$ 可表示为 (t, ξ_1, ξ_2) 的函数, 记作 $\dot{\xi}_1 = h_1(t, \xi_1, \xi_2)$. 类似地, 对 $i = 2, \dots, n$ 有 $\dot{\xi}_i = h_i(t, \xi_1, \dots, \xi_{i+1})$. 令 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$, 闭环系统可写为

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} h_1(t, \xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ h_n(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{bmatrix} := H(t, \xi) \quad (27)$$

其中 $H(t, \xi)$ 为关于 t 和 ξ 的向量值函数. 注意到 f_i, g_i 关于 $\bar{x}_i$ 局部 Lipschitz 连续, 且 $\underline{\rho}, \bar{\rho}, r_i \in BC^1(\mathbf{R}_{\geq 0}; \mathbf{R})$. 易得 H 关于 ξ 局部 Lipschitz 连续且关于 t 连续. 定义开集 $\mathcal{E} = (-1, 1)^n \subset \mathbf{R}^n$. 由于 $x_1^0 \in R_\rho(0)$, 可知 $\xi_1(0) \in (-1, 1)$. 此外, r_i 的选取保证了 $\xi_i(0) \in (-1, 1)$ ($i = 2, \dots, n$), 故 $\xi(0) \in \mathcal{E}$. 根据引理 1, 闭环系统 (27) 在其最大存在区间 $[0, t_f]$ 上存在唯一解.

第二部分. 选取障碍 Lyapunov 函数

$$V_1(\xi_1) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 - \xi_1^2} \right) \quad (28)$$

对时间求导可得

$$\dot{V}_1 = (\nabla_{\xi_1} V_1) \dot{\xi}_1 = \nabla_{\xi_1} V_1 (a_1(f_1 + g_1 x_2) + \dot{a}_1 x_1 - \dot{b}_1) \quad (29)$$

注意到 $v_1 = -k_1 \xi_1 / (1 - \xi_1^2) = -k_1 \nabla_{\xi_1} V_1$, 可得 $x_2 = -k_1 \nabla_{\xi_1} V_1 + r_2 \xi_2$. 定义 $c_1 := (a_1 f_1 + \dot{a}_1 x_1 - \dot{b}_1) / (a_1 g_1) + r_2 \xi_2$, 易知 c_1 对任意 $t \in [0, t_f]$ 均有界. 式 (29) 放缩可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= a_1 g_1 (c_1 \nabla_{\xi_1} V_1 - k_1 |\nabla_{\xi_1} V_1|^2) \leq \\ &a_1 g_1 (\|c_1\|_\infty |\nabla_{\xi_1} V_1| - k_1 |\nabla_{\xi_1} V_1|^2) \end{aligned} \quad (30)$$

当 $|\nabla_{\xi_1} V_1| \geq \|c_1\|_\infty / k_1$ 时, 有 $\dot{V}_1 \leq 0$. 因此, V_1 在时间区间 $[0, t_f]$ 上一致最终有界, 即存在正常数 V_1^* 使得 $V_1(t) \leq \max\{V_1(0), V_1^*\}$. 由于 $V_1 \in C^1((-1, 1); \mathbf{R}_{\geq 0})$, 故存在正常数 $\bar{\xi}_1$ 使得 $|\xi_1(t)| \leq \bar{\xi}_1 < 1$ 对所有 $t \in [0, t_f]$ 成立. 结合式 (24), 可推得 v_1 和 $\dot{v}_1$ 在时间区间 $[0, t_f]$ 内均有界. 又由 $b_2 = v_1/r_2$ 可知 $\dot{b}_2 = \frac{\partial b_2}{\partial t} + \frac{\partial b_2}{\partial v_1} \dot{v}_1$, 故 $\dot{b}_2$ 在时间区间 $[0, t_f]$ 内亦有界.

