



动态系统预设时间控制的若干问题

宋永端 叶合夫

Several Issues on Prescribed-time Control of Dynamic Systems

SONG Yong-Duan, YE He-Fu

在线阅读 View online:

<http://www.aas.net.cn/article/current/8ff8f632e0e776846dab9c6f0f3ddc721d401e6461afc4f1680a52a253fa729e>

您可能感兴趣的其他文章

基于层级结构的空地协同预设时间最优容错控制

Hierarchical-based Prescribed-time Optimal Fault-tolerant Control for Air-ground Cooperative System

自动化学报. 2024, 50(8): 1589–1600 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230699>

高超声速飞行器指定时间时变高增益反馈跟踪控制

Prescribed-time Tracking Control of Hypersonic Vehicles by Time-varying High-gain Feedback

自动化学报. 2024, 50(6): 1151–1159 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c210895>

高超声速变外形飞行器建模与固定时间预设性能控制

Modeling and Fixed-time Prescribed Performance Control for Hypersonic Morphing Vehicle

自动化学报. 2024, 50(3): 486–504 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230240>

考虑执行器非线性的固定时间全局预设性能车辆队列控制

Fixed-time Global Prescribed Performance Control for Vehicular Platoons With Actuator Nonlinearities

自动化学报. 2024, 50(2): 320–333 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230189>

一类 p 规范型非线性系统预设性能有限时间 H_∞ 跟踪控制

Prescribed Performance Finite-time H_∞ Tracking Control for a Class of p -normal Form Nonlinear Systems

自动化学报. 2021, 47(12): 2870–2880 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c190116>

无人机/无人艇异构协同固定时间预设性能演化控制

Heterogeneous Cooperative Fixed-time Prescribed Performance Evolution Control for Unmanned Aerial/Surface Vehicle

自动化学报. 2025, 51(5): 1052–1066 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c240141>

动态系统预设时间控制的若干问题

宋永端¹ 叶合夫¹

摘要 2017 年, 宋永端教授团队于 *Automatica* 发表高阶非线性系统预设时间控制的原创性工作. 不同于传统控制方法, 该策略能够人为预先设定系统收敛的时间, 同时具备出色的扰动抑制性能, 成果面世后迅速成为研究热点, 国内外学者围绕该方向已开展大量深入研究. 本文从系统稳定性相关的基本概念出发, 系统辨析有限时间、固定时间、预定时间与预设时间稳定性之间的联系与区别, 进而聚焦于预设时间控制的实现途径. 以经典的比例制导、终端约束最优控制、滑模控制等为基础, 梳理其理论渊源, 重点阐述状态变换、时间尺度变换、复合反馈及周期时滞反馈等核心设计框架. 通过比较不同方法的收敛性能, 进一步分析增强或削弱反馈信号对系统性能与工程可实现性的影响. 此外, 还讨论预设时间控制中存在的数值奇异和噪声敏感等挑战, 总结多种解决方案, 并对未来在理论融合、智能控制、跨领域应用验证等方面的发展方向进行展望. 预设时间控制在航空航天、机器人、多智能体等对动态性能与时间精度要求严苛的领域中展现出重要应用潜力, 其进一步发展将推动高可靠控制系统的工程实现.

关键词 预设时间控制; 稳定性; 控制理论

引用格式 宋永端, 叶合夫. 动态系统预设时间控制的若干问题. 自动化学报, xxxx, xx(x): x-xx

DOI 10.16383/j.aas.c250756

CSTR 32138.14.j.aas.c250756

Several Issues on Prescribed-time Control of Dynamic Systems

SONG Yong-Duan¹ YE He-Fu¹

Abstract In 2017, Professor Song Yong-Duan's team published an original work on predefined-time control of high-order nonlinear systems in *Automatica*. Unlike traditional control methods, this strategy enables the system convergence time to be artificially prespecified while exhibiting excellent disturbance rejection performance. Upon its release, it quickly became a research hotspot, prompting extensive follow-up studies worldwide. This paper begins with the fundamental concepts related to system stability, systematically analyzes the connections and distinctions among finite-time, fixed-time, predefined-time, and prescribed-time stability, and then focuses on the implementation approaches of prescribed-time control. Building on classical proportional navigation, optimal control with terminal constraint, and sliding mode control, etc., this paper traces their theoretical origins and elaborates on core design frameworks such as state transformation, time-scale transformation, composite feedback, and periodic time-delay feedback. By comparing the convergence performance of different methods, it further analyzes the impact of enhancing or weakening feedback signals on system performance and engineering feasibility. Additionally, the paper discusses the challenges in prescribed-time control, such as numerical singularities and noise sensitivity, summarizes various solutions, and prospects future development directions, including theoretical integration, intelligent control, and cross-domain application validation. Prescribed-time control demonstrates significant application potential in fields with stringent requirements for dynamic performance and temporal precision, such as aerospace, robotics, and multi-agent systems. Its further development will advance the engineering implementation of high-reliability control systems.

Keywords prescribed-time control; stability; control theory

Citation Song Yong-Duan, Ye He-Fu. Several issues on prescribed-time control of dynamic systems. *Acta Automatica Sinica*, xxxx, xx(x): x-xx

收稿日期 2025-12-30 录用日期 2026-06-29

Manuscript received December 30, 2025; accepted June 29, 2026

国家重点研发计划 (2022YFB4701400, 2022YFB4701401), 重庆市自然科学基金 (CSTB2023NSCQ-LZX0026), 国家自然科学基金 (W2411061) 资助

Supported by National Key Research and Development Program of China (2022YFB4701400, 2022YFB4701401), Natural Science Foundation of Chongqing (CSTB2023NSCQ-LZX0026), and National Natural Science Foundation of China (W2411061)

本文责任编辑 秦家虎

在航空航天、国防安全、智能制造等领域, 许多关键任务对控制系统的收敛时间有着极为严格的要求, 传统渐近稳定控制等方法往往难以满足实际需要. 例如, 在弹道导弹末端拦截系统中, 从目标识别

Recommended by Associate Editor QIN Jia-Hu

1. 重庆大学自动化学院 重庆 400044

1. School of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044

到实施拦截的时间通常很短^[1],这就要求制导控制系统必须在有限时间内实现精确跟踪与拦截,以确保有效摧毁目标。

早在 20 世纪中叶,比例制导理论已在导弹拦截系统中开始初步应用。1943 年,美国物理学家袁家骝发明比例制导方法^[2-3];随后在 1965 年,哈佛大学 Ho 等^[4]首次从数学上证明比例制导在特定条件下的最优性,为该领域奠定理论基础。几乎同时,以色列科学家 Sidar 基于比例制导思想提出一种闭环最优控制律,并在文献^[5]中首次明确将“预设时间(prescribed-time)调节”作为控制目标。瑞典著名控制理论学家 Åström^[6]以历史亲历者的视角在回顾自动控制发展史时指出,以比例制导为代表的国防研究项目对其个人学术发展产生重要影响,相关工作直接激发 Åström 对控制理论的初始研究兴趣。

在上述理论与应用工作的推动下,比例制导与最优控制迅速成为航空航天与自动控制领域的研究热点。1991 年海湾战争中,“爱国者”导弹成功拦截“飞毛腿”导弹,成为历史上首次实战中成功拦截弹道导弹的案例^[7]。然而,后续研究表明,“爱国者”系统的拦截成功率仅为 10% ~ 25%^[8]。究其原因,比例制导在设计过程中仅基于线性化模型,未充分考虑系统非线性特性与外部扰动的影响,这严重限制了其在实际复杂环境中的性能^[9]。这引出一个长期悬而未决的关键问题:当系统本质为非线性的,又必须在严格预设时间内完成精确控制时,应如何设计控制器?

非线性系统预设时间控制(prescribed-time control)长期存在理论实现难题,2017 年迎来关键性突破。重庆大学 Song 等^[10]创新性提出基于状态变换的预设时间控制方法,首次完成非线性系统预设时间镇定控制,并阐释时变反馈抑制非消失扰动的独有特性。这一突破标志着预设时间控制理论在非线性系统领域的正式建立,为后续研究开辟新的方向。该里程碑式成果发表后,迅速引起国际控制领域的广泛关注,并进一步催生时间尺度变换、复合反馈设计、周期时滞反馈设计等一系列重要研究分支,吸引海内外众多学者开展持续深入研究,也进一步确立重庆大学在预设时间控制领域的重要国际影响力。

状态变换方法的核心思想,在于提炼比例制导律与终端约束最优控制律中的共同技术特征:通过引入一个在预设时间区间内单调递增的时变函数,并将其与原系统状态以乘积形式相结合,构造新的状态变量。随后,通过严格证明该新状态变量的有界性,进一步推导原系统状态的预设时间收敛性,从而在理论上保证系统能够在给定时间内实现稳

定控制。目前,该方法已成功应用于多输入多输出系统^[11-12]、大规模互联系统^[13]、多智能体系统^[14]等领域。

预设时间控制方法可从不同角度进行分类,例如依据时变增益的构造方式^[15]、Lyapunov 分析框架的选择^[16]、控制器的实现形式^[17]等进行划分,不同分类方式所强调的技术内涵和研究重点亦有所不同。本文主要从反馈信号利用方式的角度进行梳理,以区分几类虽设计思想不同但均具有重要影响的代表性技术路径。除经典的基于状态变换的设计方法外,学界还相继发展时间尺度变换、复合反馈以及周期时滞反馈等预设时间控制方法。

时间尺度变换方法最初由 Kan 等^[18]引入,用于解决线性系统的预设时间控制问题,后经纽约大学 Krishnamurthy 等^[19-21]推广至严格反馈非线性系统。该方法在理论分析上具有显著优势:通过引入时间尺度变换,可将原非线性系统的预设时间控制问题转换为新系统的传统渐近稳定设计问题,从而沿用经典的 Lyapunov 理论分析框架(例如 Barbalat 引理、LaSalle 不变集原理^[22-23]等)。南佛罗里达大学 Tran 等^[24]进一步将该方法理论化,并应用于一类受扰动态系统的预设时间输出反馈控制。目前,时间尺度变换方法已获得广泛认可与应用。例如, Liu 等^[25]和 Wang 等^[26-27]在此框架下对一类预设时间控制器进行综合分析; Yilmaz 等^[28]则基于该方法解决一类偏微分方程的极值搜索问题。

复合反馈方法是一种将时变反馈机制与分数幂反馈相结合的控制设计策略^[29-33]。其核心思想在于,通过时变增益实现预设时间收敛的特性,同时借助分数幂反馈进一步增强系统在接近平衡点时的收敛性能。该方法的重要意义在于,它在仅依赖分数幂反馈的有限时间控制(finite-time control)与早期仅使用时变反馈的预设时间控制之间建立起桥梁,不仅拓展了设计思路,也有效克服了因时变增益无界增长而引起的数值奇异问题。具体而言,时变部分通常在暂态过程的前期和中期提供较强的驱动作用,促使系统状态快速进入收敛阶段;分数幂部分则在状态接近平衡点时发挥主导作用,确保系统在时变增益趋于无穷大前实现精确稳定。近年来,该方法已在刚性航天器系统^[34]、主动减震系统^[35]以及隧道二极管电路系统^[36]等多种实际系统中得到验证,显示出良好的工程适用性。

周期时滞反馈方法由哈尔滨工业大学 Zhou 等^[37]和 Ding 等^[38]率先提出,可用于解决预设时间控制中因时变增益无界增长所导致的数值奇异问题。该方法的核心在于引入具有周期特性的时变增益及时滞反馈信号,通过二者的结合构造控制律,使系统

在保持预设时间收敛性能的同时, 避免增益趋于无穷大, 从而显著提升控制算法的数值可实现性与实际执行稳定性. 目前, 该方法已在电机控制^[39]、直升机和波音 747 飞控系统^[40] 等实际系统中展现出良好的应用潜力.

此外, 基于标准状态反馈信号 $\mathbf{x}$, 通过合理引入时变反馈并精心设计参数, 同样能够实现预设时间稳定. 例如, 针对输入时滞系统、随机系统、自适应控制、安全控制等不同场景, 已分别形成有效的预设时间控制策略: Espitia 等^[41] 在输入时滞系统的预设时间控制方面做出重要探索; Li 等^[42-44] 则在随机系统的预设时间控制问题上取得关键进展; Hua 等^[45] 和 Ning 等^[46] 提出具有自适应机制的预设时间控制方案; Abel 等^[47] 提出基于二次规划反步法的预设时间安全控制策略. 这类方法虽直接利用状态信号构建控制器, 但通过时变项的巧妙融合与参数的精细调节, 同样在理论上保证系统状态在预先设定的时间内收敛至平衡点, 进一步丰富预设时间控制的设计体系.

总体而言, 预设时间控制通过引入时变增益机制, 使控制资源得到更加高效的分配: 在误差较大时采用较低增益以避免控制输入过度集中, 而在误差较小时提高增益以提升收敛精度与响应能力. 与固定增益策略相比, 该机制能够更充分地利用控制能力. 然而, 这种性能提升并非无代价, 其本质在于引入随时间演化的增益结构. 该结构在闭环系统中经微分后会重新进入系统动力学, 从而形成一种内生扰动. 因此, 设计过程中必须在“增强控制能力”与“抑制由增益演化引入的扰动”之间取得平衡, 这构成预设时间控制设计的核心挑战.

