



无向 k -连通高效网络

王卓 王成红

Undirected k -Connected Efficient Network

WANG Zhuo, WANG Cheng-Hong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16383/j.aas.c250547>

您可能感兴趣的其他文章

基于自适应时间步脉冲神经网络的高效图像分类

Adaptive Timestep Improved Spiking Neural Network for Efficient Image Classification

自动化学报. 2024, 50(9): 1724–1735 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230656>

复杂无向图的同构判定方法

Isomorphism Determination Methods for Complex Undirected Graphs

自动化学报. 2024, 50(6): 1143–1150 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230612>

基于运动引导的高效无监督视频目标分割网络

Learning Motion Guidance for Efficient Unsupervised Video Object Segmentation

自动化学报. 2023, 49(4): 872–880 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c210626>

简单无向图的同构判定方法

Isomorphism Determination Methods for Simple Undirected Graphs

自动化学报. 2023, 49(9): 1878–1888 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c230025>

面向入侵检测的元图神经网络构建与分析

Construction and Analysis of Meta Graph Neural Network for Intrusion Detection

自动化学报. 2023, 49(7): 1530–1548 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c200819>

具有拓扑切换特性的离散型不确定时空网络的指数同步

Exponential Synchronization of Discrete Uncertain Spatiotemporal Networks With Topology Switching Characteristics

自动化学报. 2021, 47(3): 706–714 <https://doi.org/10.16383/j.aas.c180575>

无向 k -连通高效网络

王卓¹ 王成红²

摘 要 针对无向网络拓扑设计中存在的定义适用性差或设计目标单一等问题, 本文得到如下主要结果: 1) 给出一种新的网络能量定义; 据此并结合 Wiener 指数, 给出一种新的网络效率定义. 2) 给出简单无向连通图的对称性定义及其度量指标; 首次给出无向高效网络和无向 k -连通高效网络的定义, 证明了这两种网络的存在性, 并证明了无向 k -连通高效网络是连通度和效率均为最大值且边数达到最小值的网络. 3) 给出设计无向 k -连通高效网络的若干指导原则, 并构造一组无向 k -连通高效网络. 上述创新性成果可为无向网络的拓扑结构优化设计提供理论依据和技术支撑.

关键词 无向网络拓扑设计; Wiener 指数; 网络效率; 图的对称性; k -连通高效网络

引用格式 王卓, 王成红. 无向 k -连通高效网络. 自动化学报, 2026, 52(8): 1737–1744

DOI 10.16383/j.aas.c250547 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250547

Undirected k -Connected Efficient Network

WANG Zhuo¹ WANG Cheng-Hong²

Abstract In response to the problems of poor definition applicability or single design objective existing in the undirected network topology design, this paper obtains the following main results: 1) A new definition of network energy is proposed; based on which and according to the Wiener index, a new definition of network efficiency is proposed. 2) The definition and measurement indicator of the symmetry of simple undirected connected graphs are presented; The definitions of undirected efficient network and undirected k -connected efficient network are proposed for the first time, whose existences are proved, and the conclusion that the undirected k -connected efficient network is such a network, whose connectivity and efficiency are both maximized while the number of its edges is minimized, is proved. 3) Several guiding principles are given to design the undirected k -connected efficient network, on which basis a set of these networks is constructed. The above innovative results can provide theoretical basis and technical support for the topology optimization design of undirected networks.

Keywords undirected network topology design; Wiener index; network efficiency; symmetry of the graph; k -connected efficient network

Citation Wang Zhuo, Wang Cheng-Hong. Undirected k -connected efficient network. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(8): 1737–1744

通信和互联网的设计涉及 3 个层面: 网络拓扑结构设计; 顶点设备功能设计; 信息传输机制和通信协议设计. 图或网络的拓扑结构与信息的传输时延和质量之间存在密切关系. 何种拓扑结构可使信息传输时延小、传输质量高且通信链路数少是网络拓扑设计需要解决的核心问题.

20 世纪 60 年代, Elspas^[1] 首先提出一个与网络

设计相关的问题: 给定网络 G 的最大顶点度 Δ 及不超过某一正整数的直径 $d(G)$, 设计一种使顶点数 $n(\Delta, d(G))$ 达到最大值的网络. 由于该问题在通信及后来出现的互联网设计中具有潜在的应用价值, 故吸引了众多图论和计算机学者的研究兴趣^[2]. 因获得紧的 $n(\Delta, d(G))$ 上界异常困难, 故时至今日此类研究尚未取得突破性进展. 网络设计的另一个问题是高连通度 (高可靠度) 最小布线问题: 给定顶点数 n 和连通度 k , 设计一种边数最小的图. Harary 于 1962 年解决了这一问题^[3]. 然而, Harary 图不能保证网络效率达到最大值.

与网络设计相关的另一个问题是图的能量问题. 1974 年, Gutman^[4] 将图的能量定义为邻接矩阵特征值的绝对值之和, 为图的拓扑结构设计提供一种新的研究思路. 因由图确定邻接矩阵的特征值容易^[3, 5], 但由特征值确定一个图 (任给一组特征值不一定是图的邻接矩阵特征值) 却异常困难, 故用

收稿日期 2025-10-15 录用日期 2026-03-16
Manuscript received October 15, 2025; accepted March 16, 2026
广东省重点领域研发计划 (2021B0101410005), 国家自然科学基金 (61673041) 资助
Supported by Key Area Research and Development Program of Guangdong Province (2021B0101410005) and National Natural Science Foundation of China (61673041)
本文责任编辑 杨涛
Recommended by Associate Editor YANG Tao
1. 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院 北京 100191 2. 中国自动化学会理事会 北京 100190
1. School of Instrumentation and Optoelectronic Engineering, Beihang University, Beijing 100191 2. Council of Chinese Association of Automation, Beijing 100190

Gutman 定义设计网络拓扑结构是一件不可行的事情. 正因如此, 大多数此类研究或者是某些图的能量求解或者是某类图的能量上界估计^[6].

2001 年, Latora 等^[7]首次给出网络效率的定义和计算公式: 网络效率等于所有不同顶点间距离调和平均值的倒数. 上述计算公式在复杂网络研究领域产生了深刻影响^[8], 并在交通和脑科学^[9]等众多领域中得到广泛应用. 因求解距离倒数会产生较大的计算误差, 故网络规模越大, Latora 效率公式的累积计算误差就越大. 此外, Latora 等^[7]的效率公式主要用于网络分析和评价, 而不是且也不能用于高效网络的设计.

