

一类不确定离散时间系统有限次迭代学习误差跟踪控制

陈强^{1,2,3} 葛之琳¹ 成云¹ 王守勤¹ 何熊熊¹

摘要 针对一类在有限时间内执行重复任务的不确定离散时间系统轨迹跟踪问题, 提出一种有限次迭代学习误差跟踪控制方法. 首先, 构造不依赖于参考轨迹的期望误差轨迹, 放宽传统迭代学习控制中的初值一致条件, 且离散形式的期望误差轨迹设计仅需已知每次迭代的误差初值, 简化设计要求. 其次, 通过在迭代轴上构建饱和迭代吸引律, 设计带有干扰补偿的迭代学习控制器, 并推导出跟踪误差的稳态误差带和满足精度要求所需的最大迭代次数表达式, 根据期望精度选择控制器参数, 在参数设计阶段保证系统鲁棒性, 实现跟踪误差有限次迭代收敛. 最后, 通过数值仿真和实验结果验证所提控制方法的有效性.

关键词 有限次迭代学习控制; 误差跟踪; 不确定离散时间系统; 迭代吸引律

引用格式 陈强, 葛之琳, 成云, 王守勤, 何熊熊. 一类不确定离散时间系统有限次迭代学习误差跟踪控制. 自动化学报, 2026, 52(4): 794–804

DOI 10.16383/j.aas.c250383 **CSTR** 32138.14.j.aas.c250383

Finite-iteration Learning Error-tracking Control for a Class of Uncertain Discrete-time Systems

CHEN Qiang^{1,2,3} GE Zhi-Lin¹ CHENG Yun¹ WANG Shou-Qin¹ HE Xiong-Xiong¹

Abstract In this paper, a finite-iteration learning error-tracking control method is proposed for the trajectory tracking problem of a class of uncertain discrete-time systems that perform repetitive tasks in finite time. Firstly, a desired error trajectory that is independent of the reference trajectory is constructed to relax the initial value consistency condition in traditional iterative learning control. Moreover, the design of the discrete form of the desired error trajectory only requires the initial error values for each iteration, simplifying the design requirements. Secondly, by constructing a saturated iterative attraction law along the iterative axis, an iterative learning controller with disturbance compensation is designed, and the steady-state error band of the tracking error and the expression of the maximum number of iterations required to meet the accuracy requirements are derived. The controller parameters are selected based on the expected accuracy, and the robustness of the system is guaranteed in the parameter design stage to achieve finite-iteration convergence of the tracking error. Finally, the effectiveness of the proposed control method is verified through numerical simulation and experimental results.

Keywords finite-iteration learning control; error-tracking; uncertain discrete-time system; iterative attraction law

Citation Chen Qiang, Ge Zhi-Lin, Cheng Yun, Wang Shou-Qin, He Xiong-Xiong. Finite-iteration learning error-tracking control for a class of uncertain discrete-time systems. *Acta Automatica Sinica*, 2026, 52(4): 794–804

收稿日期 2025-08-11 录用日期 2025-12-31

Manuscript received August 11, 2025; accepted December 31, 2025

国家自然科学基金 (U25A20452, 62222315, 62233016), 浙江省自然科学基金重点项目 (LZ26F030004), 浙江省属高校基本科研业务费专业资金 (RF-C2024001), 浙江省博士后科研项目择优 (ZJ2024063) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (U25A20452, 62222315, 62233016), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LZ26F030004), Fundamental Research Funds for the Provincial Universities of Zhejiang (RF-C2024001), and Zhejiang Postdoctoral Research Project Optimal Foundation of China (ZJ2024063)

本文责任编辑 王鼎

Recommended by Associate Editor WANG Ding

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江全省复杂系统智能感知与控制重点实验室 杭州 310023 3. 绿色化学合成与转化技术全国重点实验室 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. Zhejiang Key Laboratory of Intelligent Perception and Control for Complex Systems, Hang-

zhou 310023 3. State Key Laboratory of Green Chemical Synthesis and Conversion, Hangzhou 310023

迭代学习控制作为一种实用高效的控制方法, 其核心思想是将学习引入控制策略中. 对于在有限时间区间内具有重复运行特性的系统, 该方法利用前一次或前几次迭代的数据经验来优化当前的控制器以提高控制性能, 适应性强、易于实现且可获得高精度的输出跟踪性能^[1]. 其本质是一种数据驱动^[2]策略, 通过历史数据来更新控制器. 经过多年的发展, 迭代学习控制取得丰富的研究成果并广泛应用于实际系统及工业制造中, 如列车系统^[3]、机械臂系统^[4]以及电机系统^[5]. 早期的迭代学习控制局限于线性系统或者满足全局 Lipschitz 条件的非线性系统. 自适应迭代学习控制^[6–9]的提出弥补了早期迭代学

zhou 310023 3. State Key Laboratory of Green Chemical Synthesis and Conversion, Hangzhou 310023

习控制的不足. 现有研究中, 自适应迭代学习控制的分析通常基于 Lyapunov 函数^[10-11]、复合能量函数^[12]和压缩映射^[13], 这些方法为自适应迭代学习控制提供系统性的设计和分析框架^[14].

迭代学习控制的初值问题一直是其发展过程中广泛关注的问题之一, 传统迭代学习控制方法需要系统初值和参考初值严格保持一致, 然而实际应用中初值一致条件一般难以满足. 文献 [15] 研究五种不同的初始条件, 揭示每种初始条件与相应的收敛性之间的关系. 文献 [16] 使用对准条件避免初值问题, 但要求参考轨迹在空间上是封闭的且每次迭代的状态初值由上一次迭代的终值给定. 文献 [17] 提出一种带有初始修正的迭代学习控制方法以消除固定初始误差, 但由于初始修正策略与参考轨迹相关, 该方法需要在每次迭代时将修正后的轨迹重新设为参考轨迹, 计算量较大. 文献 [18] 首次提出误差跟踪方法, 该方法设计一种不依赖于参考轨迹的期望误差轨迹, 且期望误差轨迹的构造只需已知实际误差初值及其导数. 但现有的误差跟踪迭代学习控制方法^[18-21], 其跟踪误差是沿迭代轴渐近收敛的, 需要满足迭代次数趋近于无穷, 才能实现系统的跟踪误差收敛到零.

事实上, 在实际工程应用中通常只需要系统跟踪误差收敛到某一允许的区间范围内即可, 如果能够事先得到有限的迭代次数和系统误差收敛边界, 使得系统跟踪误差能够在有限次迭代内达到收敛要求, 则可以降低时间成本和存储空间消耗. 近年来, 有限次迭代跟踪控制^[22-25]引起学者们的关注. 文献 [22] 针对奇异耦合系统的跟踪问题, 首次给出系统有限次迭代跟踪的定义, 通过压缩映射方法计算得到跟踪误差收敛到期望精度时所需的迭代次数. 文献 [23] 研究在 λ 范数意义下的有限次迭代跟踪控制问题, 保证系统的输出误差能够有限次迭代收敛, 但 λ 范数是数学上为收敛性分析而定义的一种特殊范数, 在工程应用中没有实际物理意义的解释. 文献 [24] 针对高速列车系统, 采用自适应迭代学习容错控制方法, 基于障碍组合能量函数构建一种沿迭代轴方向的有限次收敛条件, 通过期望精度求解出所需迭代运行次数. 文献 [25] 研究具有外部干扰的离散时间系统, 使用 P 型迭代学习律并考虑丢包情况下的有限次迭代跟踪控制, 但需要满足干扰与初始误差存在线性不等关系这一条件. 然而, 上述有限次迭代学习控制方法未充分考虑系统中的非重复不确定对系统跟踪误差收敛性能和迭代次数的影响, 故此类方法的系统鲁棒性有待进一步提高.