截至目前, 预设时间控制算法已在多种实际系统的仿真验证中得到应用, 例如: 超高声速飞行器的加速控制^[48-49]、磁悬浮系统的位置控制^[50]、多臂—手机机器人协调控制^[51-52]、双旋翼直升机的约束控制^[53]、欠驱动自主水面舰艇的抗扰控制^[54]、四轮移动机器人的稳定控制^[55]、卫星星群的姿态合围控制^[56]、以及航天器姿态控制^[57]、交会控制^[16, 58] 等; 同时, 该算法也在多种实际物理系统中进行实验验证, 例如: 3 连杆欧拉—拉格朗日系统的关节角度控制^[59]、7 自由度机械臂的跟踪控制^[12, 60]、电池电量估计^[61]、地面无人小车和无人机编队控制^[62] 等.

本文组织安排如图 1 所示:

1 有限时间稳定性问题

在控制理论的研究中, 正确定义并区分各种稳

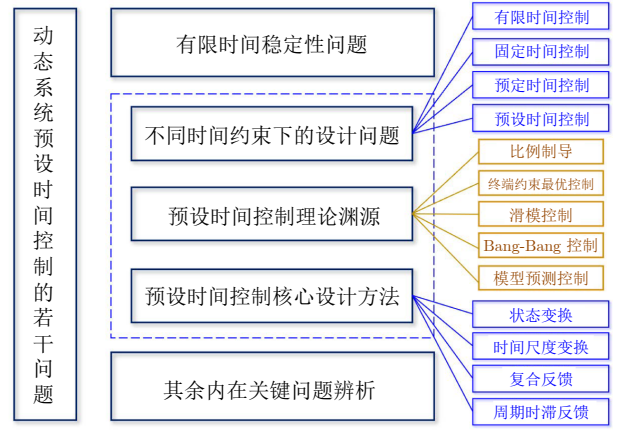


图 1 本文组织结构

Fig.1 Organization of this paper

定性概念至关重要. 不同的定义界定系统在平衡点附近行为的不同定性或定量性质, 是后续分析、比较和应用相关理论的基础. 本节将基于以下非自治系统阐述常见的稳定性定义:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 关于 t 分段连续, 且关于 $\mathbf{x}$ 局部 Lipschitz 连续, $\mathcal{D} \in \mathbf{R}^n$ 是包含原点 $\mathbf{x} = 0$ 的某个区域. 如果 $\mathbf{f}(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$, 那么, 原点 $\mathbf{x} = 0$ 是系统 (1) 的平衡点.

注 1. 在研究某个解的稳定性时, 可以通过某个变量变换, 将该解“平移到原点”, 从而将“解的稳定性问题”转化为“平衡点的稳定性问题”.

定义 1. 考虑系统 (1), 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ 满足

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (2)$$

那么称系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是稳定的. 进一步地, 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) > 0$ (和 t_0 无关) 满足式 (2), 那么称系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致稳定的. 更进一步地, 如果 $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \delta(\epsilon) = \infty$, 且存在 $\delta(\epsilon) > 0$ 满足式 (2), 那么称系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是全局一致稳定的.

定义 2. 考虑系统 (1), 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0, \forall \mathbf{x}(t_0) \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

那么称系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是吸引的.

定义 3. 考虑系统 (1), 如果其平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 既是稳定的又是吸引的, 那么称它是渐近稳定的. 进一步地, 如果系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 既是一致稳定的又是吸引的, 那么称它是一致渐近稳定的. 更进一步地, 如果系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 既是全局一致稳定的又是吸引的, 那么称它是全局一致渐近

稳定的.

定义 4. 考虑系统 (1) 具有外部输入时的一般形式如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{f}: [0, \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 关于 t 分段连续, 关于 $\mathbf{x}$ 局部 Lipschitz 连续, 且 $\mathbf{f}(t, 0, 0) = 0$. 如果存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, 使得系统解对于任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和任意外部有界输入 $\mathbf{d}(t)$ 满足¹:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\|\mathbf{d}(\tau)\|), \quad \forall t \geq 0 \quad (5)$$

则称该系统具有输入到状态稳定性.

从以上定义可以看出, 输入到状态稳定性是借助比较函数 (比如: $\mathcal{K}_\infty$ 类函数和 $\mathcal{KL}$ 类函数)^[63] 来刻画的. 事实上, 基于比较函数, 也可以对系统 (1) 的一致稳定性、一致渐近稳定性及全局一致渐近稳定性给出等价的、更为清晰的定义.

定义 5. 考虑系统 (1), 如果存在 $c > 0$ (和 t_0 无关), 以及函数 $\alpha \in \mathcal{K}$, 使得式 (6) 对于任意 $t \geq t_0 \geq 0$ 成立

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha(\|\mathbf{x}(t_0)\|), \quad \forall \|\mathbf{x}(t_0)\| < c \quad (6)$$

那么其平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致稳定的. 进一步地, 如果存在 $c > 0$, 以及函数 $\beta \in \mathcal{KL}$, 使得式 (7) 对于任意 $t \geq t_0 \geq 0$ 成立

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall \|\mathbf{x}(t_0)\| < c \quad (7)$$

那么系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致渐近稳定的. 更进一步地, 如果 $c = \infty$, 以及存在 $\mathcal{KL}$ 类函数 β , 使得式 (7) 成立, 那么系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是全局一致渐近稳定的.

注 2. 对比定义 3 与定义 5 不难发现, 采用 $\mathcal{KL}$ 类函数描述系统稳定性具有显著优势: 1) 它以精确的数学表述消除“一致”、“渐近”等文字可能带来的歧义性; 2) 它为量化分析提供便利, 不同系统的收敛性能可直接通过比较其 $\mathcal{KL}$ 函数进行评估.

注 3. 对比定义 4 与定义 5 不难发现, 当外部有界输入 $\mathbf{d}(t) = 0$ 时, 输入到状态稳定的定义退化为全局一致渐近稳定. 换言之, 一个系统是输入到状态稳定的, 则其无激励 ($\mathbf{d}(t) \equiv 0$) 时的平衡点必然是全局一致渐近稳定的. 在实际系统中, 干扰无处不在. 若系统仅具备渐近稳定性, 则只能保证其在无干扰情形下收敛至原点; 一旦存在持续非零的有界干扰, 状态可能无法趋于原点, 甚至在干扰较大时出现发散. 渐近稳定性理论本身无法给出此类情况下状态的最终行为. 相反, 若系统是输入到状态稳定的, 则只要干扰 $\mathbf{d}$ 有界, 状态 $\mathbf{x}$ 必然有界, 且

其边界可由干扰的幅值所控制. 进一步地, 通过抑制干扰幅值, 可相应降低状态的稳态边界, 从而为系统性能提供明确的鲁棒性保障. 因此, 输入到状态稳定是现代控制理论, 尤其是非线性控制和鲁棒控制中, 一个远比渐近稳定更强大、更实用的概念. 一个仅具备渐近稳定性的系统在实际干扰下可能表现不佳, 而具备输入到状态稳定特性的系统则从结构上保证其在扰动环境中的良好性能.

定义 6. 考虑系统 (4), 如果其平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ 使得

$$\mathbf{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq T(\mathbf{x}(t_0)) \quad (8)$$

那么称该平衡点是有限时间稳定²的. 进一步地, 如果系统 (4) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ 使得式 (8) 成立, 那么称该平衡点是有限时间一致稳定的. 更进一步地, 如果系统 (1) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是全局一致稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ 使得式 (8) 成立, 那么称该平衡点是有限时间全局一致稳定的.

定义 7. 考虑系统 (4), 如果其平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的有界函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ (其上界记为“ $T_{\max}$ ”) 使得

$$\mathbf{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq T_{\max} > 0 \quad (9)$$

那么称该平衡点是固定时间稳定的. 进一步地, 如果系统 (4) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的有界函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ 使得式 (9) 成立, 那么称该平衡点是固定时间一致稳定的. 更进一步地, 如果系统 (4) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是全局一致稳定的, 且存在依赖于 $\mathbf{x}(t_0)$ 的有界函数 $T(\mathbf{x}(t_0))$ 使得式 (9) 成立, 那么称该平衡点是固定时间全局一致稳定的.

定义 8. 考虑系统 (4), 如果其平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是稳定的, 且存在可预先设定的常数 t_f 使得

$$\mathbf{x}(t) = 0, \quad \forall t \geq t_f > 0 \quad (10)$$

那么称该平衡点是预设 (或预定) 时间稳定的. 进一步地, 如果系统 (4) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是一致稳定的, 且存在可预先设定的常数 t_f 使得式 (10) 成立, 那么称该平衡点是预设 (或预定) 时间一致稳定的. 更进一步地, 如果系统 (4) 的平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 是全局一致稳定的, 且存在可预先设定的常数 t_f 使得式 (10) 成立, 那么称该平衡点是预设 (或预定) 时间全

¹ 符号 $\|\mathbf{d}(\tau)\|$ 定义为 $\|\mathbf{d}(\tau)\| = \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\mathbf{d}(\tau)|$.

² 在有限时间控制相关文献中, “有限时间稳定”通常默认平衡点不仅是稳定的而且是吸引的, 即会在有限时间内收敛到零. 对于平衡点非吸引但系统状态可在有限时间内进入并保持于原点某邻域内的情况, 则多被称为“实用有限时间稳定”. 如注 2 所述, 相较于数学描述, 纯文字表述易引发歧义, 因此在阅读文献时需结合具体语境仔细辨析.

局一致稳定的.

注 4. 尽管“预设时间稳定”和“预定时间稳定”这两个术语常用于描述具有相同收敛特性的闭环系统, 但其历史渊源不同: 前者特指基于非自治 (时变) 反馈的控制设计, 而后者则特指基于自治 (时不变) 反馈的控制设计. 这种设计差异直接导致收敛时间估计精度的不同: 基于自治反馈的设计通常只能给出较为保守的收敛时间上界, 而基于非自治反馈的设计则能提供保守性较低的估计, 甚至在特定条件下可实现收敛时间的精确估计.

为避免文字描述可能带来的定义模糊与理解歧义, 下面将采用比较函数对预设时间控制中的若干关键概念进行严格的数学定义.

定义 9. 若存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 、单调函数 $\mu: [0, t_f) \rightarrow [0, \infty)$, 以及可预先设定的常数 t_f , 使得系统 (4) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 满足

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(|\mathbf{x}(t_0)|, \mu(t - t_0)), \quad \forall t \in [0, t_f)$$

那么该系统具有预设时间全局一致稳定性. 进一步地, 若存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 、 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 和单调函数 $\mu: [0, t_f) \rightarrow [0, \infty)$, 使得系统 (4) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 满足

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(|\mathbf{x}(t_0)|, \mu(t - t_0)) + \gamma(\|\mathbf{d}(\tau)\|)$$

那么该系统具有预设时间输入到状态稳定性. 更进一步地, 若存在函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 、 $\beta_f \in \mathcal{KL}$ 、 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 和单调函数 $\mu: [0, t_f) \rightarrow [0, \infty)$, 使得系统 (4) 的解 $\mathbf{x}(t)$ 满足

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta_f\left(\beta(|\mathbf{x}(t_0)|, \mu(t - t_0)) + \gamma(\|\mathbf{d}(\tau)\|), \mu(t - t_0)\right)$$

那么该系统不仅具有预设时间输入到状态稳定性, 还能在预设时间 t_f 内收敛至零.

2 不同时间约束下的设计问题

为直观展示有限时间稳定、固定时间稳定、预定时间稳定与预设时间稳定³系统之间的区别与联系, 本节以最简单的标量系统为例, 介绍相应的控制器设计方法, 并分析其收敛时间的特性. 考虑如下标量系统:

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (11)$$

其中, $x \in \mathbf{R}$ 是系统状态; $u \in \mathbf{R}$ 是控制输入.

2.1 有限时间控制

为实现系统的有限时间稳定, 可采用分数幂反馈设计如下控制器^[64-65]:

³ 为描述简洁, 后文中提到的“稳定”均指“全局一致渐近稳定”.

$$u_{\text{finite}} = -x^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

由此可得闭环系统: $\dot{x} = -x^{1/3}$, 其解析解为

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \left(|x_0|^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}t \right)^{\frac{3}{2}}, & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases} \quad (13)$$

其中, $x_0 = x(0)$; 收敛时间 $T(x_0) = \frac{3}{2}|x_0|^{2/3}$. 显然, 系统状态将在与初始条件相关的有限时间内收敛至原点.

2.2 固定时间控制 (fixed-time control)

为消除收敛时间对系统初始状态的依赖性, 可采用基于分数幂与高次幂的复合反馈. 针对系统 (11) 可设计如下固定时间控制器^[66-67]:

$$u_{\text{fixed}} = -k\text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{2}} - \text{sign}(x)|x|^{\frac{3}{2}}$$

其中, $k > 0$ 为控制设计参数, 由此可得闭环系统: $\dot{x} = -k\text{sign}(x)|x|^{1/2} - \text{sign}(x)|x|^{3/2}$, 其解析解为

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \left[\sqrt{k} \tan \left(\arctan \left(\frac{|x_0|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}} \right) - \frac{\sqrt{k}}{2}t \right) \right]^2, & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases}$$

收敛时间为:

$$T(x_0) = \frac{2}{\sqrt{k}} \arctan \left(\frac{|x_0|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{k}} \right)$$

尽管 $T(x_0)$ 形式上依赖于初始状态 x_0 , 但由于 $\arctan(\cdot)$ 的值域有界, 即其绝对值不超过 $\pi/2$, 可推得收敛时间上界为:

$$T(x_0) \leq T_{\max} = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

显然, 该上界 $T_{\max}$ 与初始状态 x_0 无关, 仅由控制设计参数 k 决定.