对于 $i = 2, \dots, n$, 选取障碍 Lyapunov 函数

$$V_i(\xi_i) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1 - \xi_i^2} \right) \quad (31)$$

沿时间求导可得

$$\dot{V}_i = \nabla_{\xi_i} V_i (a_i(f_i + g_i x_{i+1}) + \dot{a}_i x_i - \dot{b}_i) \quad (32)$$

注意到 $v_i = -k_i \xi_i / (1 - \xi_i^2) = -k_i \nabla_{\xi_i} V_i$. 类似式 (30), 存在正常数 $\bar{\xi}_i$, 使得 $|\xi_i(t)| \leq \bar{\xi}_i < 1$, $\forall t \in [0, t_f]$. 结合式 (25) 和 (26) 可知虚拟控制器 v_i ($i = 2, \dots, n-1$) 和实际控制器 u 均在时间区间 $[0, t_f]$ 上有界.

下面利用反证法证明 $t_f = +\infty$. 若假设 $t_f < +\infty$, 则存在紧集 $\mathcal{E}' = \prod_{i=1}^n [-\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i] \subset \mathcal{E}$, 使得 $\xi(t) \in \mathcal{E}'$ 对所有 $t \in [0, t_f]$ 成立, 这与引理 2 矛盾, 故 $t_f = +\infty$.

第三部分. 由第二部分可知, 状态向量 $\bar{x}_n = [x_1, \dots, x_n]^T$, 所有虚拟控制器 v_i ($i = 1, \dots, n-1$) 以及实际控制器 u 在 $t \geq 0$ 均有界. 进一步, 由 $\xi_1(t) \in (-1, 1)$ 可得对任意 $t \geq 0$ 有 $\underline{\rho}(t) < y(t) < \bar{\rho}(t)$, 即闭环系统输出轨迹 $\{(t, y(t)) \mid t \geq 0\}$ 始终位于修正后的可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 内. 结合注 4 可知, 预期控制目标得以实现. $\square$

注 8. 由定理 4 可知, 无论系统的软、硬约束处于兼容还是冲突状态, 本文所设计的漏斗控制策略均能保证闭环系统的稳定性, 并使系统输出 y 始终保持在修正后的输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 内. 当软、硬约束发生冲突时, 根据定理 2 中式 (15) 可得 $\text{dist}(y(t), R_s(t)) < d_{\min}(t) + \delta$, 即软约束的违背量被严格限制在 $d_{\min}(t) + \delta$ 以内. 结合式 (3) 可知, 系统的跟踪误差 $e(t) := y(t) - y_d(t)$ 满足

$$\hat{s}(t) - d_{\min}(t) - \delta < e(t) < \hat{s}(t) + d_{\min}(t) + \delta$$

从而确保闭环系统输出 y 始终在期望轨迹 $y_d(t)$ 附近.

注 9. 值得指出的是, 本文所提漏斗控制策略不依赖系统函数 f_i, g_i 的精确信息. 当系统存在有界扰动时, 所设计的漏斗控制器仍能确保系统输出始终保持在修正后的输出可行域 $\mathcal{O}_\rho$ 内.

3 数值仿真

考虑如下二阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \exp(-0.1x_1) + x_1^2 + (x_1^2 + 2)x_2 \\ \dot{x}_2 = \sin(x_1x_2^2) + (x_1^2 + x_2^4 + 4)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (33)$$

其中系统的初始状态为 $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [0.7, 0]^T$. 期望输出轨迹选取为 $y_d = 0.7 \sin(t) + 0.7$, 显然满足假设 2. 控制目标是设计状态反馈控制器 u , 使闭环系统在 $t \geq 0$ 上同时满足如下约束条件:

• 硬约束:

$$\underline{h}(t) < y(t) < \bar{h}(t), \quad \forall t \geq 0$$

• 软约束:

$$\hat{s}(t) < y(t) - y_d(t) < \hat{s}(t), \quad \forall t \geq 0$$

其中约束边界设定为

$$\begin{cases} \bar{h}(t) = 1.2 + 0.05 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \underline{h}(t) = 0.2 + 0.05 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$$

以及 $\hat{s}(t) = 0.1$, $\hat{s}(t) = -0.1$. 显然, 上述约束边界满足假设 3, 且系统 (33) 的初始条件满足假设 4.