为保证离散系统跟踪误差的快速收敛和鲁棒性^[26-27], 文献 [28] 首次提出吸引律方法, 将吸引律直

接用于控制系统设计, 使得跟踪误差有限时间内收敛到原点. 针对符号函数易引起系统抖振问题, 文献 [29] 提出一种无切换离散吸引律进行控制器设计, 将干扰差分补偿嵌入吸引律中, 从而有效抑制干扰影响. 为进一步提高系统误差收敛性能, 文献 [30] 提出一种新型两相幂次吸引律, 将收敛过程分成两个阶段, 增大初始收敛幅度并提高收敛速度. 然而, 文献 [28-30] 均研究提高时间轴上跟踪误差收敛性能的吸引律方法, 关于跟踪误差在迭代轴上有限次迭代收敛以提高迭代速度和系统鲁棒性的研究工作还鲜有报道.

基于上述讨论, 本文研究一类任意有界初态下的不确定离散时间系统轨迹跟踪问题, 提出一种有限次迭代学习误差跟踪控制方法. 主要贡献在于: 1) 为解决初值不一致的问题, 构造不依赖于参考轨迹的期望误差轨迹. 当系统状态在任意有界初始位置时, 都能在指定时间跟踪参考轨迹, 且离散形式的期望误差轨迹设计无需考虑连续时间轴上、与系统阶次相关的期望误差导数连续性要求, 仅需已知每次迭代的误差初值即可. 2) 通过在迭代轴上构建吸引律, 设计带有干扰补偿的迭代学习控制器, 推导出跟踪误差收敛的稳态误差带和满足精度要求所需的最大迭代次数表达式, 根据期望精度逆向选择参数, 将精度要求转化为参数约束, 实现跟踪误差的有限次迭代收敛. 在保证精度的前提下, 该方法可通过调节参数改变迭代次数.

1 问题描述

考虑下述在有限时间内重复运行的不确定离散时间系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(t+1) = A\mathbf{x}_k(t) + Bu_k(t) + Dd_k(t) \\ y_k(t+1) = C\mathbf{x}_k(t+1) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $t \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 是离散时间; $k \in \mathbf{N}_+$ 是迭代运行次数; $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u_k(t) \in \mathbf{R}$ 和 $y_k(t+1) \in \mathbf{R}$ 分别是控制输入和系统输出; $d_k(t) \in \mathbf{R}$ 是系统有界匹配干扰; A 、 B 、 C 和 D 分别是已知的恰当维数矩阵, 且满足 $CB \neq 0$.

将系统 (1) 写为输出分量形式

$$y_k(t+1) = \Gamma(t)\mathbf{x}_k(0) + F_k(t) + \Phi u_k(t) + \Upsilon_k(t) \quad (2)$$

其中, $\Gamma(t) = CA^{t+1}$, $F_k(t) = \sum_{i=0}^t CA^{t-i+1}Bu_k(i)$, $\Phi = CB$, $\Upsilon_k(t) = \sum_{i=0}^t CA^{t-i}Dd_k(i)$.

由式 (2) 可以推出

$$y_{k-1}(t+1) = \Gamma(t)\mathbf{x}_{k-1}(0) + F_{k-1}(t) + \Phi u_{k-1}(t) + \Upsilon_{k-1}(t) \quad (3)$$

令 $\Delta y_k(t+1) = y_k(t+1) - y_{k-1}(t+1)$, 则式 (2) 与式 (3) 相减得

$$\Delta y_k(t+1) = \Gamma(t)\Delta x_k(0) + \Delta F_k(t) + \Phi\Delta u_k(t) + w_k(t) \quad (4)$$

其中, $\Delta x_k(0) = x_k(0) - x_{k-1}(0)$; $\Delta F_k(t) = F_k(t) - F_{k-1}(t)$; $\Delta u_k(t) = u_k(t) - u_{k-1}(t)$; $w_k(t) = \Delta Y_k(t)$, $\Delta Y_k(t) = Y_k(t) - Y_{k-1}(t)$.

定义第 k 次迭代跟踪误差为

$$e_k(t+1) = y_r(t+1) - y_k(t+1) \quad (5)$$

其中, $y_r(t+1)$ 为给定的参考轨迹.

根据文献 [28] 在离散时间轴上的稳态误差带定义, 即 $|e(t)| \leq \Delta_{SSE} \Rightarrow |e(t+1)| \leq \Delta_{SSE}$, 给出如下跟踪误差沿迭代轴的稳态误差带定义.

定义 1. 若系统跟踪误差收敛至平衡点附近的一个邻域内, 且一旦进入该邻域, 跟踪误差就稳定在该邻域内, 则该邻域被称为稳态误差带, 即 $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 有

$$|e_{k-1}(t+1)| \leq \Delta_{SSE} \Rightarrow |e_k(t+1)| \leq \Delta_{SSE} \quad (6)$$

定义 2 [22]. 对 $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, 若存在正常数 k^* , 使得当 $k > k^*$ 时, 跟踪误差 $e_k(t+1)$ 满足

$$|e_k(t+1)| < \eta \quad (7)$$

则跟踪误差 $e_k(t+1)$ 有限次迭代收敛. 其中, η 为给定的期望精度, k^* 是跟踪误差满足期望精度所需的最大迭代次数.

本文的控制目标是针对不确定离散时间系统 (1) 在任意有界初始状态下, 设计迭代学习控制器 $u_k(t)$, 保证跟踪误差 $e_k(t+1)$ 有限次迭代收敛.

2 期望误差轨迹设计

系统在实际运行过程中, 由于建模的不确定性、外部扰动、机械精度等原因, 难以保证每次迭代的初值条件相同. 因此, 本节构造一种不依赖于参考轨迹的期望误差轨迹 $e_k^*(t+1)$ 来解决初值不一致问题.

如图 1 所示, 期望误差轨迹是由误差过渡轨迹 $\varsigma(t)$ 和恒为零的轨迹衔接而成, 具体设计如下

$$e_k^*(t+1) = \begin{cases} e_k(1) \cdot \varsigma(t), & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, N-1] \end{cases} \quad (8)$$

其中, $e_k(1)$ 为每次迭代的误差初值; $\tau+1$ 为接入点; $\varsigma(t)$ 为 $[0, \tau]$ 上的单调递减函数, 满足 $\varsigma(0) = 1$ 且 $\varsigma(\tau) = 0$, 使得 $e_k^*(1) = e_k(1)$, $e_k^*(\tau+1) = 0$, 保证期望误差轨迹能够连接实际迭代误差初值和接入

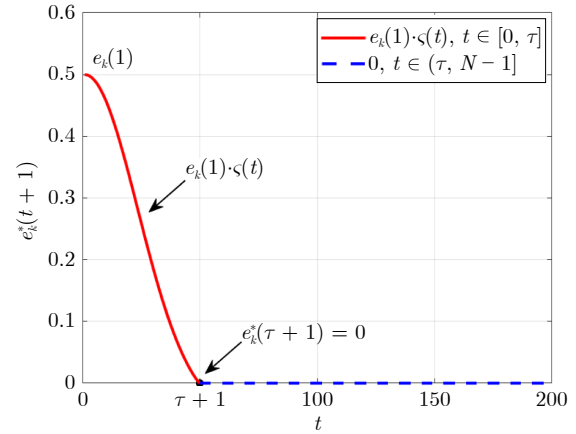


图 1 期望误差轨迹

Fig.1 Expected error trajectory

点. 根据上述要求, 不失一般性地, 可设计过渡轨迹 $\varsigma(t)$ 为

$$\varsigma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) + \frac{1}{2} \cos^3\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right), & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \in (\tau, N-1] \end{cases} \quad (9)$$

离散形式的期望误差轨迹设计无需考虑连续时间轴上、与系统阶次相关的 $e_k^*(1)$ 和 $e_k^*(\tau+1)$ 处的导数连续性问题, 简化了期望误差轨迹的设计要求. 由式 (8) 和式 (9) 可知, 期望误差轨迹仅需已知每次迭代的误差初值 $e_k(1)$ 即可. 此外, 期望轨迹的设计与参考轨迹无关, 因此每次迭代跟踪任务变化时, 无需重新设计期望误差轨迹.