2.3 预定时间控制

为同时消除收敛时间对系统初始状态和设计参数的依赖性, 可采用基于另一种时不变复合反馈的控制策略. 为此, 针对系统 (11) 可设计如下预定时间控制器^[68]:

$$u_{\text{predefined}} = -\frac{1}{t_f} \text{sign}(x)e^{|x|} \quad (14)$$

由此可得闭环系统: $\dot{x} = -1/t_f \text{sign}(x)e^{|x|}$, 其解析解为

$$x(t) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(x_0) \ln\left(\frac{t}{t_f} + e^{-|x_0|}\right), & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases}$$

收敛时间为:

$$T(x_0) = t_f \left(1 - e^{-|x_0|}\right)$$

尽管 $T(x_0)$ 形式上依赖于初始状态 x_0 , 但注意到 $e^{-|x_0|} \in (0, 1]$, 因此可得收敛时间上界为:

$$T(x_0) \leq T_{\max} = t_f$$

显然, 该上界 $T_{\max}$ 与初始状态 x_0 无关, 且已在控制器设计阶段通过参数 t_f 直接设定, 从而实现预定时间稳定.

注 5. 为分析有限时间、固定时间与预定时间控制的基本原理, 本节对它们所采用的反馈信号及常用反馈信号 x 进行比较, 如图 2 所示.

根据图 2 可观察到, 在有限时间控制中, 信号 $|x|^{1/3}$ 在 $|x| \in [0, 1]$ 时大于或等于标准反馈信号 x , 而在 $|x| \in (1, \infty)$ 时则小于或等于标准反馈信号 x ; 在固定时间与预定时间控制中, 所涉及的信号如 $|x|^{1/2} + |x|^{3/2}$ 和 $e^{|x|}$ 在 $x \in [0, \infty)$ 范围内始终大于或等于标准反馈信号 x . 上述现象表明, 有限时间控制在系统状态 $|x| \geq 1$ 时削弱对反馈信号 x 的信息利用, 而在 $|x| \leq 1$ 时则增强对该信号的使用强度; 相比之下, 固定时间控制与预定时间控制在所有状态下均强化对反馈信号 x 的信息利用程度.

增强反馈信号的核心优势在于能显著提升系统的收敛性能与控制精度. 在系统状态接近平衡点时, 反馈增益会被急剧放大. 这种机制使得系统在平衡点附近受到极强的“吸附力”, 从而摆脱控制系统理论上需要无穷时间才能收敛的局限, 实现在有限时间内精确稳定. 更进一步, 如固定时间与预定时间

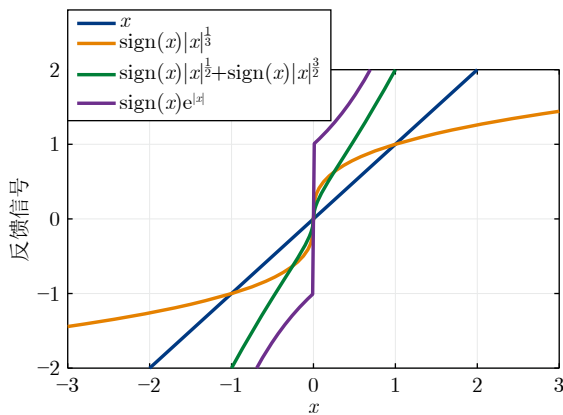


图 2 几种反馈信号示意图

Fig. 2 Illustration of different feedback signals

控制策略, 通过精心设计非线性反馈函数, 能确保收敛时间拥有一个与初始状态无关的上界, 甚至可由设计者直接设定, 这为对收敛时间有严格要求的应用场景提供强大的理论保证与卓越的动态性能. 然而, 增强反馈信号也伴随着显著的风险. 最主要的问题在于其可能诱发极大的控制输入. 另外, 在平衡点附近, 理论上控制增益会趋向于无穷大, 导致控制信号抖振. 在实际系统中, 这表现为执行器需要输出幅值极大或变化极快的控制力, 极易达到物理饱和极限并引发剧烈磨损. 此外, 极高的增益会使控制器对测量噪声与模型不确定性异常敏感, 微小的传感器误差经过非线性放大后可能驱动执行器产生高频无效颤振, 不仅浪费能量, 还可能激发未建模的高频动态, 从而破坏系统的实际稳定性与鲁棒性, 使得这种理论上高性能的控制律在工程实现上面临严峻考验.

削弱反馈信号的核心价值在于增强控制系统的工程可实现性. 当系统状态远离平衡点时 (即误差较大), 通过采用如 $|x|^{1/3}$ 这类函数对反馈信号进行“软化”处理, 可以主动限制控制输入的幅值. 这种策略能有效避免在大误差条件下产生过大、不切实际的控制力, 防止执行器饱和, 并使控制动作更加平滑. 这对于处理模型不确定性、参数摄动和外部干扰尤为有益, 因为它避免在系统信息不完整的区域进行“过度反应”, 从而提高系统在非理想工况下的适应能力和整体稳定性, 改善暂态过程的平顺性. 然而, 削弱反馈信号策略牺牲了系统的收敛速度. 在状态值较大的区域, 主动降低反馈增益意味着施加于系统的恢复力变弱, 导致状态从初始位置被“拉回”平衡点的过程变得缓慢. 这可能会显著延长系统的调节时间, 使其动态响应显得“迟钝”. 在存在持续性强干扰的情况下, 过弱的反馈可能不足以有效抵消干扰的影响, 从而导致显著的稳态误差, 甚至无法保证收敛.

2.4 预设时间控制

为消除收敛时间上界估计的保守性, 基于时变反馈, 针对系统 (11) 可设计如下预设时间控制器^[10]:

$$u_{\text{prescribed}} = \begin{cases} -\frac{k}{t_f - t}x, & t \in [0, t_f) \\ 0 \cdot x, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (15)$$

在该控制器作用下, 闭环系统的解析解为

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f}\right)^k, & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (16)$$

另外, 可通过 $u_{\text{prescribed}}$ 的开环表达式验证控制

输入

$$u_{\text{prescribed}} = -\frac{k}{t_f} x_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f} \right)^{k-1}, \quad t \in [0, t_f]$$

在 $k > 1$ 时是收敛的, 因此可保证系统 (11) 预设时间稳定. 相反, 若 $0 < k < 1$, 则控制输入 $u_{\text{prescribed}}$ 发散, 在实际控制中应当避免. 特别地, 当 $k = 1$ 时, 控制器 (15) 退化为:

$$u_{\text{prescribed}} = \begin{cases} -\frac{x_0}{t_f}, & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (17)$$

此时, 控制输入在区间 $[0, t_f)$ 为恒定值, 且在区间 $[t_f, \infty)$ 始终保持为 0, 该情形仅在理论分析中具有特殊意义, 在实际工程中难以直接应用.

从上述分析可以看出, 控制增益 k 的选择对于判定预设时间系统的稳定性具有决定性作用. 最后需要指出的是, 针对式 (11) 所表示的特殊系统, 控制器 (15) 可严格保证在指定时刻 $t = t_f$ 处精确收敛到 0.

注 6. 为展示有限时间控制器和预设时间控制器之间的联系, 将式 (13) 中的解 $x(t)$ 以及 $T(x_0) = \frac{3}{2}|x_0|^{2/3}$ 代入控制器 (12) 中, 有

$$u_{\text{finite}} = -\text{sign}(x)|x|^{\frac{1}{3}} = -\text{sign}(x)|x| \cdot |x|^{-\frac{2}{3}} = \begin{cases} -x \cdot \left| \left(|x_0|^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}t \right)^{\frac{3}{2}} \right|^{-\frac{2}{3}}, & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases} = \begin{cases} -x \cdot \left(\frac{2}{3}T(x_0) - \frac{2}{3}t \right)^{-1}, & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{3/2}{T(x_0) - t}x, & 0 \leq t \leq T(x_0) \\ 0, & t > T(x_0) \end{cases}$$

需要说明的是, 若取 $k = 3/2$, 则预设时间控制器 (15) 与有限时间控制器 (12) 具有等价性. 事实上, 当 $t \rightarrow T(x_0)$ 时, 有限时间控制器的控制增益 (此处, 控制增益指控制输入 u 与标准反馈信号 x 的比值) 将趋于无穷大. 这一特性普遍存在于所有有限时间控制器中, 包括固定时间控制器、预定时间控制器与预设时间控制器.

虽然第 1 节已对各种稳定性概念进行明确定义, 为便于直观理解, 本节借助图 3 进一步展示重点讨论的几种稳定性之间的逻辑关系. 值得注意的是, 有限时间控制与预设时间控制能够针对特定系

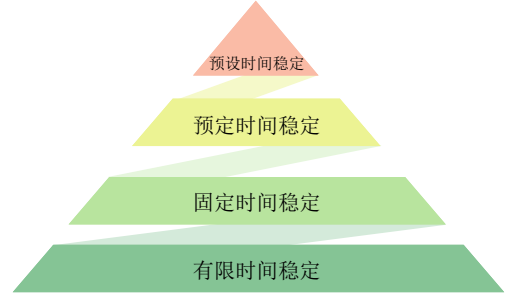


图 3 有限时间、固定时间、预定时间、预设时间稳定的关系

Fig.3 Relationships among finite-time, fixed-time, predefined-time, and prescribed-time stability

统获得精确的收敛时间 (尽管对于一般类型的非线性不确定系统, 通常只能得到收敛时间的估计值), 而固定时间控制与预定时间控制则仅能给出收敛时间的保守估计. 因此, 从性能角度而言, 预设时间稳定性是最为理想的一种形式, 它涵盖预定时间稳定、固定时间稳定以及有限时间稳定; 固定时间稳定则必然意味着有限时间稳定, 反之则不一定成立.

3 预设时间控制理论渊源

预设时间控制虽然近年来才受到广泛关注, 但其思想根源可追溯到导弹制导与最优控制理论. 早期研究中的比例制导, 具有终端约束的最优控制、滑模控制、Bang-Bang 控制等方法虽然并非直接以“预设时间收敛”为目标, 但其通过引入时变增益、终端约束或不连续控制律来应对严格时间约束的设计思想, 与预设时间控制理论一脉相承. 这些经典方法不仅在工程实践中展示了如何确保系统在有限时间内达成任务目标, 其在接近终端时刻时增益趋于无穷的物理特性, 也从侧面揭示了现代预设时间控制的设计初衷与内在演化路径.

3.1 比例制导

比例制导广泛应用于导弹和无人飞行器制导系统, 其核心思想是通过生成与视线角变化率成比例的指令加速度, 使得导弹能够有效拦截静止或机动目标. 该方法具有实现简单、鲁棒性较好等优点, 在战术导弹和航空制导领域占有重要地位. 在工业界与学术界, 对比例导航有效性的分析通常基于二维拦截模型进行.

在如图 4 所示的导弹-静止目标追击场景中, R_{TM} 表示导弹与目标的相对位置向量, V_c 为导弹接近目标的速度, 视线 (即导弹指向目标的连线) 与地面的夹角 (视线角 λ) 为:

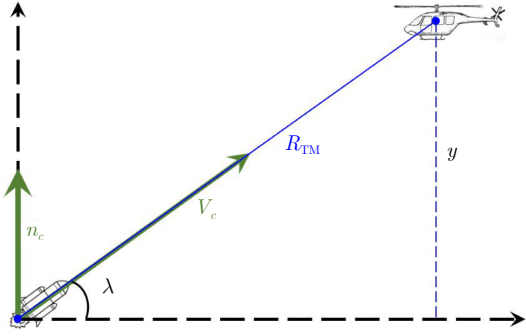


图 4 导弹-静止目标追击模型

Fig. 4 Missile homing model for stationary targets

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{R_{TM_y}}{R_{TM_x}} \right) \quad (18)$$

其中, R_{TM_x} 与 R_{TM_y} 分别是 R_{TM} 在水平坐标轴与垂直坐标轴上的分量. 利用式 (18) 可得比例制导律为^[9]:

$$n_c = N' V_c \dot{\lambda} \quad (19)$$

其中, N' 为比例制导律的控制增益.

对比例制导律有效性的分析通常建立在线性化模型基础上. 首先假设导弹与目标的初始距离足够大, 使得视线角 λ 较小, 可利用小角度近似改写为:

$$\lambda \approx \sin \lambda = \frac{y}{R_{TM}} \quad (20)$$

其中, y 表示导弹与目标在垂直于初始视线方向上的相对位移. 由于初始 λ 很小, 且制导过程中视线角保持较小, 该近似可在整个追击过程中使用. 进一步假设导弹加速度方向与固定参考线 (如垂直坐标轴) 平行, 则加速度分量可近似为:

$$\ddot{y} = -n_c \quad (21)$$

同时, 导弹与目标之间的距离随时间呈线性变化:

$$R_{TM} = V_c(t_f - t) \quad (22)$$

其中, t_f 为导弹的总飞行时间 (time of flight). 代入式 (19) ~ (21) 可得:

$$\ddot{y} = -N' V_c \dot{\lambda} \quad (23)$$

对其积分可得:

$$\dot{y} = -N' V_c \lambda + C \quad (24)$$

其中, C 为积分常数. 代入式 (20)、(22) ~ (24) 可得

$$\dot{y} = -\frac{N' y}{t_f - t} + C \quad (25)$$

求解该常微分方程可得:

$$y(t) = \begin{cases} y(0) \left(\frac{t_f - t}{t_f} \right)^{N'} + \frac{C}{N' - 1} (t_f - t) - \frac{C t_f}{N' - 1} \left(\frac{t_f - t}{t_f} \right)^{N'}, & N' \neq 1 \\ y(0) \frac{t_f - t}{t_f} + C(t_f - t) \ln \left(\frac{t_f}{t_f - t} \right), & N' = 1 \end{cases} \quad (26)$$

由式 (22) 和 (26) 可得, $\lim_{t \rightarrow t_f} R_{TM} = \lim_{t \rightarrow t_f} y(t) = 0$, 这意味着导弹击中目标.