控制器设计与实现. 采用本文所提基于光滑过渡函数和凸组合算子的算法进行控制器设计. 在本次仿真中, 运行时长设置为 $T = 12$ s, 式 (14) 中的容差参数取 $\delta = 0.01$, 过渡参数取 $\kappa = 0.5$, $c = 0.2$. 根据式 (14), 可得修正的软约束边界分别为 $\bar{p}(t) = [P_{\mu_2}(P_{\mu_1}(\bar{s}, \bar{h} + 0.2), \underline{h} + 0.01)](t)$, $\underline{p}(t) = [P_{\mu_1}(P_{\mu_2}(\underline{s}, \underline{h} - 0.2), \bar{h} - 0.01)](t)$. 进一步, 选取 $\epsilon = 0.15$, 由式 (20) 可得到整合后的光滑约束边界分别为 $\bar{\rho}(t) = (\bar{h}(t) + \bar{p}(t))/2 - \phi_{0.15}(|\bar{h}(t) - \bar{p}(t)|/2)$, $\underline{\rho}(t) = (\underline{h}(t) + \underline{p}(t))/2 + \phi_{0.15}(|\underline{h}(t) - \underline{p}(t)|/2)$. 针对整合后的光滑约束边界 $\bar{\rho}(t)$ 和 $\underline{\rho}(t)$, 采用所设计的漏斗控制器 (24) ~ (26) 生成控制信号 u . 具体步骤如下:

步骤 1. 利用坐标变换计算 $\xi_1 = (2x_1 - \bar{\rho} - \underline{\rho})/(\bar{\rho} - \underline{\rho})$, 并选取虚拟控制器 $v_1 = -2\xi_1/(1 - \xi_1^2)$.

步骤 2. 选取辅助函数 $r_2(t) = 0.1 \exp(-2t) + 0.01$, 满足 $|x_2(0) - v_1(0)| < r_2(0)$. 实际控制器设计为 $u = -\xi_2/(1 - \xi_2^2)$, 其中 $\xi_2 = (x_2 - v_1)/r_2$.

为验证所提框架的有效性与优势, 将本文方法与文献 [46] 中的控制算法进行比较, 其参数选取为 $\gamma_v(t) = 1.9 \exp(-2t) + 0.1$, $\mu = 0.01$, $k_c = 8$, $\kappa = 4$, $\nu = 15$, $k_x = 0.2$ 和 $k_v = 4$.

仿真结果如图 1 ~ 6 所示. 图 1 给出了系统输出 $y(t)$ 在输出可行域内的演化轨迹. 结果表明, 本

文方法与文献 [46] 中的控制器均能够严格保证闭环系统输出始终位于硬约束区域内, 并在无冲突区间内尽可能满足软约束. 然而, 在软、硬约束发生冲突的时间区间内, 二者在软约束违背的处理方式上