针对无向网络拓扑设计中存在着定义适用性差和设计目标单一等问题, 本文取得如下主要创新性成果: 1) 给出一种新的不同于 Gutman 的网络能量定义; 据此并结合 Wiener 指数^[3], 给出一种新的网络效率定义和计算公式, 其计算复杂度和精度均显著优于 Latora 等的网络效率计算公式. 2) 首次给出无向高效网络和无向 k -连通高效网络的定义并证明了这两种网络的存在性. 高效网络是一种能量(信息传输时延)最小的网络; k -连通高效网络是连通度(可靠度)最大、能量最小且边数最少的网络. 3) 给出设计无向 k -连通高效网络的若干指导原则. 上述结果为无向网络的分析与评价, 特别是为无向网络的拓扑结构优化设计提供了理论依据和技术支撑, 且可在信息、物流和交通等网络的分析、评价和设计中推广应用.

1 相关概念和预备知识

定义 1^[3]. 1) 一个图 $G(V, E, \varphi)$ 是一个三元组, 包括顶点集 V 、边集 E 和关系 φ . 若 G 中的每条边均无方向, 称 G 为无向图; 否则, 称 G 为有向图.

2) G 的阶 $n(G) = |V|$ 是 G 中的顶点数; G 的大小 $e(G) = |E|$ 是 G 中边的条数. 当 $n(G) < \infty$ 且 $e(G) < \infty$ 时, 称 G 是有限图, 否则称 G 是无限图.

3) 自环是关联同一个顶点的边; 重边是关联同一对顶点的多条边. 不含自环和重边的图称为简单图.

4) G 中顶点 v 的度, 记作 $d(v)$, 最大顶点度记作 $\Delta(G)$, 最小顶点度记作 $\delta(G)$. 如果 $\Delta(G) = \delta(G)$, 称 G 是正则的; 如果所有顶点的度均是 k , 则称 G 是 k -正则的.

定义 2^[3, 10]. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$:

1) G 中顶点与边的交替序列 $P = v_{i_1}e_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_{k-1}}e_{i_{k-1}}v_{i_k}$ ($i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$) 称为 G 的链, 各边

互异的链称为迹, 各顶点互异的链称为路; 当 P 是路时, P 中的边数 η 称为 P 的长度, 记作 $\eta = |P|$.

2) $\forall u, v \in V$, u 和 v 之间无公共内顶点的路称为独立路; u 和 v 之间独立路的最大条数记作 $p(u, v)$.

3) 若 G 的每一对顶点之间至少有一条路, 则称 G 是连通的; 否则, 称 G 是不连通的.

若无特别声明, 下文论及的图(网络)均是有限简单无向连通图, 且总假设 $n(G) = n \geq 2$. 此外, K_n 表示 n 顶点完全图, P_n 表示 n 顶点路, C_n 表示 n 顶点环, $K_{1, n-1}$ 表示 n 顶点星形树; G_m^n 表示所有 n 顶点 m 条边简单无向连通图的集合.

定义 3^[3, 10]. 1) 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, v_i 和 v_j 是 G 中的任意两个顶点; 当 v_i 和 v_j 之间有 s 条路 P_l ($1 \leq l \leq s$) 时, 称 $d(v_i, v_j) = \min\{k_l = |P_l| | 1 \leq l \leq s\}$ 为 v_i 和 v_j 之间的距离. 2) Wiener 指数: $w(G) = \sum_{u, v \in V(G)} d(u, v)$.

Wiener 用 $w(G)$ 来研究石蜡的沸点. 石蜡的分子式可建模为一个简单无向图, 进而可以得到一个 $w(G)$. 石蜡有多种: 分子链短的石蜡, 其沸点低且 $w(G)$ 小; 反之, 沸点高且 $w(G)$ 大. 由此可见, Wiener 指数 $w(G)$ 可视为一种能量.

定义 4^[3, 10]. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $d_{ij} = d(v_i, v_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$) 表示顶点 v_i 和 v_j 之间的距离: 当 $i = j$ 时, $d_{ii} = 0$; 当 $i \neq j$ 时, d_{ij} 为正整数; 称由元素 d_{ij} 构成的矩阵 $D(d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 G 的距离矩阵.

由定义 4 可知, D 是非负整数对称矩阵且非零元素的个数为 $n(n-1)$. 用 Dijkstra 算法求解 D 的算法复杂度是 $O(n^4t)$ ^[8, 11], 用 Floyd-Warshall 算法求解 D 的算法复杂度是 $O(n^3)$ ^[8, 11].

定义 5^[12]. 设 $G = (V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, $D(d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是 G 的距离矩阵, $d(G) = \max\{d_{ij}\}$ 是 G 的直径, m_s 是 $d_{ij} = s$ ($1 \leq s \leq d(G)$, $1 \leq i, j \leq n$) 的元素总数; 称 $S(G) = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{d(G)}]$ 是 G 的距离谱向量, 简称 G 的距离谱.

由定义 4 和定义 5 可知: 1) $1 \leq d(G) \leq n-1$; 2) m_s 均是正偶数, 且 $\sum_{i=1}^{d(G)} m_i = n(n-1)$; 3) $\sum_{i,j} d_{ij} = \sum_{s=1}^{d(G)} m_s s = \|D\|_1$, $\sum_{i,j} d_{ij}^2 = \sum_{s=1}^{d(G)} m_s s^2 = \|D\|_F^2$ ($\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数). 由此, G 的 Wiener 指数可由 $\|D\|_1$ 表示, 即 $w(G) = \|D\|_1$.

引理 1^[3]. 在 n 个顶点的所有树 T 中, Wiener 指数 $w(K_{1, n-1})$ 取得最小值, 而 $w(P_n)$ 取得最大值, 且仅在这两种情况下取得极值.

定义 6^[3]. 图 G 的一个点分离集或点割是一个顶点集合 $S \subseteq V(G)$, 它使得 $G-S$ 的连通分量多于

一个. G 的连通度记作 $\kappa(G)$, 是 S 大小的最小值, 它使得 $G-S$ 不连通或只有一个顶点. 若 G 的连通度至少为 k , 则称 G 是 k -连通的.

为使定义 6 适合所有的无向图, 通常约定: $\kappa(K_n) = n-1$, $\kappa(K_1) = 0$; 当 $G \neq K_n$ 时, $\kappa(G) \leq n-2$.

定义 7^[3]. 图 G 的一个边分离集或边割是一个边的集合 $F \subseteq E(G)$, 它使得 $G-F$ 的连通分量多于一个. G 的边连通度, 记作 $\kappa'(G)$, 是 F 大小的最小值. 若 G 的每一个边分离集至少含有 k 条边, 则称 G 是 k -边连通的.

引理 2^[3]. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, 则 $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.

2 无向 k -连通高效网络

2.1 无向高效网络

设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, 其邻接矩阵为 A ; A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Gutman 将 G 的能量定义为 $E_A(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ ^[4]. 因任给一组特征值并非就是某一邻接矩阵的特征值, 故由 $E_A(G)$ 确定特征值再确定 A 或 G 不可行. 如此, $E_A(G)$ 不能用于图的构造或网络的拓扑结构设计.