记第 k 次迭代的误差为

$$\epsilon_k(t+1) = e_k(t+1) - e_k^*(t+1) \quad (10)$$

当不确定离散时间系统 (1) 每次迭代的误差初值任意有界时, 设计期望误差轨迹 (8) 和式 (9), 使得跟踪误差 $e_k(t+1)$ 随着迭代的增加在 $[0, N-1]$ 区间内跟踪期望误差轨迹 $e_k^*(t+1)$. 当 $e_k(t+1)$ 在 $[0, N-1]$ 收敛至期望精度内, 则系统输出 $y_k(t+1)$ 在 $(\tau, N-1]$ 区间内对参考轨迹 $y_r(t+1)$ 的跟踪精度满足期望精度 η 要求. 因此控制目标变为设计迭代学习控制器 $u_k(t)$, 保证 $\epsilon_k(t+1)$ 有限次迭代收敛.

注 1. 满足过渡轨迹 $\varsigma(t)$ 设计条件的还有其他形式, 如非连续可导的多项式、分段线性函数等. 在离散时间系统中, 由于不要求期望误差轨迹在衔接点处导数连续, 因此可根据实际需求灵活选择过渡函数形式, 无需受限于连续时间轴上的高阶光滑性要求. 相较而言, 本文所采用的三角函数本身具有单调递减特性且下降曲线平滑, 表达形式较为直观.

3 有限次迭代学习控制

由于 $d_k(t)$ 为有界干扰, 则 $d_k(t) - d_{k-1}(t)$ 有界且为非重复不确定扰动, 又根据式 (4) 可得 $\Delta Y_k(t)$ 有界, 即 $w_k(t)$ 有界. 针对系统 (4), 设计干扰补偿

$$\hat{w}_k(t) = \frac{w_u + w_l}{2} \quad (11)$$

其中, w_u 和 w_l 分别为 $w_k(t)$ 的上、下界.

由式 (11) 可得

$$|\hat{w}_k(t) - w_k(t)| \leq \Delta_w \quad (12)$$

其中, $\Delta_w = (w_u - w_l)/2$.

为保证 $\epsilon_k(t+1)$ 快速收敛, 从而实现有限次迭代收敛并提高其收敛性能, 现构造一种迭代饱和吸引律, 具体形式为

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) = & (1 - \rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \\ & \epsilon \text{sat} \left(\frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) - w_k(t) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $0 < \rho < 1$, $\epsilon > \Delta_w$, $\delta > 0$, 这三个参数满足条件 $\rho + \epsilon/\delta \leq 1$. 饱和函数 $\text{sat}(\cdot)$ 的具体形式为

$$\begin{aligned} \text{sat} \left(\frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) = & \\ & \begin{cases} \text{sgn}(\epsilon_{k-1}(t+1)), & |\epsilon_{k-1}(t+1)| > \delta \\ \frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta}, & |\epsilon_{k-1}(t+1)| \leq \delta \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

根据式 (5) 和 (10), 可以得到

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) = & e_{k-1}(t+1) - e_{k-1}(t+1) - \\ & e_{k-1}^*(t+1) + e_{k-1}^*(t+1) + \\ & e_k(t+1) - e_k^*(t+1) = \\ & \epsilon_{k-1}(t+1) + \Delta e_k(t+1) - \Delta e_k^*(t+1) = \\ & \epsilon_{k-1}(t+1) - \Delta y_k(t+1) - \Delta e_k^*(t+1) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $\Delta e_k(t+1) = e_k(t+1) - e_{k-1}(t+1)$, $\Delta e_k^*(t+1) = e_k^*(t+1) - e_{k-1}^*(t+1)$.

将式 (4) 代入式 (15) 中, 可得

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) = & \epsilon_{k-1}(t+1) - \Gamma(t)\Delta \mathbf{x}_k(0) - \Delta F_k(t) - \\ & \Phi \Delta u_k(t) - w_k(t) - \Delta e_k^*(t+1) \end{aligned} \quad (16)$$

根据干扰补偿式 (11) 和迭代吸引律式 (13), 设计迭代学习控制器为

$$\begin{aligned} u_k(t) = & u_{k-1}(t) + \frac{1}{\Phi} \left[\rho \epsilon_{k-1}(t+1) + \right. \\ & \left. \epsilon \text{sat} \left(\frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) - \Gamma(t)\Delta \mathbf{x}_k(0) - \right. \\ & \left. \Delta F_k(t) - \Delta e_k^*(t+1) - \hat{w}_k(t) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

注 2. 系统干扰包含重复和非重复两部分, 迭代学习控制用于抑制重复干扰, 同时在控制器设计中融入干扰补偿策略, 通过 $\hat{w}_k(t)$ 补偿非重复不确定干扰, 从而提高系统鲁棒性.

4 系统稳定性分析

本节将推导出 $\epsilon_k(t+1)$ 的稳态误差带, 并给出 $\epsilon_k(t+1)$ 满足期望精度 η 所需要的最大迭代次数 k^* 的表达式.

定理 1. 针对不确定离散时间系统 (1), 设计有限次迭代学习控制器 (17), 则系统 $\epsilon_k(t+1)$ 的稳态误差带为

$$\Delta_{SSE} = \begin{cases} \epsilon + \Delta_w, & \delta < \epsilon + \Delta_w \\ \frac{\Delta_w}{\rho + \frac{\epsilon}{\delta}} + c_1, & \delta \geq \epsilon + \Delta_w \end{cases} \quad (18)$$

其中, c_1 为较小的正常数.

证明. 下面给出 $\epsilon_k(t+1)$ 的稳态误差带表达式的证明, 分 $\Delta_{SSE} > \delta$ 和 $\Delta_{SSE} \leq \delta$ 两种情况.

将控制器 (17) 代入式 (16) 中, 得到系统 (1) 的误差动态方程

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) = & (1 - \rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \\ & \epsilon \text{sat} \left(\frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) + \tilde{w}_k(t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\tilde{w}_k(t) = \hat{w}_k(t) - w_k(t)$.

1) 当 $\Delta_{SSE} > \delta$ 时

当 $\epsilon_{k-1}(t+1) > \Delta_{SSE}$ 时, 则 $\text{sat}(\epsilon_{k-1}(t+1)/\delta) = \text{sgn}(\epsilon_{k-1}(t+1))$. 由式 (6)、(12) 和 (19), 有

$$\begin{cases} (1 - \rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \epsilon + \Delta_w \leq \Delta_{SSE} \\ -\Delta_{SSE} \leq (1 - \rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \epsilon - \Delta_w \end{cases} \quad (20)$$

解上述不等式得到 $\epsilon_{k-1}(t+1)$ 的范围

$$\frac{\epsilon - \Delta_w + \Delta_{SSE}}{1 - \rho} \geq \epsilon_{k-1}(t+1) \geq \frac{\epsilon + \Delta_w - \Delta_{SSE}}{1 - \rho} \quad (21)$$

由 $0 < \epsilon_k(t+1) \leq \Delta_{SSE}$ 和式 (21), 有

$$\begin{cases} \frac{\epsilon - \Delta_w + \Delta_{SSE}}{1 - \rho} > \Delta_{SSE} \\ \frac{\epsilon + \Delta_w - \Delta_{SSE}}{1 - \rho} \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