进一步分析式 (22) 和 (25) 可发现, 在比例制导中, 导弹与目标距离 R_{TM} 随时间线性减少到 0, 这意味着制导过程本质上是一个关于剩余时间 $t_f - t$ 的时变增益系统, 目标是让位移 $y(t)$ 也在 $t \rightarrow t_f$ 时趋于零. 根据式 (19) 和 (20) 可知,

$$n_c = N' V_c \dot{\lambda} = N' V_c \left(\frac{\dot{y}}{R_{TM}} + \frac{V_c y}{R_{TM}^2} \right) \quad (27)$$

由于 $\lim_{t \rightarrow t_f} R_{TM} = 0$, 制导指令 n_c 中的等效增益会随着剩余时间 $(t_f - t)$ 趋近于零而趋于无穷大.

3.2 终端约束最优控制

最优控制在现代控制理论中占据着核心地位, 它不仅提供一种系统化的设计方法, 还能在满足动态约束的同时实现特定的性能优化目标. 其中, 带有终端状态约束的最优控制问题尤为重要, 它在航天器交会对接、机器人路径规划等众多工程领域具有广泛的应用价值^[69-70]. 这类问题要求在指定终端时刻精确到达预定状态, 同时最小化控制过程中的能量或代价. 为了解具有终端约束最优控制的核心思想, 考虑一个简单的一阶动态系统:

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (28)$$

边界条件为:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = 0 \quad (29)$$

其中, t_f 为收敛时间, 在该问题中通常被称为终端时间. 控制设计的目标是找到输出信号 $u(t)$, 使系统从初始状态 x_0 到达终端状态 $x(t_f) = 0$, 并最小化如下能量型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \min_u \int_0^{t_f} u^2 dt$$

在最优控制理论中, Hamilton 函数是描述系统动态与性能指标的关键工具. 对于本例, 可定义^[71]:

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \varrho u$$

其中, $\varrho(t)$ 称为伴随变量. 根据 Pontryagin 最小值

原理, 如果 $u(t)$ 是最优控制律, 那么 Hamilton 函数对的偏导数应等于零 (无约束时). 通过计算对 u 的偏导数

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \varrho = 0$$

得到候选最优控制为 $u^* = -\varrho$. 用于检验上面得到的 u^* 是否确实使 Hamilton 函数取极小值 (而非极大值). 计算二阶导数:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0$$

说明 Hamilton 函数关于 u 是凸的, 因此 u^* 确实给出极小值. 另外, 伴随变量 $\varrho(t)$ 的变化规律由如下伴随方程决定:

$$\dot{\varrho} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

本例中 H 不含 x , 所以 $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, 从而 $\dot{\varrho} = 0$. 因此, ϱ 恒为一个常数, 记为 $\varrho = c$. 代入 $u^* = -c$ 到状态方程: $\dot{x} = -c$. 对此积分可得状态轨迹:

$$x(t) = x_0 - ct$$

利用终端条件 $x(t_f) = 0$ 可解得 $c = x_0/t_f$. 因此, 最优控制为:

$$u(t) = -\frac{x_0}{t_f} \quad (30)$$

在该控制下, 系统状态轨迹为:

$$x(t) = x_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f} \right) \quad (31)$$

在最优控制理论的传统推导中, 通常得到式 (30) 所示的开环解便告结束, 很少进一步写出其闭环等价形式. 这使得许多研究者忽略最优闭环控制律中可能出现的无界增益现象. 实际上, 由式 (31) 可将开环控制律等价地改写为状态反馈形式:

$$u(t) = -\frac{1}{t_f} \frac{x(t)t_f}{t_f - t} = -\frac{x(t)}{t_f - t} \quad (32)$$

该闭环控制律具有时变增益 $k(t) = 1/(t_f - t)$, 该增益随着时间 t 趋近于终端时刻 t_f 而无界增长.

3.3 滑模控制

滑模控制是鲁棒控制领域的代表性方法之一^[72], 自 20 世纪中叶提出以来, 已在非线性系统控制、电机驱动、机器人操控、飞行器制导等众多工程领域得到广泛应用. 其核心思想是设计一个不连续的控制律, 迫使系统状态在有限时间内到达预先设计的滑模面, 并沿该面滑动至平衡点. 由于在滑动模式下系统动态对满足匹配条件的参数摄动和外部扰动具有完全的不变性, 滑模控制展现出卓越的鲁棒性,

成为处理不确定系统控制问题的有力工具. 考虑一个简单的受扰一阶动态系统:

$$\dot{x}(t) = u(t) + d(t) \quad (33)$$

其中, $x \in \mathbf{R}$ 是系统状态, $u \in \mathbf{R}$ 是控制输入, $d \in \mathbf{R}$ 是有界扰动. 该系统的滑模控制器可设计为^[73]:

$$u_{\text{SMC}} = -k \text{sign}(x) \quad (34)$$

其中, $k > \bar{d}$, $\bar{d}$ 为扰动 d 的可利用上界信息. 在理想情况下, 有 $d \equiv 0$. 此时控制增益参数 k 的选择范围退化为 $k > 0$. 在该理想情况下, 求解常微分方程 (33) 可得

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0)(|x_0| - kt), & 0 \leq t < \frac{|x_0|}{k} \\ 0, & t \geq \frac{|x_0|}{k} \end{cases} \quad (35)$$

令 $t_f = |x_0|/k$, 有

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0)(k(t_f - t)), & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (36)$$

代入式 (36) 到符号函数 $\text{sign}(x)$ 可得: 对于任意 $t \in [0, t_f)$, $\text{sign}(x) = \text{sign}(k \text{sign}(x_0)(t_f - t)) = \text{sign}(x_0)(k(t_f - t))/|k(t_f - t)| = \text{sign}(x_0)$ 成立. 因此, 当 $k = 1$ 时, 可将滑模控制律 (34) 等价地写为:

$$u_{\text{SMC}} = \begin{cases} -\text{sign}(x_0), & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (37)$$

该结果表明: 滑模控制器在收敛阶段输出一个恒定的非零控制量, 其符号由初始状态的符号决定; 一旦系统状态到达原点, 控制器立即撤除控制输入. 从工程可实现性的角度来看, 滑模控制律采用常值增益, 控制量全程有界, 执行器只需提供有限幅值的输出即可运行, 避免预设时间控制中增益发散的问题. 值得注意的是, 将式 (37) 与第 2.4 节中预设时间控制器在 $k = 1$ 时的退化形式 (式 (17)) 进行比较, 可以发现两者在数学上具有等价性. 事实上, 利用 $\text{sign}(x_0) = x_0/|x_0|$ 以及 $|x_0| = kt_f$, 重写式 (17) 可得:

$$u_{\text{prescribed}} = \begin{cases} -\text{sign}(x_0), & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (38)$$

此即滑模控制律 (37).

3.4 Bang-Bang 控制

Bang-Bang 控制起源于 20 世纪 40 年代, 并在早期自动控制与伺服系统中得到广泛应用, 例如继

电器控制系统、恒温器以及早期飞机舵机控制等. 随后, 庞特里亚金基于极大值原理证明该类控制策略在一定条件下具有时间最优性^[74]. 对于系统 (28), Bang-Bang 控制可表示为:

$$u_{\text{bang}} = -U_{\text{max}} \text{sign}(x) \quad (39)$$

其中, U_{max} 是能施加的最大控制力. 显然, 当 $U_{\text{max}} = 1$ 时, 利用类似式 (34) ~ (37) 的分析, 可以将上述控制律等价改写为

$$u_{\text{bang}} = \begin{cases} -\text{sign}(x_0), & t \in [0, t_f) \\ 0, & t \in [t_f, \infty) \end{cases} \quad (40)$$

在该特定参数设置下, Bang-Bang 控制器与预设时间控制器 (38) 在结构与控制效果上具有等价性.

3.5 模型预测控制

模型预测控制 (model predictive control, MPC) 是一类基于在线优化的反馈控制方法, 其核心思想是在每个采样时刻利用系统模型预测未来有限时间内的状态演化, 并通过求解一个带约束的优化问题得到一段最优控制序列, 然后仅执行当前时刻的控制量, 再滚动更新优化问题. 由于 MPC 能够显式处理状态与输入约束, 并在优化中融合性能指标, 因此在工业过程控制、机器人与自动驾驶等领域得到广泛应用^[75].

对于标量积分器系统 (28), 当 MPC 的性能指标选取为时间最优形式, 即最小化到达平衡点所需时间时, 优化问题的 Hamiltonian 关于控制输入是线性的, 从而最优解必然取在控制约束的边界上. 此时, MPC 在每个预测时域内求解得到的最优控制均满足

$$u^*(t) \in \{-U_{\text{max}}, U_{\text{max}}\} \quad (41)$$

并根据状态符号发生切换, 即

$$u_{\text{MPC}} = -U_{\text{max}} \text{sign}(x)$$

因此, 该时间最优 MPC 在结构上退化为典型的 Bang-Bang 控制形式, 两者在最优控制意义下是等价的. 进一步地, 当控制约束满足 $U_{\text{max}} = 1$ 时, 此时间最优 MPC 与预设时间控制器 (38) 在结构与控制效果上具有等价性.

4 预设时间控制核心设计方法

在早期研究中, 分析通常局限于线性系统, 通过求解常微分方程获得控制器的开环解, 却较少探讨其闭环反馈形式, 也未能充分结合 Lyapunov 稳

定性理论这一强大的分析框架. 因此, 传统方法在处理非线性系统或复杂动态时存在明显局限. 现代预设时间控制理论在继承“时变增益”这一核心思想的基础上, 发展出一系列系统化的设计方法. 这些方法不仅具备闭环反馈结构, 而且能够自然地嵌入 Lyapunov 稳定性分析的框架中, 从而可有效拓展至非线性系统.

4.1 基于状态变换的预设时间控制

为阐明基于状态变换的预设时间控制的核心思想, 考虑如下标量系统:

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

定义状态变换^[10, 13, 76]

$$z = \mu(t)x$$

其中, $\mu(t) = 1/(t_f - t)$ 为随时间单调递增直至无穷的时变函数. 注意, 此类在有限时间内单调递增至无穷大的函数有很多, 此处仅考虑最简单的情形.

对新变量 z 求导, 得到其动力学方程:

$$\dot{z} = \dot{\mu}x + \mu u$$

若设计如下控制律:

$$u = -kz - \dot{\mu}\mu^{-1}x, \quad k > 0$$

则可实现对 z 的预设时间镇定, 此时 z 的闭环动态为

$$\dot{z} = -k\mu z$$

由此可得

$$z(t) = \left(\frac{t_f - t}{t_f} \right)^k z(0)$$

且 $\lim_{t \rightarrow t_f} z(t) = 0$. 进而原状态

$$x(t) = \mu^{-1}z(t)$$

表明 $x(t)$ 有界, 且满足 $\lim_{t \rightarrow t_f} x(t) = 0$. 进一步, 由于

$$\dot{\mu}\mu^{-1}x = \dot{\mu}\mu^{-2}z = z$$

该项随时间趋于零, 因此控制输入亦满足

$$\lim_{t \rightarrow t_f} u(t) = 0$$

该设计表明, 通过适当的状态变换与控制设计, 可在预设时刻 t_f 内实现系统的渐近稳定, 且控制量最终趋于零.

4.2 基于时间尺度变换的预设时间控制

时间尺度变换的思想可追溯至奇异摄动理论. 在奇异摄动理论中, 通过对快变与慢变两个时间轴进行尺度变换, 将原系统分解为不同时间尺度的子系统, 从而简化动态分析与控制器设计. 而在预设

时间控制中,则是将一个有限时间区间 $[0, t_f]$ 映射到无限时间区间 $[0, \infty)$,从而将有限时间内的收敛问题转化为无限时间上的渐近镇定问题^[18, 22].具体地,考虑如下变换

$$\tau(t) = t_f(1 - e^{-\tau}) \quad (42)$$

及其逆变换

$$\tau(t) = \ln\left(\frac{t_f}{t_f - t}\right) \quad (43)$$

该变换将 t 时间轴上的有限区间 $[0, t_f]$ 映射到 τ 时间轴上的无限区间 $[0, \infty)$,反之亦然.