定义 8. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, 其距离矩阵为 D , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 为 D 的特征值, 称 $E_D(G) = (\sum_{i=1}^n \mu_i^2)^{1/2}$ 为 G 的能量.

设 $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_n]$, 由定义 8 可知, $E_D(G) = \|\mu\|_2$, 即 $E_D(G)$ 是特征空间中向量的长度.

引理 3^[13]. 设 $B(b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为一个正规矩阵 ($B^T B = B B^T$), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 B 的特征值, 则 $\sum_{i,j} b_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

因距离矩阵是正规矩阵, 由定义 5、定义 8 和引理 3 可得, $E_D(G) = \|D\|_F$, 即 G 的能量可由其距离矩阵的欧氏范数等价表示. 如此, $E_D(G)$ 由 G 的拓扑结构决定且可通过计算 $\|D\|_F$ 得到, 而计算 $\|D\|_F$ 比求解 D 的特征值要容易得多.

定理 1. 设 $s = (n(n-1))^{1/2}$, $\forall G \in G_m^n$, 则: 1) $w(G) \leq sE_D(G)$, 仅当 $G = K_n$ 时等号成立; 2) $w(K_n) \leq w(G) \leq w(P_n)$; 3) $E_D(K_n) \leq E_D(G) \leq E_D(P_n)$.

证明. 1) 设 G 的距离矩阵为 $D(d_{ij})$, 则 $\forall G \in G_m^n$, $w(G) = \sum_{i,j} d_{ij}$. 因 d_{ij} 中仅有 $n(n-1)$ 个正整数, 故由 Schwarz 不等式 $\sum |a_k b_k| \leq (\sum |a_k|^2)^{1/2} \times (\sum |b_k|^2)^{1/2}$ 可得, $\sum_{i,j} d_{ij} \leq s(\sum_{i,j} d_{ij}^2)^{1/2}$, 即 $w(G) \leq sE_D(G)$. 当 $G = K_n$ 时, $E_D(K_n) = s$, $w(K_n) =$

s^2 , $w(K_n) = sE_D(K_n)$.

2) $\forall G \in G_m^n$, 设 G 的距离谱为 $S(G) = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{d(G)}]$; 由定义 5 可知, $\sum_{i=1}^{d(G)} m_i = n(n-1)$. 当 $G = K_n$ 时, K_n 的直径 $d(K_n) = 1$, $m_{d(K_n)} = n(n-1)$, $w(G) = w(K_n) = n(n-1)$; 当 $G \neq K_n$ 时, G 的直径 $d(G) \geq 2$, $m_{d(G)} \geq 2$, $w(G) > w(K_n)$. 当 $G = P_n$ 时, $d(P_n) = n-1$, $m_{d(P_n)} = 2$, $w(G) = w(P_n)$; 当 $G \neq P_n$ 时, $d(G) \leq n-2$, 再由 $\sum_{i=1}^{d(G)} m_i = n(n-1)$ 可得, $w(G) < w(P_n)$. 综上可得: $\forall G \in G_m^n$, $w(K_n) \leq w(G) \leq w(P_n)$.

3) 类似 2), 可证 3) 的结论成立, 具体证明过程此略. $\square$

定理 1 再次表明, Wiener 指数 $w(G)$ 可视为一种能量. 如此, 可用 $w(G) = \|D\|_1$ 定义简单无向网络的效率. 当然, 也可用 $E_D(G) = \|D\|_F$ 定义网络的效率, 差别在于 $\|D\|_1$ 较 $\|D\|_F$ 更易计算且计算精度更高.

定义 9. 1) 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, 其 Wiener 指数为 $w(G)$, 称 $e_w(G) = n(n-1)w^{-1}(G)$ 为 G 的效率.

2) $\forall G \in G_m^n$, 称使 $e_w(G)$ 取最大值 ($w(G)$ 取最小值) 的 G^* 为高效网络, 即

$$e_w(G^*) = \max_{G \in G_m^n} \{e_w(G)\} = \min_{G \in G_m^n} \{w(G)\}$$

由定义 9 可知: 1) 设 D 的元素的算术平均值为 $\bar{w}(G) = (n(n-1))^{-1}w(G)$, 则 $e_w(G) = \bar{w}^{-1}(G)$; 2) 高效网络 G^* 的设计问题是一个使能量 $w(G)$ 取最小值的网络拓扑优化问题.

在通信和互联网中, 网络时延主要取决于顶点处理数据包的时间. 数据包在两顶点间的传输时延与该数据包所经历的距离 (等于顶点数减 1) 成正比. 如此, 网络顶点间的平均距离 $\bar{w}(G)$ 越小, 网络时延就越小, 网络的传输效率 $e_w(G)$ 就越高.

定理 2. 至少存在一个 $G^* \in G_m^n$, 使得 $e_w(G^*)$ 达到最大值.

证明. 设 $y = |G_m^n|$ 表示 G_m^n 中图的个数, 因 G_m^n 不是空集, 故 $y \geq 1$. 因 n 顶点简单无向图 (包括不连通图) 的个数为 $2^{C_n^2}$ ^[8], 故 $y < 2^{C_n^2}$. 如此, $1 \leq y < 2^{C_n^2}$. 因 $\forall G \in G_m^n$, $w(G)$ 为偶数, 故由 G_m^n 可以生成一个良序集 $W_m^n = \{w(G) | G \in G_m^n\}$. 其中的最小元 $w(G^*)$ (可能不止一个) 所对应的 $G^* \in G_m^n$ 可使 $e_w(G^*)$ 达到最大值. $\square$

定理 2 表明高效网络 G^* 存在. 由引理 1 可知, $K_{1, n-1}$ 就是 1-连通高效网络.

定理 3. $\forall G \in G_m^n$, $0 < e_w(G) \leq 1$.

证明. 设 $\bar{w}(G) = w(G)(n(n-1))^{-1}$, 由定理 1 及相关证明可得, $1 \leq \bar{w}(G) \leq \bar{w}(P_n)$. 由于 $w(P_n) = \sum_{s=1}^{d(P_n)} m_s s = \sum_{s=1}^{n-1} m_s s < n(n-1)^2$, 故 $\bar{w}(P_n) < n-1$. 如此, $(n-1)^{-1} < e_w(G) \leq 1$. 因 G 为有限图, 故 $\forall n < \infty$, 都有 $(n-1)^{-1} > 0$, $0 < e_w(G) \leq 1$. 其中, 仅当 $G = K_n$ 时等号成立. $\square$

定理 4. 设 $G_i(V_i, E_i, \varphi_i) \in G_m^n (i = 1, 2)$, $\mathbf{S}(G_i)$ 和 $d(G_i)$ 分别是 G_i 的距离谱和直径: 1) 若 $\mathbf{S}(G_1) = \mathbf{S}(G_2)$, 则 $e_w(G_1) = e_w(G_2)$; 2) 若 $d(G_1) = d(G_2)$ 且 $m_{d(G_1)} < m_{d(G_2)}$, 则 $e_w(G_1) > e_w(G_2)$; 3) 若 $d(G_1) < d(G_2)$, 则 $e_w(G_1) \geq e_w(G_2)$.