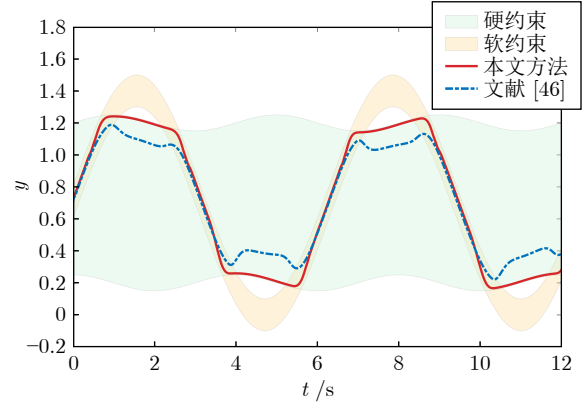


图 1 可行域内的输出轨迹 y

Fig.1 Output trajectory y within the feasible region

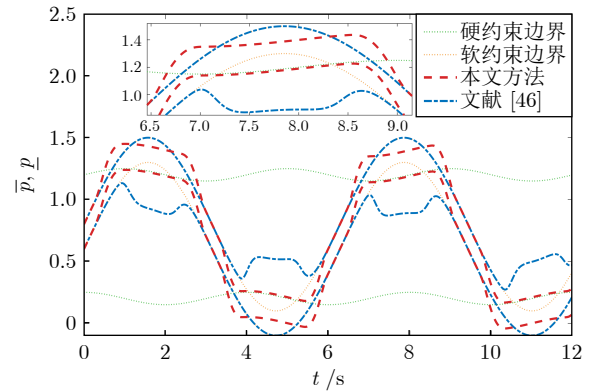


图 2 修正后的软约束边界 $\bar{p}$ 和 p

Fig.2 Modified soft constraint boundaries $\bar{p}$ and p

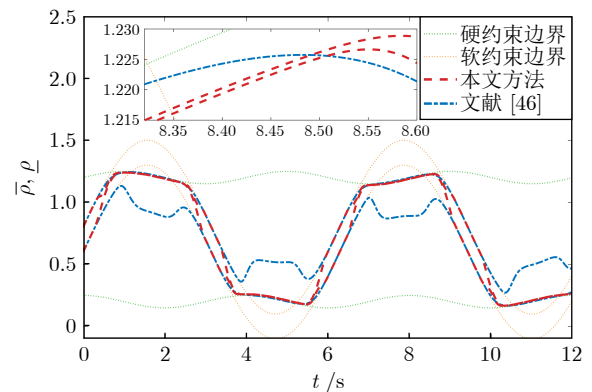
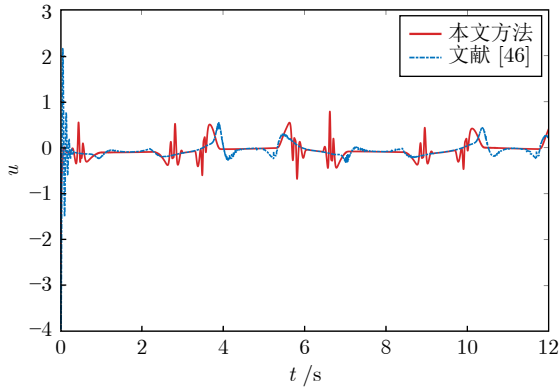
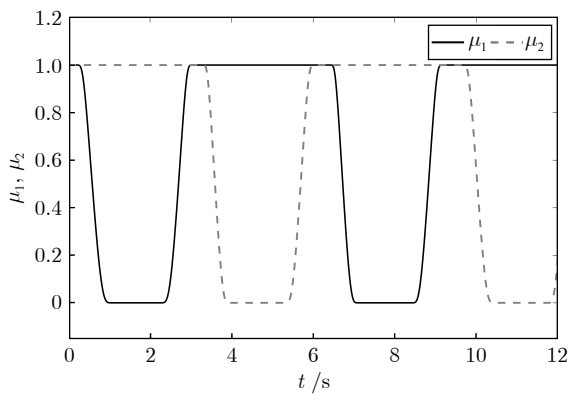
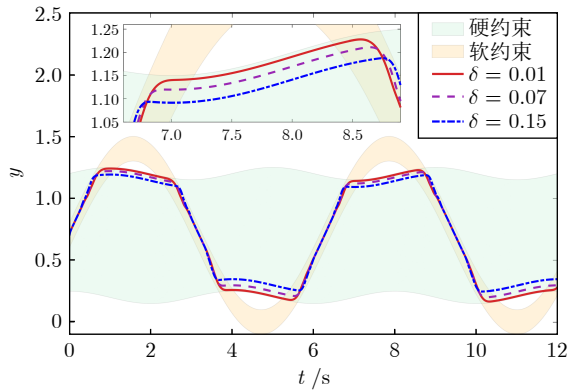