解上述不等式得

$$\Delta_{SSE} \geq \epsilon + \Delta_w \quad (23)$$

同理, 当 $-\epsilon_{k-1}(t+1) < -\Delta_{SSE}$ 时, 结果相同. 因此, 稳态误差带 Δ_{SSE} (取满足条件的最小值) 为

$$\Delta_{SSE} = \varepsilon + \Delta_w \tag{24}$$

2) 当 $\Delta_{SSE} \leq \delta$ 时

当 $\epsilon_{k-1}(t+1) > \Delta_{SSE}$ 时, $\text{sat}(\epsilon_{k-1}(t+1)/\delta) = \epsilon_{k-1}(t+1)/\delta$. 由式 (6)、(12) 和 (19), 有

$$\begin{cases} \left(1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\epsilon_{k-1}(t+1) + \Delta_w \leq \Delta_{SSE} \\ -\Delta_{SSE} \leq \left(1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\epsilon_{k-1}(t+1) - \Delta_w \end{cases} \tag{25}$$

解上述不等式得到 $\epsilon_{k-1}(t+1)$ 的范围

$$\frac{\Delta_{SSE} - \Delta_w}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}} \geq \epsilon_{k-1}(t+1) \geq \frac{\Delta_w - \Delta_{SSE}}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}} \tag{26}$$

由 $0 < \epsilon_k(t+1) \leq \Delta_{SSE}$ 和式 (26), 有

$$\begin{cases} \frac{\Delta_{SSE} - \Delta_w}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}} > \Delta_{SSE} \\ \frac{\Delta_w - \Delta_{SSE}}{1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta}} \leq 0 \end{cases} \tag{27}$$

解上述不等式得

$$\Delta_{SSE} > \frac{\Delta_w}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}} \tag{28}$$

同理, 当 $-\epsilon_{k-1}(t+1) < -\Delta_{SSE}$ 时, 结果相同. 因此, 稳态误差带 Δ_{SSE} 为

$$\Delta_{SSE} = \frac{\Delta_w}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}} + c_1 \tag{29}$$

$\Delta_{SSE} = \Delta_w/(\rho + \varepsilon/\delta)$ 时, 当 $k \rightarrow +\infty$, $\epsilon_k(t+1)$ 会收敛至稳态误差带 Δ_{SSE} 边界上并始终保持在边界上, 引入 c_1 后可以保证 $\epsilon_k(t+1)$ 收敛到 Δ_{SSE} 内.

由式 (24) 和式 (29) 可以看出, Δ_{SSE} 的取值由控制器参数 ρ 、 ε 、 δ 和干扰界值 Δ_w 决定, 具体表达式为

$$\Delta_{SSE} = \begin{cases} \varepsilon + \Delta_w, & \delta < \varepsilon + \Delta_w \\ \frac{\Delta_w}{\rho + \frac{\varepsilon}{\delta}} + c_1, & \delta \geq \varepsilon + \Delta_w \end{cases} \tag{30}$$

□

定理 2. 针对不确定离散时间系统 (1), 当系统初次迭代的最大误差满足 $|\epsilon_1|_m > \delta$ 且 $|\epsilon_1|_m > \Delta_{SSE}$, 设计迭代学习控制器 (17), 则 $\epsilon_k(t+1)$ 实现有限次迭代收敛. 此外, k^* 的具体表达式为

$$k^* = \begin{cases} \left\lceil \log_{1-\rho} \frac{\rho\Delta_{SSE} - \Delta_w + \varepsilon}{\rho|\epsilon_1|_m - \Delta_w + \varepsilon} + 1 \right\rceil, & \Delta_{SSE} > \delta \\ k_1^* + k_2^*, & \Delta_{SSE} \leq \delta \end{cases} \tag{31}$$

其中,

$$0 < \rho_1 = 1 - \rho - \frac{\varepsilon}{\delta} < 1$$

$$k_1^* = \left\lceil \log_{1-\rho} \frac{\rho\delta - \Delta_w + \varepsilon}{\rho|\epsilon_1|_m - \Delta_w + \varepsilon} + 1 \right\rceil$$

$$k_2^* = \left\lceil \log_{\rho_1} \frac{(1-\rho_1)\Delta_{SSE} - \Delta_w}{(1-\rho_1)\delta - \Delta_w} + 1 \right\rceil$$

$$|\epsilon_1|_m = \max_{t \in \{0, 1, \dots, N-1\}} |\epsilon_1(t+1)|$$

$\lceil \cdot \rceil$ 表示取到大于或等于该数的最小整数.

证明. 下面给出 $\epsilon_k(t+1)$ 有限次迭代收敛的推导过程. 根据式 (18), 分 $\Delta_{SSE} > \delta$ 和 $\Delta_{SSE} \leq \delta$ 两种情况.

1) 当 $\Delta_{SSE} > \delta$ 时

$\text{sat}(\epsilon_{k-1}(t+1)/\delta) = \text{sgn}(\epsilon_{k-1}(t+1))$, 误差动态方程 (19) 写为

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) &= (1-\rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \\ &\quad \varepsilon \text{sgn}(\epsilon_{k-1}(t+1)) + \tilde{w}_k(t) \end{aligned} \tag{32}$$

对式 (32) 两端取绝对值, 根据式 (12), 递推得到

$$\begin{aligned} |\epsilon_k(t+1)| &\leq (1-\rho)|\epsilon_{k-1}(t+1)| - \varepsilon + |\tilde{w}_k(t)| \leq \\ &\quad \vdots \\ &\quad (1-\rho)^{k-1}|\epsilon_1(t+1)| - \varepsilon \sum_{l=0}^{k-2} (1-\rho)^l + \\ &\quad \sum_{l=0}^{k-2} (1-\rho)^l |\tilde{w}_{k-l}(t)| \leq \\ &\quad (1-\rho)^{k-1}|\epsilon_1|_m + \\ &\quad (\Delta_w - \varepsilon) \frac{1 - (1-\rho)^{k-1}}{\rho} \end{aligned} \tag{33}$$

由迭代饱和和吸引律 (13) 中参数条件和系统干扰界值 Δ_w , 结合稳态误差带式 (18) 具体表达式, 选择合适的控制器参数 ρ 、 ε 、 δ , 使得 $\Delta_{SSE} \leq \eta$. 令 $(1-\rho)^{k-1}|\epsilon_1|_m + (\Delta_w - \varepsilon)(1 - (1-\rho)^{k-1})/\rho = \Delta_{SSE}$, 得

$$k = \log_{1-\rho} \frac{\rho\Delta_{SSE} - \Delta_w + \varepsilon}{\rho|\epsilon_1|_m - \Delta_w + \varepsilon} + 1 \tag{34}$$

则 k^* 表达式为

$$k^* = \left\lceil \log_{1-\rho} \frac{\rho \Delta_{SSE} - \Delta_w + \varepsilon}{\rho |\epsilon_1|_m - \Delta_w + \varepsilon} + 1 \right\rceil \quad (35)$$

2) 当 $\Delta_{SSE} \leq \delta$ 时

此时 $\epsilon_k(t+1)$ 在收敛到 Δ_{SSE} 之前, 先从 $|\epsilon_1(t+1)|$ 收敛到 δ .

第一阶段. $|\epsilon_1(t+1)| \rightarrow \delta$.

当 $|\epsilon_{k-1}(t+1)| > \delta$ 时, 误差动态方程的形式与式 (32) 相同. 此时第一阶段 k_1^* 表达式为

$$k_1^* = \left\lceil \log_{1-\rho} \frac{\rho \delta - \Delta_w + \varepsilon}{\rho |\epsilon_1|_m - \Delta_w + \varepsilon} + 1 \right\rceil \quad (36)$$

证明过程同定理 2 中的 1) 情况相似.

第二阶段. $\delta \rightarrow \Delta_{SSE}$.