证明. 1) 设 $\mathbf{S}(G_1) = \mathbf{S}(G_2)$. 另设 $\mathbf{S}(G_i) = [m_1^{(i)} m_2^{(i)} \cdots m_{d(G_i)}^{(i)}] (i = 1, 2)$. 如此, $m_s^{(1)} = m_s^{(2)} (1 \leq s \leq d(G_1))$. 再由定义 5 和定义 9 可得: $w(G_1) = w(G_2)$, $e_w(G_1) = e_w(G_2)$.

2) 设 $d(G_1) = d(G_2)$ 且 $m_{d(G_1)} < m_{d(G_2)}$. 因 $\sum_{s=1}^{d(G_1)} m_s^{(1)} = \sum_{s=1}^{d(G_2)} m_s^{(2)} = n(n-1)$, 当上述假设成立时, $\sum_{s=1}^{d(G_1)} m_s^{(1)} s < \sum_{s=1}^{d(G_2)} m_s^{(2)} s$, 即 $w(G_1) < w(G_2)$; 再由定义 9 可知, $e_w(G_1) > e_w(G_2)$.

3) 设 $d(G_1) < d(G_2)$. 此种情况下, $\mathbf{S}(G_1)$ 的维数小于 $\mathbf{S}(G_2)$ 的维数, 即 $\dim \mathbf{S}(G_1) < \dim \mathbf{S}(G_2)$. 因 $m_s^{(1)}$ 和 $m_s^{(2)}$ 均是偶数且 $\sum_{s=1}^{d(G_1)} m_s^{(1)} = \sum_{s=1}^{d(G_2)} m_s^{(2)} = n(n-1)$, 当 $d(G_1) < d(G_2)$ 时仅有两种可能: $w(G_1) < w(G_2)$, $e_w(G_1) > e_w(G_2)$; $w(G_1) = w(G_2)$, $e_w(G_1) = e_w(G_2)$. $\square$

不难理解, 两图同构其效率必相等. 但距离谱相等仅是两图同构的必要条件^[12], 故两图同效未必一定同构.

定理 4 中的 2) 和 3) 表明: 图的直径越小, 网络效率越高. 就通信和互联网而言, 直径越小, 网络时延也越小. 这表明无向高效网络是一种传输时延最小的网络.

$\forall G \in G_m^n$, 定义 9 也适用于 G 的任意连通子图 $G_i \subseteq G$. 为区别起见, 称 $e_w(G)$ 为 G 的全局效率; 称子图 G_i 的效率 $e_w(G_i)$ 为 G 的局部效率. 局部效率常用于大规模网络 (如脑网络^[9]) 的子网络分析和评估.

设 $\bar{G}(V, E, \varphi)$ 是简单加权无向连通图, $e_{ij} \in E$ 的权值为 w_{ij} . $\forall v_i, v_j \in V$, v_i 至 v_j 的距离可表示为: $\bar{d}_{ij} = \min\{|L_{ij}^{(l)}| | 1 \leq l \leq p_{ij}\}$, 其中, $L_{ij}^{(l)} = v_i e_{i, k_1} v_{k_1} \cdots v_{k_t} e_{k_t, j} v_j$ 是 v_i 至 v_j 的第 l 条独立路, $|L_{ij}^{(l)}| = w_{i, k_1} + \cdots + w_{k_t, j}$ 是 $L_{ij}^{(l)}$ 的长度, p_{ij} 是 v_i 和 v_j 之间独立路总数. 由 $\bar{d}_{ij}$ 可以得到加权图 $\bar{G}$ 的距离矩阵 $\bar{\mathbf{D}}$. 此种情况下, 若令 Wiener 指数 $w(\bar{G}) = \|\bar{\mathbf{D}}\|_1$, 则定义 9 也适用于简单加权无向连

通图.

若 G 不连通, 则至少存在一对顶点 $v_i, v_j \in V(G)$, 使得 $d_{ij} = \infty$. 此种情况下, $w(G) = \|\mathbf{D}\|_1 = \infty$, 由定义 9 可得 $e_w(G) = 0$. 其物理意义是: $d_{ij} = \infty$ 时, G 的直径 $d(G) = \infty$, 网络传输时延为无穷大, 网络传输效率等于零.

2001 年, Latora 等^[7] 将网络的效率定义为

$$e_l(G) = (n(n-1))^{-1} \sum_{i \neq j}^n d_{ij}^{-1}$$

其中, d_{ij} 是距离矩阵 $\mathbf{D}(d_{ij})$ 的非零元素. 设 $N = n(n-1)$, $R = \sum_{i \neq j}^n d_{ij}^{-1}$, 则 d_{ij} 的调和平均值为 $\bar{H}(G) = NR^{-1}$, $e_l(G) = \bar{H}^{-1}(G)$.

下面简要分析定义 9 中的效率 $e_w(G)$ 与 Latora 等^[7] 的效率 $e_l(G)$ 的区别与联系: 1) $e_w(G)$ 是非零 d_{ij} 算术平均值 $\bar{w}(G) = (n(n-1))^{-1} \sum_{i \neq j}^n d_{ij}$ 的倒数; $e_l(G)$ 是非零 d_{ij} 调和平均值 $\bar{H}(G)$ 的倒数. 设 $\bar{E}_D(G) = (n(n-1))^{-1/2} E_D(G)$; 由定义 8 可知, $\bar{E}_D(G)$ 是一种能量, 且 $\bar{w}(G) \leq \bar{E}_D(G)$. 如此, $\forall G \in G_m^n$: $\bar{H}(G) \leq \bar{w}(G) \leq \bar{E}_D(G)$ ^[14], $\bar{E}_D^{-1}(G) \leq e_w(G) \leq e_l(G)$, 等号成立仅当 $G = K_n$. 这表明: 1) 除 $G = K_n$ 外, $e_w(G)$ 更接近 $\bar{E}_D^{-1}(G)$ 且 $e_w(G) < e_l(G)$, 即 $e_l(G)$ 的估值偏大; 2) 因需求解 $n(n-1)$ 个 d_{ij}^{-1} , 故求解 $e_l(G)$ 的算法复杂度和计算误差均大于 $e_w(G)$; 3) $e_l(G)$ 可用于不连通无向图, 且当 G 的 n 个顶点全为孤立顶点时, $e_l(G) = 0$. 补充定义后, $e_w(G)$ 也可用于不连通无向图; 与 $e_l(G)$ 不同的是, 对于任意的不连通无向图 G , $e_w(G) \equiv 0$.