图 3 整合的光滑约束边界 $\bar{\rho}$ 和 ρ

Fig.3 Consolidated smooth constraint boundaries $\bar{\rho}$ and ρ

图 4 控制输入 u Fig.4 Control input u 图 5 凸组合权函数 μ_1 和 μ_2 Fig.5 Convex combination coefficients μ_1 and μ_2 图 6 不同容差参数 δ 下软约束违背量对比Fig.6 Comparison of soft-constraint violation under different tolerance parameters δ

表现出显著差异. 本文方法的关键优势在于其对冲突区间内软约束违背量的可控性. 不同于文献 [46] 中的策略, 本文所提控制器能够将软约束违背量严格限制在满足硬约束所需的最小违背量 $d_{\min}(t)$ 与预设容差 δ 之和以内, 其中本例取 $\delta = 0.01$. 图 2 所

示的修正后软约束边界 $\bar{p}(t)$ 与 $\underline{p}(t)$ 直观验证了该性质. 图 3 给出了由原始硬约束与修正后软约束整合而成的光滑约束边界 $\bar{\rho}(t)$ 与 $\underline{\rho}(t)$.

图 4 展示了控制输入 u 的演化过程. 图 5 给出了凸组合权函数 $\mu_1(t)$ 与 $\mu_2(t)$ 的变化情况, 验证了注 2 中所述软、硬约束在兼容与冲突状态之间的光滑切换特性. 图 6 对比了不同容差参数 δ 下的软约束违背量, 结果表明, 随着 δ 的减小, 软约束违背量的允许上界 $d_{\min}(t) + \delta$ 相应减小, 输出 y 在不同 t 值下表现不同, 冲突区间内的实际软约束违背量同步减小, 体现了本文方法对软约束违背程度的精确调节能力. 这是本文方法相较于文献 [46] 的显著优势.

为了进一步量化本文方法与文献 [46] 在约束冲突处理方面的性能差异, 引入如下三类性能指标: 跟踪误差 $e(t) = y(t) - y_d(t)$ 的 L^2 范数、软约束满足率 α 以及平均软约束违背量 β . 各指标分别定义为 $\|e\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^T e^2(t) dt}$, $\alpha = \lambda(I_s)/\lambda(I_c)$, $\beta := \int_{[0, T] \setminus I_c} |\text{dist}(y(t), R_s(t)) - \text{dist}(R_h(t), R_s(t))| dt / (T - \lambda(I_c))$. 其中, $I_s = \{t \in [0, T] \mid y(t) \in R_s(t)\}$ 表示满足原始软约束的时间集合, $I_c \subset [0, T]$ 表示原始软、硬约束的兼容时间集合, $\lambda(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度, 指标 α 用于衡量软、硬约束兼容时段内软约束的实际满足率, 指标 β 则用于量化在约束冲突时段内软约束违背量的平均水平.

表 1 汇总了上述两种方法在时间区间 $[0, 12]$ s 上的性能指标 $\|e\|_{L^2}$ 、 α 和 β . 定量分析表明, 在整个仿真时段内, 本文方法的跟踪误差为 0.40, 显著低于文献 [46] 的 0.71. 此外, 在约束兼容时段内, 本文方法实现了更高的软约束满足率 (97.31% 对比 78.03%). 在约束冲突时段内, 本文方法能够将平均软约束违背量严格限制在预设容差 $\delta = 0.01$ 以内 ($\beta = 0.0095$), 而文献 [46] 的对应违背量为 0.1471. 上述结果表明, 无论是在约束兼容还是冲突的情形下, 本文方法均展现出更优的控制性能.