此时 $|\epsilon_{k-1}(t+1)| \leq \delta$, 则 $\text{sat}(\epsilon_{k-1}(t+1)/\delta) = \epsilon_{k-1}(t+1)/\delta$, 误差动态方程 (19) 写成

$$\begin{aligned} \epsilon_k(t+1) &= (1-\rho)\epsilon_{k-1}(t+1) - \\ &\quad \varepsilon \left(\frac{\epsilon_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) + \tilde{w}_k(t) \end{aligned} \quad (37)$$

对式 (37) 两端取绝对值, 根据式 (12), 递推得到

$$\begin{aligned} |\epsilon_k(t+1)| &\leq \left(1-\rho-\frac{\varepsilon}{\delta}\right) |\epsilon_{k-1}(t+1)| + |\tilde{w}_k(t)| \leq \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left(1-\rho-\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{k-1} \delta + \\ &\quad \frac{1-(1-\rho-\varepsilon/\delta)^{k-1}}{1-(1-\rho-\varepsilon/\delta)} \Delta_w = \\ &\quad \rho_1^{k-1} \delta + \frac{1-\rho_1^{k-1}}{1-\rho_1} \Delta_w \end{aligned} \quad (38)$$

同理, 选择合适的控制器参数 ρ 、 ε 、 δ , 使得 $\Delta_{SSE} \leq \eta$. 令 $\rho_1^{k-1} \delta + \Delta_w(1-\rho_1^{k-1})/(1-\rho_1) = \Delta_{SSE}$, 得

$$k = \log_{\rho_1} \frac{(1-\rho_1)\Delta_{SSE} - \Delta_w}{(1-\rho_1)\delta - \Delta_w} + 1 \quad (39)$$

则第二阶段 k_2^* 表达式为

$$k_2^* = \left\lceil \log_{\rho_1} \frac{(1-\rho_1)\Delta_{SSE} - \Delta_w}{(1-\rho_1)\delta - \Delta_w} + 1 \right\rceil \quad (40)$$

综上, $k^* = k_1^* + k_2^*$. \square

由式 (30) 和 (31) 可得, 当系统干扰和初次迭代的最大误差保持不变时, 稳态误差带 Δ_{SSE} 和最大迭代次数 k^* 由控制器参数 ρ 、 ε 、 δ 决定, 其影响可分为两种情况: 当 $\delta < \Delta_w + \varepsilon$ 时, 较大的 ρ 或 δ 能在不改变稳态误差带的情况下, 减小 k^* , 提升迭

代效率. 此外, 减小 ε 可放宽稳态误差带范围, 从而降低 k^* , 加快收敛速度. 当 $\delta \geq \Delta_w + \varepsilon$ 时, 较大的 ρ 或 ε 能同时减小稳态误差带和 k^* . 在此情况下, 减小 δ 值可直接缩小稳态误差带范围, 提升稳态精度, 且不会增大 k^* , 使得 $\epsilon_k(t+1)$ 能够在较少的迭代次数内收敛到较小的稳态误差带中.

注 3. k^* 与控制器参数、系统干扰以及初次迭代的最大误差有关, 因此在满足精度的前提下, 可以通过调节相关参数来改变迭代次数以达到工程应用需求. 相比传统的 P 型^[8]、D 型^[9] 等迭代学习控制, 本文提出的有限次迭代学习控制方法可以减少计算负担和存储空间, 更加适用于实际工程系统.

5 数值仿真与实验结果

5.1 数值仿真

结合系统 (1), 考虑如下参数矩阵^[13]

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.500 & 0.035 & 0.025 \\ 0.025 & 0.600 & -0.990 \\ 0.750 & 0.030 & 0.025 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 1] \end{aligned} \quad (41)$$

给定参考轨迹为 $y_r(t+1) = 6 + 2 \sin(\pi t/50)$, 其中, $t \in \{0, 1, \dots, 199\}$, 设计接入时间点 $\tau = 19$. 干扰信号为

$$\begin{aligned} d_k(t) &= -0.5 \cos(0.02\pi t - 0.1k) + \\ &\quad 0.3 \text{sgn}(\sin(0.02\pi t)) + 0.2 \end{aligned} \quad (42)$$

为说明本文所提方法的有效性, 给出三种方法进行对比仿真.

M1 方法. 本文提出的有限次迭代学习误差跟踪控制方法, 期望误差轨迹为式 (8) 和式 (9), 迭代学习控制器为式 (17). 此时 $\Delta_w = 0.1$.

M2 方法^[15]. 具有初始修正作用的有限次迭代学习控制. 修正后的参考轨迹为

$$y_k^*(t+1) = \begin{cases} y_{d,k}(t+1), & t \in [0, \tau] \\ y_r(t+1), & t \in (\tau, N-1] \end{cases} \quad (43)$$

其中, $y_r(t+1)$ 与 M1 中参考轨迹相同; $y_{d,k}(t+1) = a_1 t + a_0$, $a_0 = y_k(1)$, $a_1 = -(y_k(1) - y_r(\tau+1))/\tau$.

记 $e_k(t+1) = y_k^*(t+1) - y_k(t+1)$, M2 的控制

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + \frac{1}{\Phi} \left[\rho e_{k-1}(t+1) + \varepsilon \text{sat} \left(\frac{e_{k-1}(t+1)}{\delta} \right) - \hat{w}_k(t) - \Gamma(t) \Delta \mathbf{x}_k(0) - \Delta F_k(t) \right] \quad (44)$$

M3 方法^[25]. P 型迭代学习误差跟踪控制. 期望误差轨迹与 M1 相同, 控制器形式为

$$u_k(t) = u_{k-1}(t) + \gamma e_{k-1}(t+1) \quad (45)$$

其中, γ 为控制器增益系数.

图 2 和图 3 为相同迭代次数时不同初始状态下的跟踪对比结果, 迭代次数为 15 次. 图 2 为输出角速度 y_{15} 在不同初始状态下跟踪同一参考角速度 y_r 的情况, 图中 $y_{15,a}$, $y_{15,b}$ 和 $y_{15,c}$ 分别对应初始状

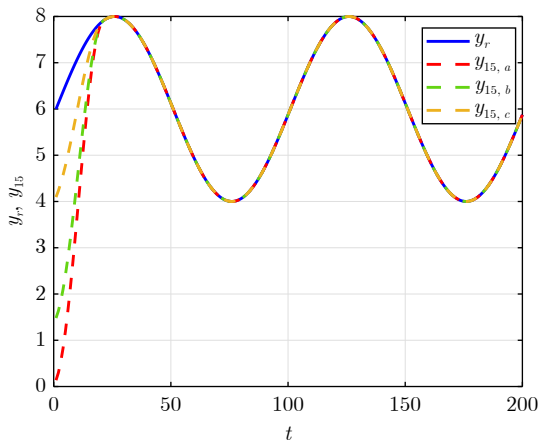


图 2 不同初始状态下输出角速度 y_{15} 和参考角速度 y_r

Fig.2 Output angular velocity y_{15} and reference angular velocity y_r under different initial conditions

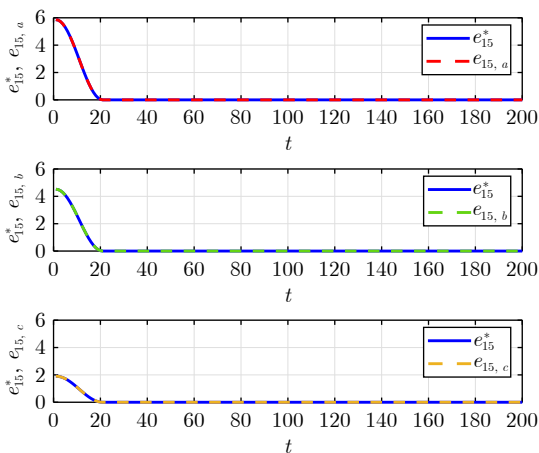


图 3 不同初始状态下误差轨迹 e_{15} 和期望误差轨迹 e_{15}^*
Fig.3 Error trajectory e_{15} and desired error trajectory e_{15}^* under different initial conditions

态 $\mathbf{x}_{15,a}(0) = [0.1\text{rand}(1), 0.1\text{rand}(1), 0.1\text{rand}(1)]^T$, $\mathbf{x}_{15,b}(0) = [0.5, 1, 1 + 1\text{rand}(1)]^T$ 和 $\mathbf{x}_{15,c}(0) = [2\text{rand}(1), 2 + 1\text{rand}(1), 3\text{rand}(1)]^T$. 图 3 为相应的输出跟踪误差 $e_{15,a}$, $e_{15,b}$ 和 $e_{15,c}$ 对期望误差轨迹 e_{15}^* 的跟踪对比结果.