基于这一变换,信号 $x(t)$ 可在 τ 时间轴上重新表述,如图 5 所示.值得注意的是,对于任意维数的信号 x ,恒等式 $x(\tau) \equiv x(t)$ 成立,因为 $x(\tau)$ 与 $x(t)$ 表示同一信号在不同时间坐标下的幅值,时间轴被拉伸或压缩,而信号的取值保持不变.通过这一映射,可将原有限时间区间上的预设时间稳定问题,转化为无限时间区间上的渐近镇定问题.针对转换后的系统设计渐近稳定控制器,即可得到使原系统在预设时间内稳定的控制律.具体设计如下:

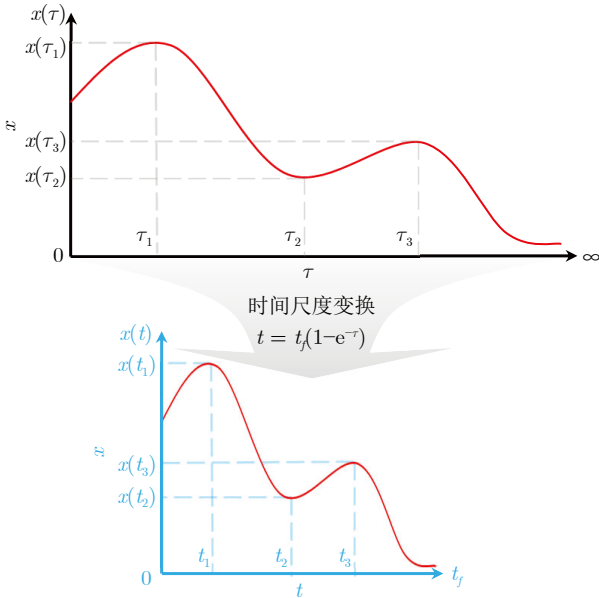


图 5 时间尺度变换示意图

Fig. 5 Schematic diagram of time-scale transformation

利用时间尺度变换 (42), 系统 $\dot{x}(t) = u(t)$ 可等价转换为:

$$\frac{dx}{d\tau} = t_f e^{-\tau} u(\tau) \quad (44)$$

若设计如下控制律:

$$u(\tau) = -\frac{ke^{\tau}}{t_f} x(\tau)$$

则闭环系统为

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -kx(\tau)$$

其解为 $x(\tau) = e^{-k\tau} x(0)$, 表明 $x(\tau)$ 在 τ 时间轴上渐近趋于零. 利用逆变换 (43) 可得 t 时间轴上的状态与控制输入:

$$x(t) = e^{-k \ln\left(\frac{t_f}{t_f - t}\right)} x(0) = \left(\frac{t_f - t}{t_f}\right)^k x(0)$$

$$u(t) = -\frac{ke^{\ln\left(\frac{t_f}{t_f - t}\right)}}{t_f} x(t) = -\frac{kx(t)}{t_f - t} = -\frac{k}{t_f} \left(\frac{t_f}{t_f - t}\right)^{1-k} x(0)$$

显然, 当且仅当 $k \geq 1$ 时控制输入有界; 特别地, 当 $k = 1$ 时, 该控制律与第 3.2 节中能量最优控制的结果一致.

4.3 基于复合反馈的预设时间控制

在时间尺度变换方法下, 设计渐近稳定控制器可确保系统在预设时间内收敛. 然而, 该预设时间控制器的时变增益在理论上趋于无界, 可能引发数值计算问题. 为解决此缺陷, 可在变换后的时间轴上设计有限时间控制器, 以替代原有的渐近稳定控制器^[30]. 该方法能保证系统输出在时变增益趋向无穷大之前收敛到零, 并在系统收敛后将时变增益切换为一个常数值, 从而在保持收敛精度的同时, 避免无界增益导致的数值困难. 具体设计过程如下:

利用时间轴变换 (42), 系统 $\dot{x}(t) = u(t)$ 可等价地转换为

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = t_f e^{-\tau} u(\tau)$$

若设计如下控制律:

$$u(\tau) = -\frac{ke^{\tau}}{t_f} x(\tau)^{\frac{1}{3}} \quad (45)$$

则闭环系统为

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -kx(\tau)^{\frac{1}{3}}$$

其解析解为

$$x(\tau) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \left(|x_0|^{\frac{2}{3}} - \frac{2k}{3} \tau \right)^{\frac{3}{2}}, & 0 \leq \tau \leq T(x_0) \\ 0, & \tau > T(x_0) \end{cases}$$

其中, $T(x_0) = 3|x_0|^2/(2k)$. 这表明 $x(\tau)$ 在 $\tau = T(x_0)$ 时收敛到零. 通过逆变换 (43) 可得, $x(t)$ 将在

$$t = t_f \left(1 - e^{-\frac{3}{2k}|x_0|^{\frac{2}{3}}} \right) < t_f$$

时刻收敛到零. 需要注意的是, 控制律 (45) 在原始时间轴 t 上的等价形式为

$$u(t) = -\frac{k}{t_f - t} x(t)^{\frac{1}{3}} \quad (46)$$

为保证系统状态严格收敛至零, 并避免时变增益趋于无穷, 可在系统收敛后、预设时间 t_f 之前, 将时变增益切换为某个常数值 (比如切换为 1). 具体切换策略如下:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{k}{t_f - t} x(t)^{\frac{1}{3}}, & 0 \leq \tau \leq t_f(1 - e^{-\frac{3}{2k}|x_0|^{\frac{2}{3}}}) \\ -kx(t)^{\frac{1}{3}}, & \tau > t_f(1 - e^{-\frac{3}{2k}|x_0|^{\frac{2}{3}}}) \end{cases}$$

综上, 针对预设时间控制器时变增益趋于无界的问题, 可通过引入有限时间收敛控制律并结合收敛后的增益切换机制, 来保证系统在预设时间内精确收敛, 同时避免时变增益趋近于无穷大所引发的数值计算困难, 从而兼顾控制性能与数值可实现性.

4.4 基于周期时滞反馈的预设时间控制

尽管第 4.3 节所介绍的复合反馈方法能够解决数值奇异问题, 但其同时会引起控制信号的抖振现象. 为克服此缺陷, 本节引入一种基于周期时滞反馈的控制器设计方法^[37, 39-40, 77]. 考虑如下标量系统:

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, 3T]$$

其中, T 为预先给定的定常参数, 与前文有限时间稳定性中依赖初始状态的收敛时间函数 $T(x_0)$ 含义不同.

控制采用 $2T$ -周期时变点延迟反馈:

$$u(t) = -\mathcal{K}_T(t)x(t-T)$$

其中, $t_f > 0$ 是预设常数, $\mathcal{K}_T$ 是 $2T$ -周期脉冲信号, 其形式定义为:

$$\mathcal{K}_T(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T \\ \frac{1}{T} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right), & T \leq t \leq 2T \\ 0, & 2T < t \leq 3T \end{cases}$$

第一阶段 ($t \in [0, T)$). 在此区间内, 控制器增益为零, 系统处于开环状态. 由于无控制输入, 系统状态将保持初始值不变. 此阶段的意义在于, 延迟环节记录初始状态 $x(0)$, 并为下一阶段的反馈控制提供所需的延迟信号.

$$\mathcal{K}_T(t) = 0 \Rightarrow u(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = x(0)$$

第二阶段 ($t \in [T, 2T]$). 控制器开始工作, 并

利用上一阶段“记忆”的延迟状态 $x(0)$ 进行反馈. 增益函数 $\mathcal{K}_T$ 设计为具有特定波形的周期函数, 其目的是为在积分后实现状态的精确归零.

$$u(t) = -\frac{1}{T} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) x(0) \quad (47)$$

代入系统方程并积分得:

$$x(t) = x(0) - \frac{t-T}{T} x(0) + \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) x(0)$$

当 $t = 2T$ 时:

$$x(2T) = x(0) - \frac{T}{T} x(0) + \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi) x(0) = 0$$

第三阶段 ($t \in (2T, 3T]$). 此时, 控制器增益再次归零. 由于系统在 $t = 2T$ 时已处于零状态, 且后续无外部扰动或控制输入, 系统将稳定地保持在原点, 即 $x(t) = 0, \forall t \geq 2T$.

该控制器的核心思想是通过周期性的延迟反馈与间歇性增益的巧妙配合, 使得系统能够在精确指定的时间 $2T$ 内从任意初始状态收敛到零并保持, 如图 6 所示. 值得注意的是, 式 (47) 所示的控制信号并不包含无界的时变增益, 从而避免因增益过大引起的数值或实现上的问题.

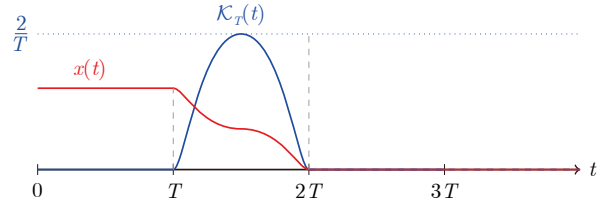


图 6 周期时滞反馈控制下的增益和输出信号示意图

Fig. 6 Schematic diagram of gain and output signal under periodic delayed feedback control

4.5 方法拓展

基于对时变增益与反馈信号的多样化利用, 上述四种控制方案展现出良好的结构灵活性, 能够与多种非线性控制方法有机融合, 从而有效应对高阶系统动态与复杂非线性特性. 例如, 这些方案可与滑模控制^[50, 78-79]、动态高增益反馈^[19, 80]、时变高增益反馈^[81]、加幂积分设计^[82-83]、参量 Lyapunov 方程设计^[84-87]、矩阵束技术^[88-91]、反步法^[22]、动态面控制^[92]、命令滤波技术^[93]、小增益定理^[94]、动态逆^[95], 以及基于人工神经网络^[61]或模糊逻辑^[96]的控制方法相结合. 这种融合不仅拓展现有非线性控制理论的研究框架, 也显著提升该类方法在复杂系统控制中的适用性与鲁棒性.

5 其余内在关键问题辨析

5.1 系统解的存在性和唯一性问题

为尽可能清晰地了解系统的运动行为, 即系统状态随时间的变化规律, 自然希望获得系统状态的解析解. 对于一阶线性定常系统, 这一目标通常较易实现, 如第 4 节所述. 然而, 对于非线性系统, 仅在极为特殊的情形下才能得到解析解. 既然无法获得一般非线性系统闭环状态的解析表达式, 从理论角度出发, 自然关注以下几个关于系统解的基本问题: 存在性、唯一性与稳定性. 其中, 稳定性往往依赖于具体控制器设计, 需针对具体问题进行分析, 难以给出统一结论. 因此, 本节仅讨论解的存在性与唯一性问题.

具有预设时间稳定性的闭环非线性系统通常可表示为如下形式:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mu(t)), \quad t \in [0, t_f] \quad (48)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 表示系统状态, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 表示所有外部输入 (一般包括扰动和人为设计的控制律), $\mu(t) = 1/(t_f - t)$ 是一个在 $[0, t_f)$ 上单调递增的函数, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times [0, t_f) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在定义域内关于 $\mathbf{x}$ 局部 Lipschitz 连续, 关于 t 分段连续. 当所有外部输入为零 (即 $\mathbf{u} \equiv 0$) 时, 若对任意 $t \in [0, t_f)$ 均有 $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mu(t)) \equiv 0$, 则 $\mathbf{x} = 0$ 是系统的一个平衡点.

因此, 若通过设计控制律使得 $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mu(t)) = 0$ 对任意 $t \in [0, t_f)$ 成立, 则平衡点存在.

对于解的唯一性, 考虑任意有限的 $T^* < t_f$, 时变增益 $\mu(t)$ 在区间 $[0, T^*]$ 上均有界, 从而函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ 在 $[0, T^*]$ 上关于 t 分段连续、关于 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 局部 Lipschitz 连续. 因此, 对任意初值 $\mathbf{x}(0)$, 系统在 $[0, T^*]$ 上存在唯一解^[63]. 进一步地, 若通过稳定性分析证明 $\lim_{t \rightarrow t_f} \mathbf{x}(t) = 0$, 那么该解可唯一延拓至整个半开区间 $[0, t_f)$.

5.2 时变增益的数值奇异问题

预设时间控制的核心思想在于在反馈信号中引入一类在有限时间内趋于无穷大的时变增益函数, 但这不可避免地导致系统状态收敛至平衡点时出现数值奇异现象. 如何有效规避或解决该问题, 已成为该领域的研究焦点. 尽管前文已提及若干解决思路, 考虑到其重要性, 此处特作系统总结.

回顾弹道导弹拦截系统中比例制导律的工作机制, 可发现一种实用的工程解决思路. 首先, 在比例制导律的程序实现中, 为避免增益无界所带来的实现难题, 设计者通常会有意将终端时间 T 设定为略

大于理论收敛时间 t_f 的常数 (例如 $T = t_f + 0.001$). 其次, 在拦截导弹上配备无线电近炸引信, 使其在进入预设危险范围后引爆, 产生大量高速破片, 通过撞击、引燃或引爆等方式毁伤目标, 从而在制导律修正可能损失控制精度的情况下, 仍能保障拦截成功率. 接下来, 将针对无界时变增益问题, 系统介绍几种有效的修正或解决方案.

1) 增益截断法. 该方法受比例制导策略启发, 在程序实现时将运行时间设定为略大于预设收敛时间 t_f 的常数, 从而在时变增益增长至无穷大之前将其主动截断. 该方案以轻微损失控制精度为代价, 提升预设时间控制算法的实用性, 但其缺点在于仅适用于导弹拦截等特定任务.

2) 控制器输入强制归零法. 该方法在预设时间点直接将控制器输入切换为零. 该方法在数学上成立, 能够通过高精度数值仿真展示系统的完整响应过程. 然而, 从工程实现角度看, 该方案并不可取. 由于无界增益导致的奇异现象并未消除, 而实际中并不存在能将反馈信号放大至无穷大的放大器, 且任意微弱的干扰都可能导致无控制输入的系统失稳, 因此这类方案难以应用于工程实践.