表 2 对比了两种方法在不同仿真时长下的计算时间. 定量分析显示, 随着仿真时长的增加, 本文方法相较于文献 [46] 展现出更显著的计算效率优势.

表 1 时间区间 $[0, 12]$ s 上的性能指标对比Table 1 Comparison of performance indices over the time interval $[0, 12]$ s

	$\ e\ _{L^2}$	α (%)	β
本文方法	0.40	97.31	0.0095
文献 [46]	0.71	78.03	0.1471

表 2 不同仿真时长下的计算时间对比 (s)
Table 2 Comparison of computational time under different simulation durations (s)

	$T = 12$	$T = 50$	$T = 100$
本文方法	1.00	3.95	7.60
文献 [46]	1.08	4.55	10.19

4 结束语

本文针对一类存在软、硬输出约束的不确定非线性系统, 提出一种基于光滑过渡函数与凸组合算子的漏斗控制方法. 针对软、硬约束可能发生冲突的问题, 本文通过引入光滑过渡函数并构造凸组合算子, 对软约束边界进行在线直接修正, 在保证其与硬约束始终兼容的同时, 将软约束违背量严格限制在满足硬约束所需的最小违背量与预设容差之和以内. 在此基础上, 对硬约束与修正后的软约束进行整合, 并构造边界光滑、连通的输出可行域. 结合该约束结构, 进一步设计一种低复杂度的静态漏斗控制器, 从而保证闭环系统在全时间域内严格满足硬约束, 并在冲突区间内以可调精度满足软约束要求. 与现有方法相比, 所提方法具有结构简洁、易于实现、计算复杂度低等优势, 且能够在有限时间内实现软、硬约束的有效解耦, 从而优先保障硬约束的严格满足. 数值仿真结果验证了所提方法的有效性与优势. 未来的工作将致力于将该方法推广至具有时空耦合特性的约束情形.

参考文献

- Arabi E, Garg K, Panagou D. Safety-critical adaptive control with nonlinear reference model systems. In: Proceedings of the American Control Conference (ACC). Denver, USA: IEEE, 2020. 1749–1754
- Yang H Y, Dong H Y, Zhao X W. Safety-critical control allocation for obstacle avoidance of quadrotor aerial photography. *IEEE Control Systems Letters*, 2024, **8**: 1973–1978
- Mao J, Yeom J, Nair S, Loianno G. From propeller damage estimation and adaptation to fault tolerant control: Enhancing quadrotor resilience. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2024, **9**(5): 4297–4304
- Nguyen Q, Sreenath K. Robust safety-critical control for dynamic robotics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(3): 1073–1088
- He Z C, Wu J Y, Zhang J W, Zhang S B W, Shi Y P, Liu H X, et al. CDM-MPC: An integrated dynamic planning and control framework for bipedal robots jumping. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2024, **9**(7): 6672–6679
- Han L Q, Chen X C, Yu Z G, Gao Z F, Huang G, Zhang J T, et al. A heuristic gait template planning and dynamic motion control for biped robots. *Robotica*, 2023, **41**(2): 789–805
- Xiao W, Cassandras C G, Belta C A. Bridging the gap between optimal trajectory planning and safety-critical control with applications to autonomous vehicles. *Automatica*, 2021, **129**: Article No. 109592
- Cohen M H, Molnar T G, Ames A D. Safety-critical control for autonomous systems: Control barrier functions via reduced-order models. *Annual Reviews in Control*, 2024, **57**: Article No. 100947
- Alan A, Taylor A J, He C R, Ames A D, Orosz G. Control bar-