为保证对比公平, 保持三种对比方法中迭代次数和初始状态相同, 即 $\mathbf{x}_k(0) = [0.1\text{rand}(1), 0.5 + 1\text{rand}(1), 0.5 + 1\text{rand}(1)]^T$, 给定期望精度 $\eta = 0.15$, M1 和 M2 中控制器参数选择 $\rho = 0.2$, $\varepsilon = 0.15$, $\delta = 0.3$. 由定理 1 得 $\Delta_{SSE} = 0.143 < \eta$. M3 方法中 $\gamma = 1.1$. 对于 M1 和 M2, 由定理 2 可得 $k^* = 20$.

M1 ~ M3 的对比仿真如图 4 ~ 6 所示, 其中图 4 和图 5 是三种方法迭代 11 次的效果对比, 图 4 为输出跟踪性能对比, 图 5 为基于期望误差轨迹的跟踪误差对比. 由图 4 和图 5 可以看出, 三种不同形式的控制方法均能使系统输出跟踪上参考轨迹, 其

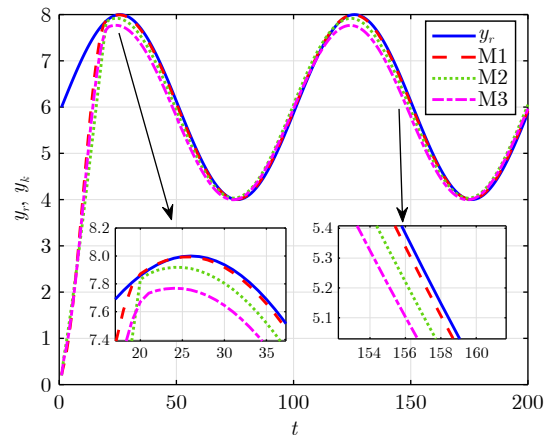


图 4 输出跟踪 y_k 对比

Fig.4 Comparison of output tracking y_k

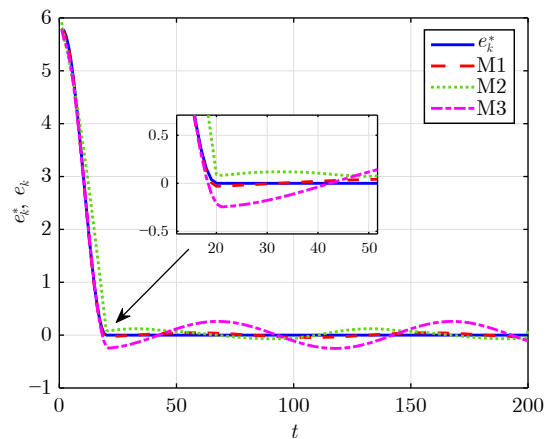


图 5 期望误差轨迹 e_k^* 和跟踪误差 e_k

Fig.5 Expected error trajectory e_k^* and tracking error e_k

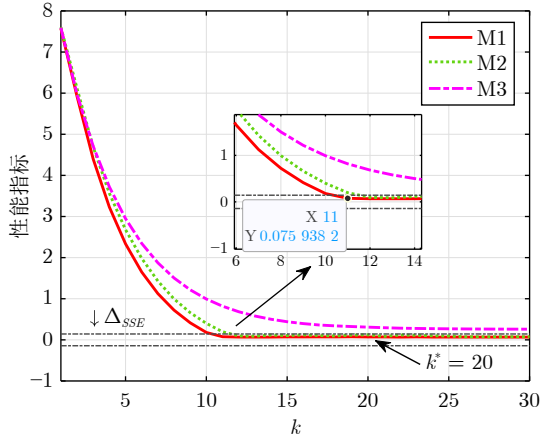


图 6 性能指标

Fig. 6 Performance index

中本文提出的有限次迭代学习控制器相较于 M2 和 M3 有更高的跟踪精度且收敛速度更快。

定义 $J_{\max} = \max_{t \in \{0, 1, \dots, N-1\}} (|\epsilon_k(t+1)|)$ 为系统性能指标, 反映跟踪性能随迭代次数 k 变化的情况. 图 6 给出 J_{\max} 随迭代次数 k 的变化趋势, 由图 6 可以看出, 本文所提方法不仅能有效提高跟踪误差的收敛性能, 且 $\epsilon_k(t+1)$ 在 k^* 次以内达到期望精度. 在第 11 次迭代时, $J_{\max} = 0.076 < \Delta_{SSE}$, 实现了有限次迭代收敛. M2 方法跟踪误差在第 12 次迭代收敛到期望精度以内.

当系统无扰动时, 即 $\Delta_w = 0$, 系统可以在第 k^* 次精确跟踪参考轨迹. 设置控制器参数 $\rho = 0.2$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$. 由定理 2 计算可得 $k^* = 20$. 图 7 为第 20 次迭代的输出跟踪、误差跟踪和系统性能指标. 由图 7 可以看出, $J_{\max} = 0.006 3$, 此时实际迭代次数等于精确跟踪期望轨迹所需的迭代次数 k^* .

5.2 实验分析

本文采用的永磁同步电机实验平台如图 8 所示, 实验中的三相永磁同步电机额定负载为 $1.8 \text{ N}\cdot\text{m}$ 、电压为 250 V 以及功率为 570 W , 直流母线电压为 300 V , 由直流电源 KPS3005D 提供. 控制板上的主控芯片使用德州仪器 TMS320F28335, 通过 CCS12.0 编程环境与上位机 PC 连接. 转子位置通过分辨率为 5000 脉冲/转的光电编码器测量, 相电流通过双电阻采样, 转换为电压信号并调理后, 由 TMS320F28335 的 ADC 模块采集. 为实现有限次迭代学习误差跟踪控制方法, 利用 TMS320F28335 的 QEP 模块, 在光电编码器输出一定数量脉冲时产生中断, 并在中断服务程序中完成算法计算. 实验过程中所有数据均通过串口通信上传至 PC, 最终借助 MATLAB 软件进行后续处理与分析. 控制

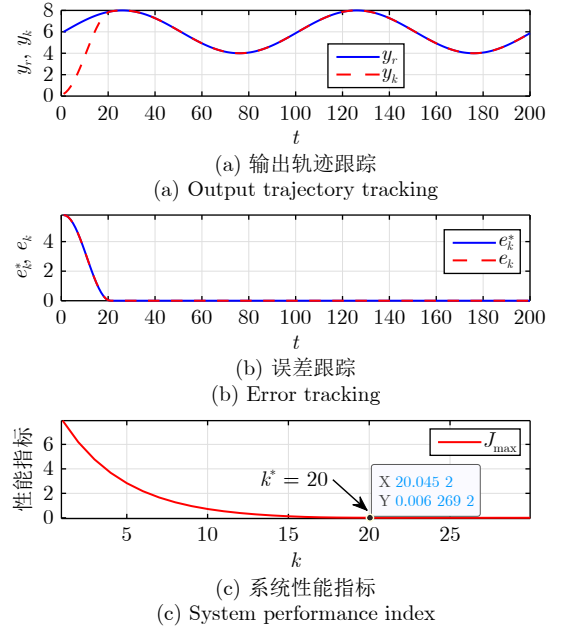
图 7 输出跟踪 y_k 、误差跟踪 e_k 和性能指标Fig. 7 Output tracking y_k , error tracking e_k and performance index

图 8 实验平台

Fig. 8 Experimental platform

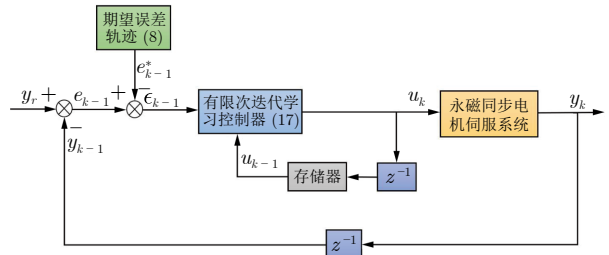


图 9 控制方案流程图

Fig. 9 Control scheme flowchart

方案流程图如图 9 所示.