3) 增益限幅法. 该方法是将无界时变函数修正为有界形式, 通过增益限幅来解决数值奇异问题. 该方法可确保系统状态在预设时间内收敛至平衡点附近的邻域, 随后保持稳定 (或渐近稳定). 然而, 确定合适的增益幅值通常较为困难, 需进行额外理论分析, 否则将影响理论的严谨性. 此外, 也可在时变增益趋于无穷大之前, 将预设时间控制器切换为其他稳定控制器, 但这不仅需要额外设计稳定的控制策略, 还会因控制器切换导致输入信号出现短暂抖振.

4) 时变反馈与分数幂反馈结合法. 该方法将时变反馈与分数幂反馈相结合, 通过合理安排收敛序列, 使系统状态在时变增益趋于无穷大之前完成收敛, 从而在保持控制精度的同时规避奇异现象. 然而, 分数幂反馈在存在扰动时容易引发抖振, 同时也会增加对实际收敛时间估计的保守性.

5) 周期时滞反馈法. 该方法基于有界周期时滞反馈构建特殊反馈机制, 理论上可严格避免奇异问题, 并支持系统在终端时间后持续运行. 但该方案需要系统模型的先验信息, 且在存在外部扰动时难以直接应用.

6) 隐式欧拉编程法. 该方法由 Efimov 等^[97] 提出, 可严格避免数值奇异问题, 也可以在不损失控制精度的前提下保证控制器在终端时间后持续运行, 并且对于测量噪声具有鲁棒性. 与显式方法不同, 隐

式欧拉方法将系统动态 (以系统 $\dot{x} = u$ 和控制器 $u = -ax/(t_f - t)$, $a \geq 1$ 为例) 的右端函数在上一时刻 t_{k-1} 处求值:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{h} = u_k = -\frac{ax_k}{t_f - t_k} \quad (49)$$

其中, $t_k = hk$, $t_f > h$, h 为固定采样周期. 对式 (49) 化简可得:

$$x_k \left(1 + \frac{ah}{t_f - t_k} \right) = x_{k-1} \quad (50)$$

由式 (50) 直接解出 x_k , 得到如下显式递推公式:

$$x_k = \frac{(t_f - t_k)x_{k-1}}{t_f - t_k + ah}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (51)$$

其中, $N = \lfloor t_f/h \rfloor$ 表示向下取整函数. 由式 (51) 可知: 分母始终大于零, 递推过程数值稳定; 当 $t_k \rightarrow t_f$ 时, 分子趋于零, 迫使 x_k 收敛到 0, 精确再现连续系统的收敛行为; 整个计算过程无需执行任何可能产生除零的奇异运算.

上述离散化方案仅在有限区间 $[0, t_f]$ 上有定义. 为将控制器延拓至整个时域 $t \geq 0$, 引入如下周期时间映射:

$$\tau(t) = \text{mod}(t, t_f) \in [0, t_f) \quad (52)$$

其中, $\text{mod}(t, t_f) = t - t_f \lfloor t/t_f \rfloor$. 该映射将物理时间 t 折叠至固定区间 $[0, t_f]$ 内. 据此, 式 (51) 修正为:

$$x_k = \frac{(t_f - \tau_k)x_{k-1}}{t_f - \tau_k + ah} \quad (53)$$

其中, $\tau_k = \tau(t_k)$. 该周期延拓方案具有以下性质: 在每个区间 $t \in [mt_f, (m+1)t_f]$, $m \in \mathbf{Z}$, 状态在该周期末端收敛至原点附近; 每个周期开始时, 有效时间 $\tau(t)$ 重置为 0, 增益恢复至初始值. 不难发现, 式 (53) 所描述的预设时间控制器的隐式欧拉离散化实现方案, 在形式上与周期时滞反馈控制具有相似的结构, 两者均利用延迟状态信息进行反馈, 并通过周期重置实现控制器的无限时域运行. 所不同的是, 隐式欧拉格式中的延迟步长固定为单步采样周期 h , 而增益的周期演化则由时变函数 $1/(t_f - \tau_k)$ 自然驱动.

5.3 控制信号光滑性问题

在控制系统编程实现中, 在处理 $x^{1/3}$ 这类反馈信号时, 通常需使用 $\text{sign}(x)|x|^{1/3}$ 的等价形式, 主要原因如下: 1) 语言兼容性与实数输出保证: 在大多数编程语言 (如 C、C++、Python、MATLAB) 中, 当底数 x 为负数时, 分数幂运算要么未定义, 要么返回复数结果. 而控制系统要求反馈信号必须为实

数, 因此直接使用 $x^{1/3}$ 可能导致数值异常或错误的复数输出, 影响控制器正常运行. 2) 数值稳定性考虑: 函数 $x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 处的导数为无穷大, 该点附近斜率趋于垂直. 这种奇异性在数值积分或微分方程求解中容易引起问题, 例如导致仿真步长过小、计算效率降低, 甚至引发数值不稳定. 采用 $\text{sign}(x)|x|^{1/3}$ 的形式有助于提升算法整体的数值鲁棒性.

针对第 2 节所述四种控制器, 在两组不同初始条件下进行仿真研究. 仿真基于 MATLAB 2016 平台, 步长设定为 0.01, 初始条件分别取为 $x_0 = 0.1, 1.0$. 控制器参数统一设置为 $k = 1.2$, $t_f = 0.5$. 仿真结果如图 7 ~ 图 10 所示, 依次为有限时间控制、固定时间控制、预定时间控制与预设时间控制下的系统响应.

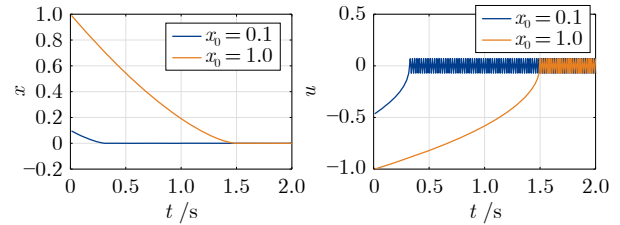


图 7 有限时间控制下的系统状态与控制输入轨迹
Fig. 7 System state and control input trajectories under finite-time control

由图 7 所示结果可观察到, 在有限时间控制下, 系统的收敛时间分别约为 0.32 s 和 1.50 s. 根据第 2 节的理论分析, 代入初始条件可计算出对应的精确收敛时间为 $T(x_0) = 0.323$ s 和 $T(x_0) = 1.500$ s. 该结果说明, 收敛时间与系统的初始状态密切相关.

由图 8 的结果可观察到, 在固定时间控制下, 系统的收敛时间分别约为 0.6 s 和 1.5 s. 根据第 2 节的理论分析, 代入初始条件及 $k = 1.2$ 可得收敛时间的上界估计为 $T_{\max} = \pi/\sqrt{1.2} \approx 2.87$ s. 这表明, 尽管该上界与初始状态无关, 但所采用的估计方法对收敛时间的刻画较为保守, 且初始状态幅值越小, 保守程度越高.

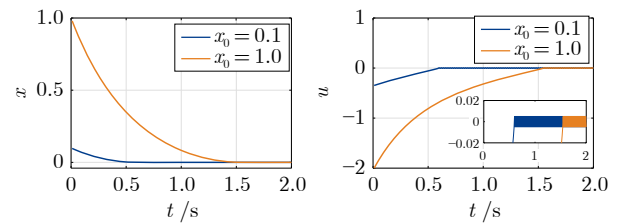


图 8 固定时间控制下的系统状态与控制输入轨迹
Fig. 8 System state and control input trajectories under fixed-time control

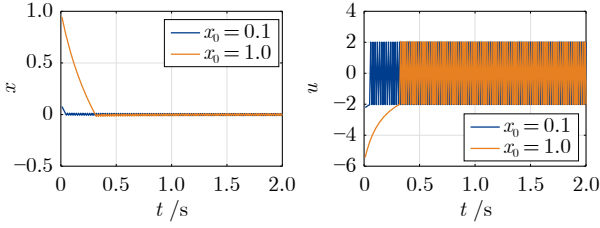


图 9 预定时间控制下的系统状态与控制输入轨迹
Fig.9 System state and control input trajectories under predefined-time control

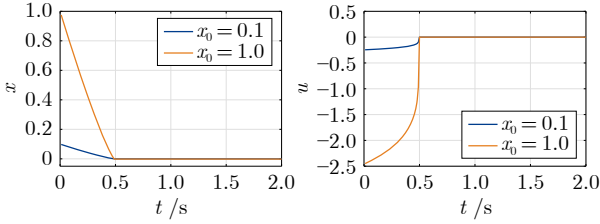


图 10 预设时间控制下的系统状态与控制输入轨迹
Fig.10 System state and control input trajectories under prescribed-time control

由图 9 的结果可观察到, 在预定时间控制下, 系统的收敛时间分别约为 0.05 s 和 0.32 s. 依据第 2 节的理论分析, 代入 $t_f = 0.5$ s 可得收敛时间上界估计为 $T_{\max} = 0.5$ s. 这说明虽然该上界与初始状态无关, 但估计结果仍偏保守, 且随着初始状态幅值的减小, 保守性进一步增大.

由图 10 的结果可观察到, 在预设时间控制下, 系统的收敛时间为 0.5 s. 根据第 2 节的理论分析, 代入 $t_f = 0.5$ s 可得理论收敛时间同样为 0.5 s, 说明该收敛时间与系统的初始状态无关. 此外, 与前述三种控制方法相比, 该方法下的输入信号呈现光滑特性, 未出现明显抖振现象.

5.4 测量噪声敏感性问题

为讨论在测量噪声影响下几种控制方法的性能差异. 考虑一阶系统 $\dot{x}(t) = u(t)$, 其中, 控制器接收的输出信号受到测量噪声 $d(t) = 0.01 \sin(20t)$ 的干扰, 具体形式为

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + d(t) \\ d(t) &= 0.01 \sin(20t) \end{aligned}$$

拟比较以下五种控制器的性能:

指数收敛 $u_{\text{exp}} = -4y$,

有限时间 $u_{\text{finite}} = -y^{\frac{1}{3}}$,

固定时间 $u_{\text{fixed}} = -k \text{sign}(y)|y|^{\frac{1}{2}} - \text{sign}(y)|y|^{\frac{3}{2}}$,

预定时间 $u_{\text{predefined}} = -\frac{1}{t_f} \text{sign}(y)e^{|y|}$,

预设时间 $u_{\text{prescribed}} = -\frac{4}{t_f - t}y$,

均取 $t_f = 2$ s. 为更清晰地观察平衡点附近的动态行为, 设初始条件为 $x(0) = 0.1$.

仿真结果如图 11 所示. 通过对比不同控制方法在测量噪声影响下的响应曲线, 可以观察到以下现象: 首先, 所有控制方案在噪声存在时均无法实现零误差收敛, 稳态精度明显低于无噪声的理想情况. 特别是, 相较于传统的指数收敛控制器 $u_{\text{exp}} = -4y$, 有限时间、固定时间、预定时间及预设时间控制器的稳态偏差更为显著, 甚至在某些时刻出现明显的高频振荡.

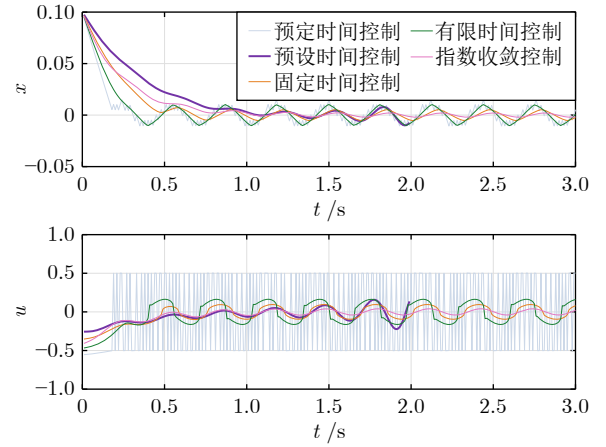


图 11 不同控制策略在含测量噪声下的输入-输出轨迹 (步长: 0.01)

Fig.11 Input-output trajectories of different control strategies under measurement noise (step size: 0.01)

这种精度下降的差异可从控制器结构的角度进行解释: 指数收敛控制器基于线性反馈设计, 增益在平衡点附近保持恒定, 因此对噪声的放大作用相对有限. 然而, 其余几种控制器在平衡点附近对反馈信号 x 进行增强处理, 例如采用分数幂 $y^{1/3}$ 、幂次组合 $|y|^{1/2} + |y|^{3/2}$ 或指数函数 $e^{|y|}$ 等形式, 这些非线性机制旨在提升收敛速度或在有限时间内实现收敛, 但同时也会放大测量噪声中的高频成分, 导致控制信号中引入显著的噪声分量, 进而降低系统在平衡点附近的稳态精度. 这一现象与注 4 中关于“增强型反馈对测量噪声敏感”的理论分析完全一致. 此外需特别说明的是, 预设时间控制器 $u_{\text{prescribed}} = -4y/(t_f - t)$ 在 t 接近 $t_f = 2$ s 时增益趋于无穷, 因此在 $t \in [0, t_f)$ s 之外无定义, 其仿真轨迹也仅绘制至 $t < 2$ s 阶段. 值得注意的是, 有限时间、固定时间及预定时间控制器因采用分数幂或指数型反馈, 其控制输入中同样存在由测量噪声引发的高频振荡, 而预设时间控制器的控制输入在远离终端时刻时相对平稳, 在接近 t_f 时振荡幅度有所增大. 这