2.2 无向 k -连通高效网络

本节将给出无向 k -连通高效网络的定义和设计原则. 在此之前, 先引入图的对称性定义、Harary 图及相关结论.

定义 10. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$:

1) $\forall i \neq j$, 若 v_i 到 G 的每一顶点的距离与 v_j 到每一顶点的距离按取值大小一一对应相等, 则称 v_i 与 v_j 在 G 中对称.

2) 对 G 的所有顶点进行分类, 使同一类中所有的顶点两两对称, 称这种分类数为 G 的对称指数, 记作 $\psi(G)$ ($\psi(G) \in \{1, 2, \cdots, n\}$); 称 $\psi(G)$ 的倒数 $\psi^{-1}(G)$ 为 G 的对称度.

3) 若 $\psi(G) = 1$, 称 G 完全对称; 若 $2 \leq \psi(G) < n$, 称 G 不完全对称; 若 $\psi(G) = n$, 称 G 完全不对称.

由定义 10 可知: 若 G 的距离矩阵 $\mathbf{D}$ 的某两行元素按取值大小一一对应相等, 则这两行对应的顶

点对称; 若 D 的 n 行元素按取值大小均一一对应相等, 则 G 完全对称. 这表明, 利用 D 可确定 $\psi(G)$, 进而可判定任意简单无向连通图的对称性.

由顶点间距离描述的定义 10 既直观又便于理解. 此前, 图的对称性由自同构群的点传递性描述^[3, 15], 不仅抽象、费解且仅适用于点传递图. 点传递图中所有顶点的位置和邻接关系都一样或不可区分. 如此, 点传递图就是完全对称图.

设 G 是完全对称图, 由定义 10 和图论的相关知识可知: G 的各顶点离心率都相等; G 的直径与半径相等; G 的所有顶点都是中心. 当顶点数 $n \geq 3$ 时: 所有 1- 连通简单无向图 (包括所有的树) 都不是完全对称图; $K_{1, n-1}$ 是对称指数最大的树, $\psi(K_{1, n-1}) = 2$.

引理 4^[10]. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图; $\forall u, v \in V, p(u, v)$ 是 u 和 v 之间独立路的最大条数; 则 $\kappa(G) = \min_{u, v \in V} \{p(u, v)\}$.

定理 5. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向连通图, $|V| = n$ 且 $|E| \geq n$; 若 $\psi(G) = 1$, 则存在 $k \geq 2$, 使得: 1) G 是 k - 正则图, $e(G) = kn/2$; 2) G 是 k - 连通图, 即 $\kappa(G) = k$.

证明. 设 $|E| \geq n$ 且 $\psi(G) = 1$. 1) 因 G 是完全对称图, 故 G 的所有顶点的邻接关系都一样. 如此, 存在某正整数 $k \geq 2$, 使得 $\Delta(G) = \delta(G) = k$, 即 G 是 k - 正则图, $e(G) = kn/2$ (注意: 仅当 kn 是偶数时, G 是 k - 正则图).

2) 由 1) 的结果和引理 2 可知, $\kappa'(G) \leq k$. 设 $F_i \subset E(G)$ ($1 \leq i \leq l$) 是 G 的最小边割. 因 G 是完全对称图, 故 $|F_1| = |F_2| = \dots = |F_l| = k$. 如此, $\kappa'(G) = k$. $\forall v_i, v_j \in V$, 设 $p_{ij}(v_i, v_j)$ 是 v_i 和 v_j 之间独立路的最大条数, 则对一切 $1 \leq i, j \leq n$, 都有 $p_{ij}(v_i, v_j) = k$; 否则, $\psi(G) > 1$, 与定理假设矛盾. 此外, 若对一切 $1 \leq i, j \leq n, p_{ij}(v_i, v_j) = s < k$, 则可推得 $\delta(G) = s < k$, 与 1) 的结果矛盾. 综上并由引理 4 可得, 当 $|E| \geq n$ 且 $\psi(G) = 1$ 时, $\kappa(G) = k$. $\square$

定理 5 表明, 当 $k \geq 2$ 时, 完全对称图都是 k - 正则 k - 连通图, 但 k - 正则 k - 连通图不一定是完全对称图.

Harary 图^[3, 10] 的构造方法如下: 给定 $2 \leq k < n$, 将 n 个顶点等间距地排成一个环: 1) 如果 k 是偶数, 将每个顶点分别与环的每个方向上距该点最近的 $k/2$ 个顶点置为相邻, 由此得到 Harary 图 $H_{k, n}$; 2) 如果 k 是奇数而 n 是偶数, 则将每个顶点分别与每个方向上距该点最近的 $(k-1)/2$ 个顶点置为相邻, 并使该点和与之相对的顶点也成为相邻, 由此得到 $H_{k, n}$; 3) 当 k 和 n 都是奇数时, 用模 n 得

到的整数给顶点编号, 再对满足 $0 \leq i \leq (n-1)/2$ 的每个 i 值, 向已得到的 $H_{k-1, n}$ 中添加边 $i \leftrightarrow i + (n-1)/2$, 由此得到 $H_{k, n}$.

由前面的分析和 Harary 图的构造方法可知: 当 k 是偶数, 或 k 是奇数而 n 是偶数时, $\psi(H_{k, n}) = 1$; 当 k 和 n 都是奇数时, $\Delta(H_{k, n}) = k+1$, 其他 $n-1$ 个顶点的度均为 $\delta(H_{k, n}) = k$, $\psi(H_{k, n}) \geq 2$. 这表明 Harary 图是一类对称度很高的图.

引理 5^[3]. Harary 图是 k - 连通图, 即 $\kappa(H_{k, n}) = k$; 因此 n 顶点 k - 连通图的最小边数是 $\lceil kn/2 \rceil$ ($\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数).

k - 连通图要求 $\delta(G) \geq k$ 且其边数至少为 $\lceil kn/2 \rceil$ ^[3]. 引理 5 表明, 边数的最小下界 $\lceil kn/2 \rceil$ 可以达到, Harary 图就是边数最小的 k - 连通图.

网络的连通度越高, 网络的容错性以及信息在网络中的传输质量就越高. 因此, 高效网络的设计必须考虑网络连通度这一重要性能指标. 此外, 若通信链路的建设和维护费用非常昂贵, 则高效网络的设计还需将边数最小化作为优化指标. 但定义 9 中的高效网络并没有将连通度和网络边数作为优化指标.

定义 11. 1) 设 T 是所有无向树的集合, 称图 $W^* = \max_{W \in T} \{e_w(W)\} = K_{1, n-1}$ 是 1- 连通高效网络. 2) 设 Φ 是所有 $\kappa(G) = k$ ($2 \leq k < n$) 且 $e(G) = \lceil kn/2 \rceil$ 的简单无向图集合: $\forall W \in \Phi$, 称使效率 $e_w(W)$ 达到最大值的图 W^* 为无向 k - 连通高效网络, 即

$$e_w(W^*) = \max_{W \in \Phi} \{e_w(W)\} = \min_{W \in \Phi} \{w(W)\}$$

由定义 11 可知: 无向 k - 连通高效网络的设计问题是一个给定顶点数 n 和连通度 k , 求使效率最大且边数最小的网络拓扑优化问题.