建立永磁同步电机的动力学模型

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B}{J}\omega + \frac{3n_p\psi_f}{2J}i_q - \frac{T_L(\theta)}{J} \\ y = \omega \end{cases} \quad (46)$$

其中, J 为转动惯量; B 为粘滞摩擦系数; n_p 为电机极对数; ψ_f 为磁通; i_q 为 q 轴定子电流; θ 和 ω 为电机的转子角位置和角速度; $T_L(\theta)$ 表示与位置有关的负载转矩, 电机负载转矩 $T_L(\theta)$ 中随转子位置周期性变化的齿槽转矩等为重复干扰, 外部负载和机械振动为非重复不确定干扰. 记 $x_1 = \theta$, $x_2 = \omega$, $u = i_q$, $d = T_L(\theta)$. 选择采样间隔时间 T_s , 利用欧拉法将模型 (46) 离散化, 那么系统 (1) 中的参数矩阵具体形式为 $A = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 - \frac{B}{J}T_s \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3n_p\psi_f}{2J}T_s \end{bmatrix}$, $C = [0 \ 1]$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{T_s}{J} \end{bmatrix}$.

电机参数如表 1 所示. 永磁同步电机的参考角速度为 $y_r(t+1) = 6 + 8/(1 + e^{-0.02t+8})$ rad/s, 期望误差轨迹为式 (8) 和式 (9). 有限时间周期 $T = 2$ s, 采样间隔时间 $T_s = 0.001$ s, $t \in \{0, 1, \dots, 1999\}$, 设计接入时间点 $\tau = 499$. 电机的初始状态为 $x_{1,k}(0) = 1\text{rand}(1)$ rad, $x_{2,k}(0) = 1\text{rand}(1)$ rad/s. 由于 $T_L(\theta)$ 为系统干扰, 此时 $\Delta_w = 0.15$. 给定期望精度 $\eta = 0.2$, 选择方法 M1 和 M2 中控制器参数为 $\rho = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$, $\delta = 0.4$. 根据以上参数, 可得 $\Delta_{SSE} = 0.19 < \eta$, $k^* = 13$. M3 方法中 $\gamma = 1.5$.

实验结果如图 10 ~ 13 所示. 其中, 图 10 为不同控制方法在第 8 次迭代的轨迹跟踪图对比, 图 11 为误差跟踪图对比, 图 12 为控制输入对比, 图 13 为性能指标对比. 由图 10 和图 11 可以看出, M1 方法的角速度跟踪误差收敛速度更快且有更好的稳态精度. 由图 12 可以看出, M1 和 M2 相较于 M3 有更小的控制输入. 由图 13 可以看出, 在第 8 次迭代时, M1 方法的 $J_{\max} = 0.154 < \Delta_{SSE}$, $\epsilon_k(t+1)$ 在 k^* 次以内达到期望精度, 实现了有限次迭代收敛. M2 方法跟踪误差在第 9 次迭代收敛到期望精度以内. 实验结果表明, 随着迭代次数的增加, M1 方法在相对

较小的控制输入作用下, 能够有更快的误差收敛速度和更高的跟踪精度.

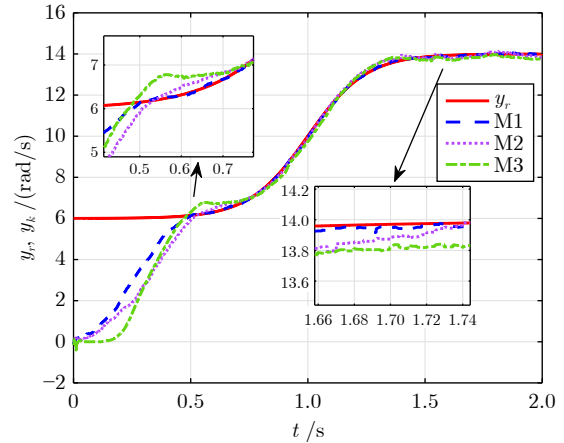


图 10 轨迹跟踪
Fig.10 Trajectory tracking

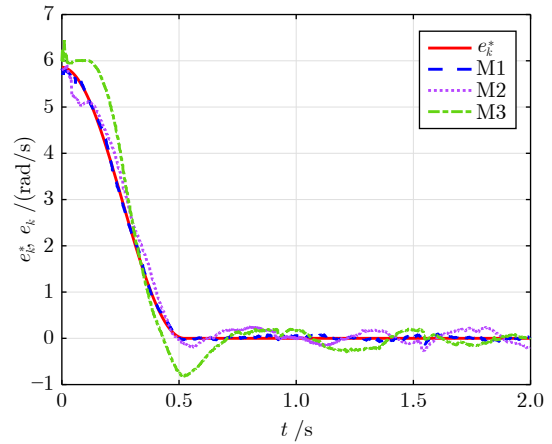


图 11 误差跟踪
Fig.11 Error tracking

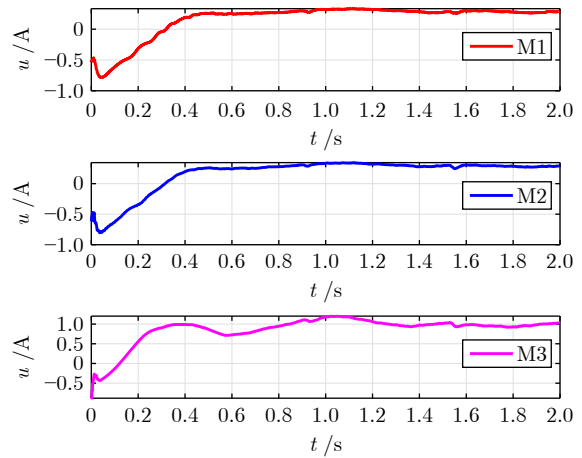


图 12 控制输入
Fig.12 Control input

表 1 永磁同步电机参数
Table 1 Permanent magnet synchronous motor parameters

物理量	参数	值
惯性系数	J (kg·m ²)	0.0275
负载转矩	T_L (N·m)	$0.5 \sin \theta$
磁通	ψ_f (Wb)	0.109
极对数	n_p	4
摩擦系数	B (N·m/(rad/s))	0.0012

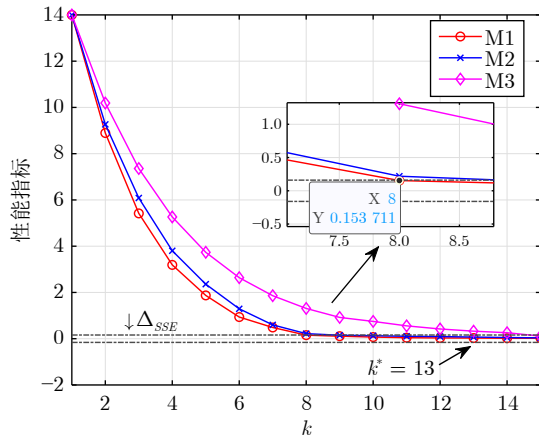


图 13 性能指标

Fig. 13 Performance index

6 结束语

针对一类不确定离散时间系统的轨迹跟踪问题, 本文提出一种有限次迭代学习误差跟踪控制方法. 为放宽系统状态的初值条件, 设计期望误差轨迹且该轨迹仅需已知每次迭代的初始误差. 此外, 为解决系统误差收敛需要迭代无穷次这一问题, 通过迭代吸引律, 设计具有干扰补偿的迭代学习控制器. 在此基础上, 推导出跟踪误差收敛的稳态误差带和满足精度要求所需的最大迭代次数表达式, 根据期望精度选择控制器参数, 在保证精度的情况下, 可通过参数调节来提高收敛速度, 实现跟踪误差有限次迭代收敛. 最后通过数值仿真和实验结果验证了所提控制方法的有效性.