一现象表明,不同预设/预定时间控制策略对测量噪声的敏感性存在显著差异,实际应用中需根据噪声环境与收敛精度要求综合权衡。

5.5 面向工程实际的理论拓展问题

前述四种设计框架主要基于一阶系统示例进行阐述,在该特例中系统状态与输出并无本质区别,且未考虑执行器非理想特性、数字采样控制以及网络化环境中的信息交互与物理耦合等工程约束。然而,实际工程系统通常呈现高阶动态特性,其状态变量未必全部可直接测量;执行器饱和、死区、量化等非线性环节普遍存在;数字控制器依赖离散采样而非连续时间反馈;多智能体协同任务中面临通信延迟、丢包等网络约束,智能体之间还可能物理耦合。近年来,研究者针对上述场景发展相应的预设时间控制方法,形成对核心设计框架的重要补充。

实际高阶系统的状态变量往往难以完全获取,因而需融合观测器设计与输出反馈策略。目前,已有文献针对预设时间观测器设计^[98-100]以及输出反馈控制器设计开展系统研究^[20-21, 84-85, 91, 101-103]。针对线性系统^[101-102]及一类特殊下三角非线性系统,已建立相应的预设时间观测器-控制器架构^[104],并有结果进一步证明在此类设定下分离原理仍然成立^[91],即观测器参数与控制器参数可以独立设计。这一性质显著降低了预设时间输出反馈控制的设计复杂度,使观测器与控制器的整定相互解耦,避免了传统方法中为满足联合收敛条件而进行的繁琐参数标定。

在预设时间控制框架下,尽管增益趋于无穷大并不必然导致控制输入发散(其幅值取决于增益与状态的相对收敛速率),但在终端时刻附近的瞬态过程中,若状态未能以足够快的速度收敛,或测量噪声经时变增益放大,均可能瞬时产生较大的控制幅值,从而对执行器构成潜在威胁。针对执行器饱和问题,已有相关成果进行系统探讨^[16, 105]。其中,通过引入规划算法^[105],可有效计算满足幅值约束下的预设收敛时间。上述结果为预设时间控制在执行器受限环境下的工程实现提供设计依据。

数字控制器依赖离散采样而非连续时间反馈,而现有理论主要基于连续时间框架。针对该问题,相关研究分别探讨数据采样控制下的预设时间控制方法^[106]、预设时间观测器的离散化设计^[107],以及预设时间控制器的离散化实现^[97, 108-110],并验证相关方法对外部扰动及测量噪声的鲁棒性。这些成果为数字控制环境下的预设时间控制提供可行的设计路径。

网络化系统中的预设时间控制面临信息交互与物理耦合两大挑战。前者受通信延迟、数据丢包、有限带宽及动态拓扑变化等网络约束影响^[33, 111-114];后者则体现为智能体之间的机械接触、协同搬运中的刚性耦合或通过环境介质产生的动力学相互影响。针对通信约束,已有研究采用事件触发策略降低通信交互频次^[115-120]。此外,针对网络攻击下的安全控制问题,也有初步探索利用预设时间方法实现对欺骗攻击或拒绝服务攻击的弹性控制^[121-122]。针对物理耦合,现有研究或提出分散式预设时间控制框架,使大规模互联系统仅凭本地信息实现整体控制^[13, 81, 88];或将其应用于多机械臂-手指协同抓取任务,兼顾刚性耦合与接触力约束^[51]。上述研究将预设时间控制从集中式、理想环境拓展至兼具信息交互与物理耦合的分布式与分散式网络化场景,为其在协同操控、编队控制等领域的应用奠定了理论基础。

6 结束语

本文系统梳理预设时间控制的理论渊源、核心设计方法与工程实现挑战。从稳定性定义出发,辨析有限时间、固定时间、预定时间与预设时间稳定性之间的逻辑关系;追溯比例制导、终端约束最优控制及滑模控制中“时变增益”思想的早期萌芽;重点阐述状态变换、时间尺度变换、复合反馈及周期时滞反馈四种主流设计框架,并分析增强/削弱反馈信号对收敛性能与工程可实现性的影响。针对预设时间控制中存在的数值奇异与噪声敏感问题,总结多种解决方案。上述讨论旨在为预设时间控制的理论与工程应用提供系统性的参考。

未来研究应着力推动理论融合,将预设时间控制与其他先进控制方法有机结合,以提升其在复杂系统建模及强噪声环境下的适用性。包括但不限于以下几个方面:有限带宽与通信约束下的多智能体预设时间协同、预设时间理论向离散数字控制系统的无损转化、基于强化学习或数据驱动的预设时间参数自适应整定、基于Lyapunov判据的预设时间控制学习算法、面向复杂任务场景的预设时间控制理论与验证体系。

综上所述,预设时间控制正从理论探索走向工程实践,未来需在数字化实现、网络化协同、智能化整定及复杂场景验证等方向持续突破,以支撑航空航天、智能制造、无人系统等对动态性能与时间精度有严苛要求的关键应用。

参考文献

- 1 Liu Qiang, Zhang Han-Feng, Chen Jun-Ru. *Research on Ballistic Missile Defense Operation*. Beijing: National Defense In-

- dustry Press, 2018.
(刘强, 张汉锋, 陈俊儒. 反弹道导弹作战研究. 北京: 国防工业出版社, 2018.)
- 2 Yuan L C L. Homing and navigational courses of automatic target-seeking devices. *Journal of Applied Physics*, 1948, **19**(12): 1122–1128
- 3 谢力, 张奕群. 袁家骝在无线电定向和导航方面的早期工作. 系统与控制纵横, 2015, **2**(2): 11–23
- 4 Ho Y, Bryson A, Baron S. Differential games and optimal pursuit-evasion strategies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, **10**(4): 385–389
- 5 Sidar M. On closed-loop optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, **9**(3): 292–293
- 6 Åström K J. Early control development in Sweden. *European Journal of Control*, 2007, **13**(1): 7–19
- 7 吴加望. “爱国者”TVM 制导体制分析. 现代防御技术, 1992(1): 49–59
- 8 Xu Wen-Xu. The probability of the patriot missile intercepting tactical ballistic missile. *Tactical Missile Technology*, 1999(1): 33–37
(徐文旭. “爱国者”导弹拦截战术弹道导弹的概率. 战术导弹技术, 1999(1): 33–37)
- 9 Zarchan P. *Tactical and Strategic Missile Guidance*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- 10 Song Y D, Wang Y J, Holloway J, Krstic M. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 2017, **83**: 243–251
- 11 Ye H F, Song Y D. Prescribed-time tracking control of MIMO nonlinear systems with nonvanishing uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(6): 3664–3671
- 12 Bertino A, Naseradinmousavi P, Krstic M. Design and experiment of a prescribed-time trajectory tracking controller for a 7-DOF robot manipulator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2022, **144**(10): Article No. 101005
- 13 Ye H F, Wen C Y, Lam J, Ioannou P A. Decentralized prescribed-time input-to-state stabilization for interconnected normal form nonlinear systems. *Automatica*, 2025, **180**: Article No. 112480
- 14 Wang Y J, Song Y D, Hill D J, Krstic M. Prescribed-time consensus and containment control of networked multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(4): 1138–1147
- 15 Shakouri A, Assadian N. Prescribed-time control with linear decay for nonlinear systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2022, **6**: 313–318
- 16 Zhou B. Finite-time stability analysis and stabilization by bounded linear time-varying feedback. *Automatica*, 2020, **121**: Article No. 109191
- 17 Orlov Y, Kairuz R I V, Aguilar L T. Scaling technique for prescribed-time output feedback stabilization: Autonomous and non-autonomous paradigms and their comparative study. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, **361**(5): Article No. 106642
- 18 Kan Z, Yucelen T, Doucette E, Pasiliao E. A finite-time consensus framework over time-varying graph topologies with temporal constraints. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2017, **139**(7): Article No. 071012
- 19 Krishnamurthy P, Khorrami F, Krstic M. A dynamic high-gain design for prescribed-time regulation of nonlinear systems. *Automatica*, 2020, **115**: Article No. 108860
- 20 Krishnamurthy P, Khorrami F, Krstic M. Robust adaptive prescribed-time stabilization via output feedback for uncertain nonlinear strict-feedback-like systems. *European Journal of Control*, 2020, **55**: 14–23
- 21 Krishnamurthy P, Khorrami F, Krstic M. Adaptive output-feedback stabilization in prescribed time for nonlinear systems with unknown parameters coupled with unmeasured states. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2021, **35**(2): 184–202
- 22 Ye H F, Song Y D. Prescribed-time control for time-varying nonlinear systems: A temporal scaling based robust adaptive approach. *Systems & Control Letters*, 2023, **181**: Article No. 105602
- 23 Yu J B, Zhao Y, Wen C Y, Wu Y Q. A prescribed-time convergence criterion with application to adaptive control for parametric strict-feedback systems. *Journal of Control and Decision*, DOI: [10.1080/23307706.2026.2674066](https://doi.org/10.1080/23307706.2026.2674066)
- 24 Tran D, Yucelen T. Finite-time control of perturbed dynamical systems based on a generalized time transformation approach. *Systems & Control Letters*, 2020, **136**: Article No. 104605
- 25 Liu C Y, Liu Y G. Conditions and synthesis of adaptive prescribed-time controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(12): 8005–8012
- 26 Wang Y, Liu Y G. Adaptive prescribed-time stabilization for uncertain unmeasured-state-dependent systems. *Systems & Control Letters*, 2025, **204**: Article No. 106228
- 27 Wang Y, Liu Y G. Prescribed-time control via dynamic-high-gain output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2025, **35**(2): 591–603
- 28 Yilmaz C T, Krstic M. Prescribed-time extremum seeking for delays and PDEs using chirpy probing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(11): 7710–7725
- 29 Kairuz R I V, Orlov Y, Aguilar L T. Prescribed-time stabilization of controllable planar systems using switched state feedback. *IEEE Control Systems Letters*, 2021, **5**(6): 2048–2053
- 30 Orlov Y. Time space deformation approach to prescribed-time stabilization: Synergy of time-varying and non-Lipschitz feedback designs. *Automatica*, 2022, **144**: Article No. 110485
- 31 Su J, Song Y D. Prescribed-time control with bounded feedback gain: A nonscaling and structural adaptation-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, **55**(4): 2580–2589
- 32 Yang H Y, Wang Y J. Finite-gain based prescribed-time consensus control for multi-agent systems under switching topology. *Automatica*, 2026, **183**: Article No. 112686
- 33 Yang H Y, Wang Y J, Shao Z W. Event-triggered prescribed-time control for a class of uncertain nonlinear systems using finite time-varying gain. *ISA Transactions*, 2024, **152**: 167–176
- 34 Xiao Y, Yang Y L, Ye D, Zhao Y. Scaling-transformation-based attitude tracking control for rigid spacecraft with prescribed time and prescribed bound. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2025, **61**(1): 433–442
- 35 Hu Y L, Cai X H, Cheng C J, Shi S, Du H P, Zhou H L. Prescribed-time state and extended disturbance observer with application to active vibration isolation systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2025, **30**(5): 3374–3383
- 36 Li J J, Sun Z Y, Wang Z, Chen C C. A framework of event-triggered prescribed-time stabilization of time-varying nonlinear systems and its application in tunnel diode circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2025, **72**(7): 3595–3605
- 37 Zhou B, Michiels W, Chen J. Fixed-time stabilization of linear delay systems by smooth periodic delayed feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(2): 557–573
- 38 Ding Y, Zhou B, Shi Y. Prescribed-time control via periodic delayed feedback-based super-twisting sliding mode algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2026, **71**(3): 1813–1828
- 39 Ding Y, Zhou B, Zhang K K, Michiels W. Strong prescribed-time stabilization of uncertain nonlinear systems by periodic delayed feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*,