定理 6. k - 连通高效网络 W^* 存在.

证明. 由树的性质可知, $\kappa(K_{1, n-1}) = 1$, $e(K_{1, n-1}) = n-1$ 达到最小值; 由引理 1 可知, $e_w(K_{1, n-1})$ 达到最大值. 如此, $W^* = K_{1, n-1}$ 是 1- 连通高效网络. 因环 $C_n \in \Phi$ 是 Harary 图 $H_{2, n}$, 故 $\kappa(C_n) = 2$, $e(C_n) = n$ 达到最小值. 由于 C_n 在距离谱意义下唯一, 故由定理 4 和定义 11 可知, $e_w(C_n)$ 达到最大值. 综上可知, $W^* = C_n$ 是 2- 连通高效网络. 当 $3 \leq k < n$ 时, 由引理 5 可知, Harary 图 $H_{k, n}$ 是边数最小的 k - 连通图; 如此, Φ 不是空集. 若存在无向图 $W_i \in \Phi$ ($i \geq 1$) 且 $w(W_i) < w(H_{k, n})$, 则由定义 11 可知, 使 $w(W^*) = \min_i \{w(W_i)\}$ 的 W^* 就是 k - 连通高效网络; 否则, $W^* = H_{k, n}$ 就是 k - 连通高效网络. $\square$

为区别 Harary 图起见, 本文用 $W_{k,n}$ 表示 n 顶点无向 k -连通高效网络; 其中, $n \geq 2, k \geq 1$. 由定理 6 的证明可知, $W_{1,n} = K_{1,n-1}, W_{2,n} = C_n$. 当 $k \geq 3$ 时, 可参照 Harary 图设计 $W_{k,n}$, 具体原则如下:

- 1) 使 $e(W_{k,n}) = e(H_{k,n}) = \lceil kn/2 \rceil$;
- 2) 使 $d(W_{k,n})$ 和 $m_{d(W_{k,n})}$ 达到最小值, 从而使 $e_w(W_{k,n}) (\geq e_w(H_{k,n}))$ 达到最大值;
- 3) 使 $|\psi(W_{k,n}) - \psi(H_{k,n})| \leq 1$, 从而使 $\kappa(W_{k,n}) = \kappa(H_{k,n}) = k$.

引理 6^[3]. 设 $G(V, E, \varphi)$ 是简单无向图且 $|V| = n$; 若 $\delta(G) \geq n-2$, 则 $\kappa(G) = \delta(G)$.

定理 6 表明, $W_{k,n}$ 的边数达到最小值且效率达到最大值.

定理 7. $\kappa(W_{k,n}) = \delta(W_{k,n}) = k$.

证明. 由定理 6 的证明可知, $k=1$ 和 $k=2$ 时, 定理 7 的结论成立. 设 $k=l \geq 3$ 时, $\kappa(W_{l,n}) = \delta(W_{l,n}) = l$. 若设 $k=l+1$ 时, $l = \kappa(W_{l+1,n}) < \delta(W_{l+1,n}) = l+1$, 则当 $l=n-3$ 时, $\kappa(W_{n-2,n}) = n-3$, $\delta(W_{n-2,n}) = n-2$, $\kappa(W_{n-2,n}) < \delta(W_{n-2,n})$. 但由引理 6 可知, 当 $\delta(W_{n-2,n}) = n-2$ 时, $\kappa(W_{n-2,n}) = n-2$, 与上述结果不一致. 如此, $k=l+1$ 时, $\kappa(W_{l+1,n}) < \delta(W_{l+1,n})$ 的假设不成立. 综上可知, 对一切 $1 \leq k < n$, $\kappa(W_{k,n}) = k$. $\square$

至此可知, $W_{k,n}$ 是连通度最大、边数最小且效率最高的网络. 就互联网而言, $W_{k,n}$ 是可靠度最大、通信链路数最小且数据传输时延最小的网络.

由引理 6 并仿照定理 6 进一步可证, $W_{n-2,n} = H_{n-2,n}, W_{n-1,n} = H_{n-1,n} = K_n$.

需要说明的是, 当 $3 \leq k \leq n-3$ 时, 尚未找到设计 (构造) $W_{k,n}$ 的一般方法.

2.3 无向 k -连通高效网络示例

例 1. 构造一组 Harary 图 $H_{k,n}$ 和一组无向 k -连通高效网络 $W_{k,n}$, 并用黑色和红色分别表示 $H_{k,n}$ 和 $W_{k,n}$ (见图 1). 图 1 中, 第 1 列为: $H_{3,10}, H_{3,11}, H_{3,12}, H_{3,13}, H_{3,14}, H_{3,15}$; 第 2 列为: $W_{3,10}, W_{3,11}, W_{3,12}, W_{3,13}, W_{3,14}, W_{3,15}$; 第 3 列为: $H_{4,10}, H_{4,11}, H_{4,12}, H_{4,13}, H_{4,14}, H_{4,15}$; 第 4 列为: $W_{4,10}, W_{4,11}, W_{4,12}, W_{4,13}, W_{4,14}, W_{4,15}$. 对于相同的 k 和 n , 分别给出 $H_{k,n}$ 和 $W_{k,n}$ 的直径 $d(\cdot)$ 、Wiener 指数 $w(\cdot)$ 、效率 $e_w(\cdot)$ (用百分数表示) 以及对称指数 $\psi(\cdot)$ 的值 (见表 1 和表 2), 用于比较和说明 $W_{k,n}$ 的优越性. 为节省篇幅, 本文没有给出用于计算上述参数的距离矩阵.

由 Harary 图的构造方法和图 1 不难发现:

- 1) $H_{k,n}$ 的所有顶点均在同一个环上, 即 C_n 是

$H_{k,n}$ 的生成环. 因有生成环的图是 Hamilton 图^[8], 故所有的 Harary 图都是 Hamilton 图; 2) 除 $W_{4,11}$ 之外, 多数 $W_{k,n}$ 不是 Hamilton 图.