- rier functions and input-to-state safety with application to automated vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2023, **31**(6): 2744–2759
- Ilchmann A, Ryan E P, Sangwin C J. Tracking with prescribed transient behaviour. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2002, **7**: 471–493
- Ilchmann A, Ryan E P, Townsend P. Tracking with prescribed transient behavior for nonlinear systems of known relative degree. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, **46**(1): 210–230
- Berger T, Ilchmann A, Ryan E P. Funnel control of nonlinear systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2021, **33**(1): 151–194
- Liu Y H, Su C Y, Li H Y. Adaptive output feedback funnel control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(6): 2854–2860
- Berger T, Ilchmann A, Ryan E P. Funnel control—A survey. *Annual Reviews in Control*, 2025, **60**: Article No. 101024
- Berger T. Input-constrained funnel control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(8): 5368–5382
- Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(9): 2090–2099
- Bechlioulis C P, Rovithakis G A. A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems. *Automatica*, 2014, **50**(4): 1217–1226
- Bu X W. Prescribed performance control approaches, applications and challenges: A comprehensive survey. *Asian Journal of Control*, 2023, **25**(1): 241–261
- Chen G J, Dong J X. Approximate optimal adaptive prescribed performance control for uncertain nonlinear systems with feature information. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2024, **54**(4): 2298–2308
- Zhang J X, Ding J L, Chai T Y. Fault-tolerant prescribed performance control of wheeled mobile robots: A mixed-gain adaptation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(8): 5500–5507
- Glofelter P, Cortes J, Egerstedt M. Nonsmooth barrier functions with applications to multi-robot systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2017, **1**(2): 310–315
- Molnar T G, Ames A D. Composing control barrier functions for complex safety specifications. *IEEE Control Systems Letters*, 2023, **7**: 3615–3620
- Ames A D, Xu X R, Grizzle J W, Tabuada P. Control barrier function based quadratic programs for safety critical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(8): 3861–3876
- Breeden J, Panagou D. Robust control barrier functions under high relative degree and input constraints for satellite trajectories. *Automatica*, 2023, **155**: Article No. 111109
- Jian Z Z, Yan Z H, Lei X A, Lu Z H, Lan B, Wang X Q, et al. Dynamic control barrier function-based model predictive control to safety-critical obstacle-avoidance of mobile robot. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). London, UK: IEEE, 2023. 3679–3685
- Hackl C M, Hopfe N, Ilchmann A, Mueller M, Trenn S. Funnel control for systems with relative degree two. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, **51**(2): 965–995
- Berger T. Fault-tolerant funnel control for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(9): 4349–4356
- Berger T, Lê H H, Reis T. Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree. *Automatica*, 2018, **87**: 345–357
- Berger T, Breiten T, Puche M, Reis T. Funnel control for the monodomain equations with the FitzHugh-Nagumo model. *Journal of Differential Equations*, 2021, **286**: 164–214
- Hastir A, Wink J J, Dochain D. Funnel control for a class of nonlinear infinite-dimensional systems. *Automatica*, 2023, **152**: Article No. 110964