- 2024, **69**(6): 4072–4079
- 40 Li H F, Zhou B, Michiels W, Duan G R. Prescribed-time unknown input observers design by using periodic delayed output with application to fault estimation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(2): 664–674
- 41 Espitia N, Perruquetti W. Predictor-feedback prescribed-time stabilization of LTI systems with input delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(6): 2784–2799
- 42 Li W Q, Krstic M. Prescribed-time output-feedback control of stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(3): 1431–1446
- 43 Li W Q, Krstic M. Stochastic nonlinear prescribed-time stabilization and inverse optimality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(3): 1179–1193
- 44 Li W Q, Krstic M. Prescribed-time practical inverse optimal output tracking control of stochastic nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2025, **63**(3): 1929–1949
- 45 Hua C C, Ning P J, Li K. Adaptive prescribed-time control for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(11): 6159–6166
- 46 Ning P J, Hua C C, Li K, Li H. A novel theorem for prescribed-time control of nonlinear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 2023, **152**: Article No. 111009
- 47 Abel I, Steeves D, Krstić M, Janković M. Prescribed-time safety design for strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(3): 1464–1479
- 48 Chen H L, Wang P, Tang G J. Prescribed-time control for hypersonic morphing vehicles with state error constraints and uncertainties. *Aerospace Science and Technology*, 2023, **142**: Article No. 108671
- 49 Zhang Kang-Kang, Zhou Bin, Cai Guang-Bin, Hou Ming-Zhe. Prescribed-time tracking control of hypersonic vehicles by time-varying high-gain feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(6): 1151–1159
(张康康, 周彬, 蔡光斌, 侯明哲. 高超声速飞行器指定时间时变高增益反馈跟踪控制. 自动化学报, 2024, **50**(6): 1151–1159)
- 50 Pal A K, Kamal S, Nagar S K, Bandyopadhyay B, Fridman L. Design of controllers with arbitrary convergence time. *Automatica*, 2020, **112**: Article No. 108710
- 51 Ye H F, Song Y D, Lam J, Ioannou P A. Decentralized prescribed-time control of robotic arm-finger systems for grasping and moving tasks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(9): 4386–4399
- 52 Zhao X Q, Song Y D, Ye H F. Adaptive distributed event-triggered cooperative manipulation of multiple manipulators under partial time-interval error constraints. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2025, **55**(12): 9309–9323
- 53 Singh V K, Kamal S, Ghosh S. Prescribed-time constrained feedback control for an uncertain twin rotor helicopter. *Aerospace Science and Technology*, 2023, **140**: Article No. 108483
- 54 Li S S, Zhang Y W, Wang X J, Wang S P, Duan H B. Prescribed-time bearing-based formation control of underactuated ASVs under external disturbance. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2024, **71**(3): 1196–1200
- 55 Ge M, Xu H Z, Song Q. Prescribed-time control of four-wheel independently driven skid-steering mobile robots with prescribed performance. *Nonlinear Dynamics*, 2023, **111**(22): 20991–21005
- 56 Zhang T T, Zhang S J, Guo F Z, Zhao X T, Zhang F. Prescribed time attitude containment control for satellite cluster with bounded disturbances. *ISA transactions*, 2023, **137**: 160–174
- 57 Zhou B, Zhang K K. A linear time-varying inequality approach for prescribed time stability and stabilization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **53**(3): 1880–1889
- 58 Dong J C, Zhou B. Prescribed-time fault-tolerant control of linear time-varying systems by linear time-varying feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2025, **35**(9): 3509–3522
- 59 Obuz S, Selim E, Tatlicioglu E, Zergeroglu E. Robust prescribed time control of Euler-Lagrange systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2025, **72**(2): 1694–1701
- 60 Ye H F, Liu C G, Lam J, Song Y D, Kwok K W, Zhou Y C. A nonconservative prescribed-time control approach for robotic manipulation: Design and experiment. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, DOI: 10.1109/TIE.2026.3699870
- 61 Pan C Y, Peng Z X, Yang S C, Wen G G, Huang T W. Adaptive neural network-based prescribed-time observer for battery state-of-charge estimation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2023, **38**(1): 165–176
- 62 Shi Z X, Feng Z, Wang Q, Dong X W, Lv J H, Ren Z, et al. Prescribed-time time-varying output formation tracking for heterogeneous multiagent systems. *IEEE Internet of Things Journal*, 2025, **12**(9): 11622–11632
- 63 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- 64 Li Shi-Hua, Ding Shi-Hong, Tian Yu-Ping. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 101–104
(李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法. 自动化学报, 2007, **33**(1): 101–104)
- 65 Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(5): 678–682
- 66 Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106–2110
- 67 Gao Zhen-Yu, Guo Ge. Fixed-time formation control of AUVs based on a disturbance observer. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(6): 1094–1102
(高振宇, 郭戈. 基于扰动观测器的 AUVs 固定时间编队控制. 自动化学报, 2019, **45**(6): 1094–1102)
- 68 Sánchez-Torres J D, Gómez-Gutiérrez D, López E, Loukianov A G. A class of predefined-time stable dynamical systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, **35**(S1): i1–i29
- 69 Johnson C, Gibson J. Singular solutions in problems of optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1963, **8**(1): 4–15
- 70 Rose N, Bronson R. On optimal terminal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, **14**(5): 443–448
- 71 Lewis F L. *Optimal Control*. New York: Wiley, 1986.
- 72 Utkin V, Poznyak A, Orlov Y, Polyakov A. Conventional and high order sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, **357**(15): 10244–10261
- 73 Lee H, Utkin V I. Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control*, 2007, **31**(2): 179–188
- 74 Pontryagin L S. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- 75 Wang L P. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. London: Springer, 2009.
- 76 Song Y D, Ye H F, Lewis F L. Prescribed-time control and its latest developments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(7): 4102–4116
- 77 Espitia N, Poveda J I, Krstic M. Prescribed-time Newton extremum seeking using delays and time-periodic gains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2026, **71**(7): 4897–4904
- 78 Chen Z R, Ju X Z, Wang Z W, Li Q. The prescribed time slid-

- ing mode control for attitude tracking of spacecraft. *Asian Journal of Control*, 2022, **24**(4): 1650–1662
- 79 Ye H F, Song Y D. Prescribed-time control for linear systems in canonical form via nonlinear feedback. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(2): 1126–1135
- 80 Ning P J, Dashkovskiy S N, Hua C C, Li K. Dual-gain function based prescribed-time output feedback control nonlinear time-delay systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2024, **62**(4): 2254–2272
- 81 Ye H F, Wen C Y, Song Y D. Decentralized prescribed-time control for interconnected nonlinear systems via output-feedback. *Automatica*, 2024, **163**: Article No. 111571
- 82 Song Y D, Su J. A unified Lyapunov characterization for finite time control and prescribed time control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, **33**(4): 2930–2949
- 83 Li J J, Sun Z Y, Wen C Y, Chen C C. Prescribed-time stabilization of high-order polynomial time-varying nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(3): 1301–1309
- 84 Zhou B, Shi Y. Prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by linear time-varying feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(12): 6123–6130
- 85 Zhang K K, Zhou B, Duan G R. Global prescribed-time output feedback control of a class of uncertain nonlinear systems by linear time-varying feedback. *Automatica*, 2024, **165**: Article No. 111680
- 86 Zhang K K, Zhou B, Duan G R. Prescribed-time input-to-state stabilization of normal nonlinear systems by bounded time-varying feedback. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2022, **69**(9): 3715–3725
- 87 Zhang K K, Zhou B, Hou M Z, Duan G R. Prescribed-time control of high-order nonholonomic systems in chained form by time-varying feedback. *Systems & Control Letters*, 2022, **166**: Article No. 105307
- 88 Ye H F, Wen C Y, Song Y D. Decentralized and distributed control of large-scale interconnected multiagent systems in prescribed time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(2): 1115–1130
- 89 Ye H F, Wen C Y, Song Y D. Distributed matrix pencil formulations for prescribed-time leader-following consensus of MASs with unknown sensor sensitivity. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2026, **56**(1): 629–641
- 90 Tan Y, Ye H F, Wen C Y, Song Y D. Decentralized prescribed-time output-feedback control for interconnected systems with coupled non-identical subsystems of different orders. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2026, **13**(5): 1097–1107
- 91 Ye H F, Song Y D. A separation principle for the prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems. *Automatica*, 2025, **171**: Article No. 111983
- 92 Zuo G W, Wang Y J. Adaptive prescribed finite time control for strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(9): 5729–5736
- 93 Ye H F, Song Y D. Backstepping design embedded with time-varying command filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, **69**(6): 2832–2836
- 94 Zuo G W, Li M M, Wang Y J, Zhu L J, Song Y D. Achieving convex optimization within prescribed time for networked Euler-Lagrange systems: A novel adaptive distributed approach with small-gain conditions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2026, **56**(1): 509–522
- 95 Yu J B, Li C D, Ding Z T, Wu Y Q. Adaptive prescribed-time control for nonlinear cascade systems with FxT-ISS inverse dynamics. *Automatica*, 2025, **182**: Article No. 112527
- 96 Wang J H, Liu J R, Li Y H, Chen C L P, Liu Z, Li F Y. Prescribed time fuzzy adaptive consensus control for multiagent systems with dead-zone input and sensor faults. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, **21**(3): 4016–4027
- 97 Efimov D, Orlov Y. On discretization and sampled-time implementation of prescribed-time stabilizing controls. *Automatica*, 2026, **191**: Article No. 113106
- 98 Holloway J, Krstic M. Prescribed-time observers for linear systems in observer canonical form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(9): 3905–3912
- 99 Espitia N, Steeves D, Perruquetti W, Krstic M. Sensor delay-compensated prescribed-time observer for LTI systems. *Automatica*, 2022, **135**: Article No. 110005
- 100 Zhang J C, Zhao X D, Zheng G, Zhu F L, Dinh T N. On distributed prescribed-time unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(7): 4743–4750
- 101 Holloway J, Krstic M. Prescribed-time output feedback for linear systems in controllable canonical form. *Automatica*, 2019, **107**: 77–85
- 102 Tran D, Yucelen T, Sarsilmaz S B. Finite-time control of multiagent networks as systems with time transformation and separation principle. *Control Engineering Practice*, 2021, **108**: Article No. 104717
- 103 Li S L, Zhou B, Duan G R, Zhang K. Prescribed-time semi-global output feedback stabilization by a time-varying high-gain observer. *Automatica*, 2025, **179**: Article No. 112454
- 104 Li S L, Zhou B, Shi Y, Duan G R. Prescribed-time semi-global control for a class of nonlinear uncertain systems by linear time-varying feedback. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(3): 1172–1182
- 105 Vázquez C R. Prescribed-time control of disturbed systems with state and input constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2025, **70**(1): 619–626
- 106 Zhang K, Zhou B, Jiang H Y, Liu G P, Duan G R. Practical prescribed-time sampled-data control of linear systems with applications to the air-bearing testbed. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, **69**(6): 6152–6161
- 107 Efimov D, Orlov Y. Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations. *Systems & Control Letters*, 2024, **188**: Article No. 105820
- 108 Orlov Y, Arambula M, Efimov D. Prescribed-time output feedback for linear systems in normal form: Robustness analysis and digital implementation under measurement noise. *Systems & Control Letters*, 2026, **209**: Article No. 106344
- 109 Voleti R S, Bhattacharjee D, Subbarao K. Leaderless time-to-go protocols for same-time position consensus. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, **53**(6): 3795–3809
- 110 Efimov D, Orlov Y. On implicit discretization of prescribed-time stabilizers. In: Proceedings of the 63rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Milan, Italy: IEEE, 2024. 7350–7355
- 111 Cheng Wang-Lei, Zhang Ke, Jiang Bin. Hierarchical-based prescribed-time optimal fault-tolerant control for air-ground cooperative system. *Acta Automatica Sinica*, 2024, **50**(8): 1589–1600
(成旺磊, 张柯, 姜斌. 基于层级结构的空-地协同预设时间最优容错控制. 自动化学报, 2024, **50**(8): 1589–1600)
- 112 Su J, Song Y D. Prescribed-time formation control for multi-agent systems with uncertain nonlinear dynamics and non-vanishing random disturbances. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2026, **13**(3): 586–596
- 113 Zhang K, Zhou B, Yang X F, Duan G R. Prescribed-time leader-following consensus of linear multi-agent systems by bounded linear time-varying protocols. *Science China Information Sciences*, 2024, **67**(1): Article No. 112201
- 114 Zuo G W, Zhu L J, Wang Y J, Chen Z Y, Song Y D. A novel approach to prescribed-time cooperative output regulation in

- linear heterogeneous multi-agent systems using cascade system criteria. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2025, **72**(6): 2842–2855
- 115 Ning P J, Hua C C, Li K, Meng R. Event-triggered control for nonlinear uncertain systems via a prescribed-time approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023, **68**(11): 6975–6981
- 116 Ning P J, Hua C C, Li K, Meng R. Event-triggered adaptive prescribed-time control for nonlinear systems with uncertain time-varying parameters. *Automatica*, 2023, **157**: Article No. 111229
- 117 Zhang K, Zhou B, Duan G R. Global consensus of double-integrator multiagent systems with input saturation by fully distributed event-triggered and self-triggered controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(9): 6269–6276
- 118 Zhang K, Zhou B, Hou M Z, Duan G R. Practical prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by event-triggered and self-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(5): 3426–3433
- 119 Zhang K, Hu Z J, Song F Z, Yang X F, Liu Y. Consensus of input constrained multi-agent systems by dynamic time-varying event-triggered strategy with a designable minimal inter-event time. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2024, **71**(4): 2119–2123
- 120 Li H P, Jia X C, Chi X B, Li B. Fully distributed prescribed-time leader-following output consensus of heterogeneous multi-agent systems with dynamic event-triggered mechanism. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 8341–8350
- 121 Ye Z H, Zhang D, Liu L, Shi Y, Feng G. Prescribed time consensus of leader-following multi-agent systems under DoS attacks. *Automatica*, 2026, **188**: Article No. 112953
- 122 Zhang K, Zhou B, Duan G R. Fully distributed and attack-immune protocols for prescribed-time consensus by using periodic delayed relative output. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2026, **56**(3): 1379–1389



宋永端 中国工程院外籍院士, 重庆大学自动化学院教授. 主要研究方向为智能控制, 容错控制, 自适应协调控制, 飞行器导航与控制, 复杂系统主动安全预警与控制. 本文通信作者.
E-mail: ydsong@cqu.edu.cn

(**SONG Yong-Duan** International

Member of Chinese Academy of Engineering, and professor at the School of Automation, Chongqing University. His research interests include intelligent control, fault-tolerant control, adaptive cooperative control, aircraft navigation and control, and active safety early-warning and control for complex systems. Corresponding author of this paper.)



叶合夫 重庆大学博士. 2025 年获得重庆大学控制科学与工程专业博士学位. 主要研究方向为预设时间控制.

E-mail: yehefu@cqu.edu.cn

(**YE He-Fu** Ph.D. of Chongqing University. He received his Ph.D. degree in control science and engineering from Chongqing University in 2025. His main

interest is prescribed-time control.)