观察表 1 和表 2 可知: 1) 对于 $k=3, 4, 10 \leq n \leq 15$, 均有 $e_w(W_{k,n}) > e_w(H_{k,n})$. 这表明, 对于相同的 k 和 n , $W_{k,n}$ 的效率大于 $H_{k,n}$ 的效率. 2) 固定 k 增加 n , 网络的稀疏性增大, $W_{k,n}$ 和 $H_{k,n}$ 的效率都会下降; 固定 n 增加 k (网络边数增加), 网络的聚集系数将增大^[8], $W_{k,n}$ 和 $H_{k,n}$ 的效率都会上升, 但这需要增加网络的建设成本和维护费用. 3) $d(W_{3,10}) = 2, d(H_{4,10}) = 3$, 但 $e_w(W_{3,10}) = e_w(H_{4,10}) = 0.6$. 这表明, 网络效率与网络直径密切相关但不完全由网络直径决定. 4) 对于 $k=3, 4, 10 \leq n \leq 15, |\psi(W_{k,n}) - \psi(H_{k,n})| \leq 1$. 5) $W_{3,10}$ 是著名的 Peterson 图. 除已知是强正则图^[3] 之外, 它还是 3-连通高效网络和完全对称图.

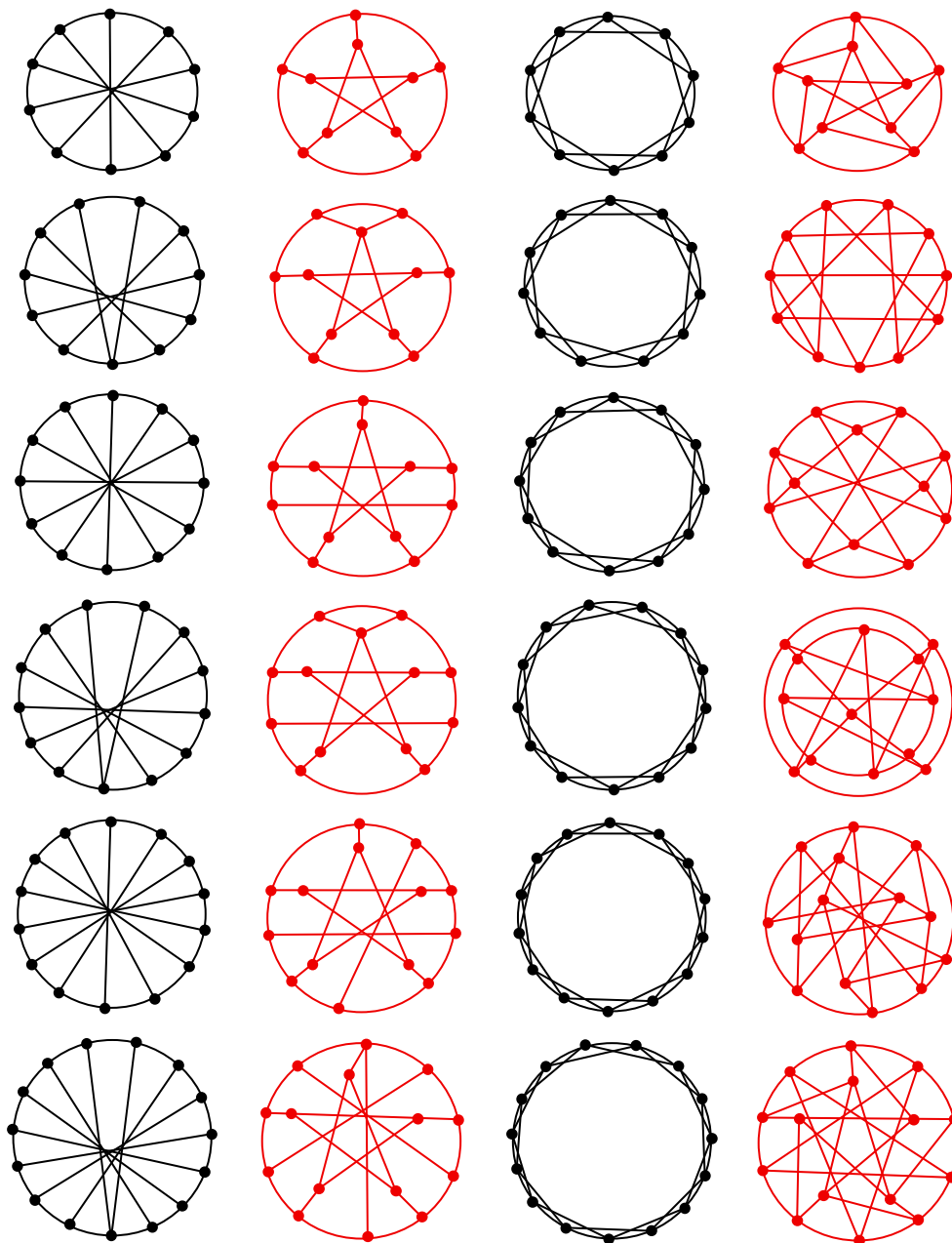
例 2. 当图的顶点数 $n \geq 4$ 时, 经计算和归纳可得: 1) $w(W_{1,n}) = 2(n-1)^2, e_w(W_{1,n}) = n/(2(n-1))$; 2) $w(W_{2,n}) = n^3/4, e_w(W_{2,n}) = 4(n-1)/n^2$; 3) 当 $n \geq 4$ 且 n 为偶数时, $w(W_{n/2,n}) = n(3n-4)/2, e_w(W_{n/2,n}) = 2(n-1)/(3n-4)$. 当顶点数 $n=10, 20, 30, 40, 50$ 和 60 时, 效率 $e_w(W_{1,n}), e_w(W_{2,n})$ 和 $e_w(W_{n/2,n})$ 的计算结果如表 3 所示.

由前面的分析及表 3 可知: 星形图 $W_{1,n}$ 的效率中等, 环 $W_{2,n}$ 的效率偏低, $W_{n/2,n}$ 的效率较高. 所有网络的效率均随 n 的增大而单调递减 ($n \rightarrow \infty, e_w(W_{1,n}) \rightarrow 1/2, e_w(W_{2,n}) \rightarrow 0, e_w(W_{n/2,n}) \rightarrow 2/3$).

3 结束语

本文的研究内容属于简单无向连通图 (网络) 的拓扑结构设计.

本文的主要贡献可概括为如下几个方面: 1) 受 Gutman 的能量定义启发, 给出了一种新的简单无向连通图 G 的能量定义 $E_D(G) = \|D\|_F$. 这种关系不仅物理意义明确且也为图或网络的拓扑结构分析带来了便利. 2) 通过分析 Wiener 指数 $w(G)$ 与 $E_D(G)$ 的关系, 指明 $w(G)$ 可视为一种能量. 基于 $w(G)$, 给出了一种新的简单无向连通图效率定义与计算式 $e_w(G)$. 理论分析表明: 就简单无向连通图而言, $e_w(G)$ 的计算复杂度和计算误差均小于 Latora 等的效率计算式 $e_l(G)$; $e_w(G)$ 既可用于全局网络也可用于局部网络, 这为大规模网络效率的分析和评估提供了理论依据. 3) 首次给出了高效网络和 k -连通高效网络的定义, 并证明了无向高效网络和无向 k -连通高效网络的存在性; 给出了设计 k -连通高效网络的指导原则, 并构造了一组 k -连通高效

图 1 Harary 图 $H_{k,n}$ 和 k -连通高效网络 $W_{k,n}$ 示例图Fig. 1 Harary graph $H_{k,n}$ and example diagram $W_{k,n}$ of k -connected efficient network

网络. 4) 给出了简单无向连通图的对称性定义及其度量指标, 这种定义不仅直观、易于理解且也便于计算. 证明了点传递图就是完全对称图; 完全对称图都是 k -正则 k -连通图. 图的对称性定义及上述结果均是图论或网络科学中的新结果.