- 31 Berger T, Puche M, Schwenninger F L. Funnel control for a moving water tank. *Automatica*, 2022, **135**: Article No. 109999
- 32 Long L J, Wang F L, Chen Z Y. Global event-triggered funnel control of switched nonlinear systems via switching multiple Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(11): 6731–6741
- 33 Mishra P K, Jagtap P. Approximation-free control for unknown systems with performance and input constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(5): 3417–3424
- 34 Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Prescribed performance adaptive control for multi-input multi-output affine in the control nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(5): 1220–1226
- 35 Theodorakopoulos A, Rovithakis G A. Low-complexity prescribed performance control of uncertain MIMO feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(7): 1946–1952
- 36 Bikas L N, Rovithakis G A. Prescribed performance under input saturation for uncertain strict-feedback systems: A switching control approach. *Automatica*, 2024, **165**: Article No. 111663
- 37 Bu X W, Luo R N, Lv M L, Lei H M. Adaptive fuzzy safety control of hypersonic flight vehicles pursuing adaptable prescribed behaviors: A sensing and adjustment mechanism. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, **32**(12): 7050–7062
- 38 Bu X W, Wu X Y, Zhu F J, Huang J Q, Ma Z, Zhang R. Novel prescribed performance neural control of a flexible air-breathing hypersonic vehicle with unknown initial errors. *ISA Transactions*, 2015, **59**: 149–159
- 39 Ma C, Dong D B. Finite-time prescribed performance time-varying formation control for second-order multi-agent systems with non-strict feedback based on a neural network observer. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, **11**(4): 1039–1050
- 40 Wu Y, Chen M, Li H Y, Chadli M. Event-triggered-based adaptive NN cooperative control of six-rotor UAVs with finite-time prescribed performance. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, **21**(2): 1867–1877
- 41 Bu X W, Lv M L, Liu Z C. Intelligent safety flight control with variable prescribed performance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, **60**(2): 2050–2060
- 42 Bu X W, Park J H, Lei H M. Discrete-time neural control with flexible prescribed performance for constrained systems with fragility relaxation. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 2386–2394
- 43 Xu X R. Constrained control of input-output linearizable systems using control sharing barrier functions. *Automatica*, 2018, **87**: 195–201
- 44 Lindemann L, Dimarogonas D V. Control barrier functions for signal temporal logic tasks. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, **3**(1): 96–101
- 45 Safari A, Hoagg J B. Time-varying soft-maximum control barrier functions for safety in an a priori unknown environment. In: Proceedings of the American Control Conference (ACC). Toronto, Canada: IEEE, 2024. 3698–3703
- 46 Mehdifar F, Bechlioulis C P, Dimarogonas D V. Funnel control under hard and soft output constraints. In: Proceedings of the 61st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Cancun, Mexico: IEEE, 2022. 4473–4478
- 47 Mehdifar F, Lindemann L, Bechlioulis C P, Dimarogonas D V. Low-complexity control for a class of uncertain MIMO nonlinear systems under generalized time-varying output constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(7): 4270–4285
- 48 Bertsekas D P. Nondifferentiable optimization via approximation. *Nondifferentiable Optimization*. Berlin: Springer, 1975. 1–25
- 49 Warner F W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer, 1983.
- 50 Logemann H, Ryan E P. *Ordinary Differential Equations: Analysis, Qualitative Theory and Control*. London: Springer, 2014.
- 51 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

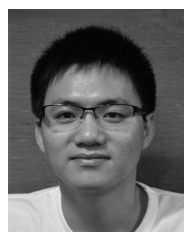


左 凰 广东工业大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性控制与约束控制.

E-mail: pengpqcw32309@163.com

(**ZUO Huang** Ph.D. candidate at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His

research interests include nonlinear control and constrained control.)



陶 杰 广东工业大学自动化学院教授. 主要研究方向为基于事件的控制与无人机系统.

E-mail: taojiedyx@163.com

(**TAO Jie** Professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His research

interests include event-based control and unmanned aerial vehicle systems.)



林 明 广东工业大学自动化学院教授. 主要研究方向为高速光通信, 网络化控制系统及 5G 应用.

E-mail: linming@gdut.edu.cn

(**LIN Ming** Professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His research

interests include high-speed optical communication, networked control systems and 5G applications.)



刘勇华 广东工业大学自动化学院副教授. 主要研究方向为非线性控制与智能控制. 本文通信作者.

E-mail: yonghua.liu@outlook.com

(**LIU Yong-Hua** Associate professor at the School of Automation, Guangdong University of Techno-

logy. His research interests include nonlinear control and intelligent control. Corresponding author of this paper.)



苏春翌 广东工业大学自动化学院教授. 主要研究方向为控制理论及其在机电系统中的应用.

E-mail: chunyi.su@concordia.ca

(**SU Chun-Yi** Professor at the School of Automation, Guangdong University of Technology. His re-

search interests include control theory and its applications to electromechanical systems.)