无向高效网络和无向 k -连通高效网络的设计本质上是网络拓扑结构的优化设计问题. 但令人遗憾的是, 迄今为止我们还没有找到设计这种最优网络的一般方法. 与此密切相关的另一个问题是: 当连通度 k 和顶点数 n 的乘积 kn 为偶数时, Harary

图 $H_{k,n}$ 均是完全对称图, 但 k -连通高效网络 $W_{k,n}$ 却不全是完全对称图 ($|\psi(W_{k,n}) - \psi(H_{k,n})| \leq 1$). 这种对称性破缺的内在机制究竟如何, 目前尚不得而知.

本文的主要成果可为无向网络的效率分析与评估以及无向 k -连通高效网络的设计提供理论依据和技术支撑. 需要说明的是, 本文的结论也适用于简单有向强连通网络. 今后, 我们将探索人工智能高效算法, 在确保连通度的条件下, 以期得到边数最小且效率次优的 k -连通高效网络.

表 1 $H_{k,n}$ 相关参数列表
Table 1 The relevant parameters of $H_{k,n}$

n	k	$d(H_{k,n})$	$w(H_{k,n})$	$e_w(H_{k,n})$ (%)	$\psi(H_{k,n})$
10	3	3	170	52.9	1
11	3	3	216	50.9	3
12	3	3	276	47.8	1
13	3	4	342	45.6	4
14	3	4	434	41.9	1
15	3	4	516	40.7	4
10	4	3	150	60.0	1
11	4	3	198	55.6	1
12	4	3	252	52.4	1
13	4	3	312	50.0	1
14	4	4	392	46.4	1
15	4	4	480	43.8	1

表 2 $W_{k,n}$ 相关参数列表
Table 2 The relevant parameters of $W_{k,n}$

n	k	$d(W_{k,n})$	$w(W_{k,n})$	$e_w(W_{k,n})$ (%)	$\psi(W_{k,n})$
10	3	2	150	60.0	1
11	3	3	196	56.1	4
12	3	3	256	51.6	2
13	3	3	316	49.4	3
14	3	3	378	48.1	1
15	3	3	442	47.5	3
10	4	2	140	64.3	1
11	4	2	176	62.5	1
12	4	2	216	61.1	1
13	4	2	260	60.0	1
14	4	3	314	58.0	2
15	4	3	390	53.8	1

表 3 $e_w(W_{k,n})$ 的计算结果 (%)
Table 3 Calculation results of $e_w(W_{k,n})$ (%)

n	$e_w(W_{1,n})$	$e_w(W_{2,n})$	$e_w(W_{n/2,n})$
10	55.6	36.0	69.2
20	52.6	19.0	67.9
30	51.7	12.9	67.4
40	51.3	9.8	67.2
50	51.0	7.8	67.1
60	50.8	6.6	67.0

参考文献

1 Elspas B. Topological constraints on interconnection-limited logic. In: Proceedings of the 5th Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. Princeton, USA: IEEE, 1964. 133–137

2 Erdős P, Fajtlowicz S, Hoffman A J. Maximum degree in graphs of diameter 2. *Networks*, 1980, **10**(1): 87–90

3 West D B. *Introduction to Graph Theory* (Second edition). Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 2001.

4 Gutman I. Bounds for total π -electron energy. *Chemical Physics Letters*, 1974, **24**(2): 283–285

5 Mowshowitz A. The characteristic polynomial of a graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1972, **12**(2): 177–193

6 Koolen J H, Moulton V. Maximal energy graphs. *Advances in Applied Mathematics*, 2001, **26**(1): 47–52

7 Latora V, Marchiori M. Efficient behavior of small-world networks. *Physical Review Letters*, 2001, **87**(19): Article No. 198701

8 Zhang Sheng, Dai Wei-Kai, Wu Feng, Lan Wen-Xiang. Global efficiency estimation method of complex network based on fractal property. *Journal on Communications*, 2020, **41**(7): 204–212
(张胜, 戴维凯, 吴锋, 蓝文祥. 基于分形特性的复杂网络全局效率估计方法. 通信学报, 2020, **41**(7): 204–212)

9 Avena-Koenigsberger A, Misic B, Sporns O. Communication dynamics in complex brain networks. *Nature Reviews Neuroscience*, 2018, **19**(1): 17–33

10 Wang Shu-He. *Graph Theory*. Beijing: Science Press, 2004.
(王树禾. 图论. 北京: 科学出版社, 2004.)

11 Yin Jian-Hong, Wu Kai-Ya. *Graph Theory and Its Algorithm*. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2003.
(殷剑宏, 吴开亚. 图论及其算法. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2003.)

12 Wang Zhuo, Wang Cheng-Hong. Isomorphism determination methods for simple undirected graphs. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(9): 1878–1888
(王卓, 王成红. 简单无向图的同构判定方法. 自动化学报, 2023, **49**(9): 1878–1888)

13 Chen Jing-Liang, Chen Xiang-Hui. *Special Matrices*. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.
(陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵. 北京: 清华大学出版社, 2001.)

14 Kuang Ji-Chang. *Applied Inequalities* (Second edition). Changsha: Hunan Education Publishing House, 1993.
(匡继昌. 常用不等式. 第2版. 长沙: 湖南教育出版社, 1993.)

15 Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Transactions on Computers*, 1989, **38**(4): 555–566



王 卓 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院教授. 2013 年获得美国伊利诺伊大学芝加哥分校电子与计算机工程系博士学位. 主要研究方向为基于数据的系统分析与控制方法和网络理论. 本文通信作者.

E-mail: zhuowang@buaa.edu.cn

(WANG Zhuo Professor at the School of Instrumentation and Optoelectronic Engineering, Beihang University. He received his Ph.D. degree in the Electrical and Computer Engineering Department, University of Illinois at Chicago, USA in 2013. His research interests include data-based system analysis, control methods, and network theory. Corresponding author of this paper.)



王成红 中国自动化学会常务委员会研究员. 1997 年获得博士学位. 主要研究方向为运筹学与控制论, 图论及其应用.

E-mail: chenghwang@163.com

(WANG Cheng-Hong Fellow researcher of the Council of Chinese Association of Automation. He received his Ph.D. degree in 1997. His research interests include operational research and cybernetics, graph theory and its applications.)