参考文献

- Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng. On learning control: The state of the art and perspective. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(6): 943-955
(许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望. 自动化学报, 2005, **31**(6): 943-955)
- Wang Ding, Li Xin. Transferable incremental heuristic dynamic programming with wastewater treatment applications. *Journal of Beijing University of Technology*, 2025, **51**(3): 277-283
(王鼎, 李鑫. 迁移增量启发式动态规划及污水处理应用. 北京工业大学学报, 2025, **51**(3): 277-283)
- Chen Y, Huang D Q, Li Y N, Feng X Y. A novel iterative learning approach for tracking control of high-speed trains subject to unknown time-varying delay. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2022, **19**(1): 113-121
- Shi H H, Xie S Z, Chen Q, Hu S Y, Yi S L. Adaptive tunable predefined-time backstepping control for uncertain robotic manipulators. *ICCK Transactions on Sensing, Communication, and Control*, 2024, **1**(2): 126-135
- Zheng Xin-Xin, Zhang Da-Hai, Cao Rong-Min, Hou Zhong-Sheng. Improved model free adaptive iterative learning control for linear motor sliding mode control. *Electric Machines and Control*, 2024, **28**(7): 120-130
(郑鑫鑫, 张大海, 曹荣敏, 侯忠生. 改进无模型自适应迭代学习的

- 直线电机滑模控制. 电机与控制学报, 2024, **28**(7): 120-130
- Chen Y, Huang D Q, Qin N, Zhang Y H. Adaptive iterative learning control for a class of nonlinear strict-feedback systems with unknown state delays. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, **34**(9): 6416-6427
- Ding S H, Mei K Q, Yu X H. Adaptive second-order sliding mode control: A Lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(10): 5392-5399
- Liu T J, Shen D, Wang J R. Adaptive quantized iterative learning control using encoding-decoding strategy. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2025, **55**(3): 1359-1371
- Yu Q X, Hou Z S, Xu J X. D-type ILC based dynamic modeling and norm optimal ILC for high-speed trains. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **26**(2): 652-663
- Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 454-458
(朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制. 自动化学报, 2010, **36**(3): 454-458)
- Wang Ding, Fan Wen-Qian, Liu-Ao. Decentralized controller design with asymmetric input constraints for unknown unmatched interconnected systems. *Chinese Journal of Engineering*, 2024, **46**(12): 2269-2278
(王鼎, 范文倩, 刘奥. 未知不匹配互联系统的非对称输入约束分散控制器设计. 工程科学学报, 2024, **46**(12): 2269-2278)
- Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940-1945
- Chi R H, Wang D W, Hou Z S, Jin S T. Data-driven optimal terminal iterative learning control. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(10): 2026-2037
- Li Xue-Fang, Li Xiao-Dong, Liu Wan-Quan. On adaptive iterative learning control: The state of the art and perspective. *Control Theory & Applications*, 2024, **41**(9): 1523-1538
(李雪芳, 李晓东, 刘万泉. 自适应迭代学习控制的发展现状与展望. 控制理论与应用, 2024, **41**(9): 1523-1538)
- Xu J X, Yan R. On initial conditions in iterative learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(9): 1349-1354
- Shi Hui-Hui, Chen Qiang. Adaptive sliding-mode iterative learning control for a class of uncertain systems. *Control Theory & Applications*, 2023, **40**(7): 1162-1171
(施卉辉, 陈强. 一类不确定系统的自适应滑模迭代学习控制. 控制理论与应用, 2023, **40**(7): 1162-1171)
- Jin X. Nonrepetitive leader-follower formation tracking for multi-agent systems with LOS range and angle constraints using iterative learning control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(5): 1748-1758
- Sun Ming-Xuan, Yan Qiu-Zhen. Error tracking of iterative learning control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 251-262
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. 自动化学报, 2013, **39**(3): 251-262)
- Chen Qiang, Chen Kai-Jie, Shi Hui-Hui, Sun Ming-Xuan. Error-tracking iterative learning control for robot manipulators with iteration varying lengths. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(12): 2594-2604
(陈强, 陈凯杰, 施卉辉, 孙明轩. 机械臂变长度误差跟踪迭代学习控制. 自动化学报, 2023, **49**(12): 2594-2604)
- Shi H H, Chen Q, Hong Y H, Ou X H, He X X. Adaptive fuzzy iterative learning control of constrained systems with arbitrary initial state errors and unknown control gain. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 6439-

6450

- 21 Sun M X, Wu T, Chen L J, Zhang G F. Neural AILC for error tracking against arbitrary initial shifts. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(7): 2705–2716
- 22 Xiong W J, Xu L, Huang T W, Yu X H, Liu Y H. Finite-iteration tracking of singular coupled systems based on learning control with packet losses. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(1): 245–255
- 23 Luo Z J, Xiong W J, Huang C. Finite-iteration learning tracking of multi-agent systems via the distributed optimization method. *Neurocomputing*, 2022, **483**: 423–431
- 24 Yu Qiong-Xia, Hou Yi-Teng, Sun Jun-Jie, Hou Zhong-Sheng. Constrained adaptive finite-iteration learning fault-tolerant control for high-speed train. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2024, **24**(3): 140–150
(余琼霞, 侯怡腾, 孙俊杰, 侯忠生. 高速列车受限自适应有限次迭代学习容错控制. *交通运输系统工程与信息*, 2024, **24**(3): 140–150)
- 25 Yang R N, Gong Y J, Liu G P. Robust finite-iteration tracking of discrete-time systems in repetitive process setting via ILC scheme. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(5): 2585–2602
- 26 Li Y J, Ou X H, Chen P, He X X, Jiang Q R. Data-driven control with prescribed-time convergence for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 4961–4971
- 27 Cheng Y, Chen Q, Hu S Y, Ren X M, Yang M Y, He X X. Error-based model-free adaptive performance tuning control with disturbance rejection for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, DOI: [10.1109/TIE.2025.3572983](https://doi.org/10.1109/TIE.2025.3572983)
- 28 Sun M X, Wu L W. Ideal error dynamics based design of discrete-time repetitive controllers. In: Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference. Taiyuan, China: IEEE, 2012. 1734–1739
- 29 Sun Ming-Xuan, Hu Zhi-Yun, Li Wei, Li He. Non-switching-attracting discrete-time control method by using disturbance difference compensation. *Control and Decision*, 2020, **35**(6): 1512–1518
(孙明轩, 胡志云, 李威, 李鹤. 采用干扰差分补偿的无切换吸引离散时间控制方法. *控制与决策*, 2020, **35**(6): 1512–1518)
- 30 Chen Qiang, Ye Yan, Hu Yi, Sun Ming-Xuan. A two-phase power attracting law based discrete-time control. *Control and Decision*, 2022, **37**(2): 424–430
(陈强, 叶艳, 胡轶, 孙明轩. 一种两相幂次吸引律离散时间控制方法. *控制与决策*, 2022, **37**(2): 424–430)

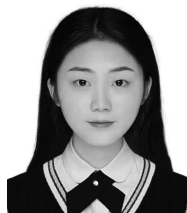


陈 强 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn

(**CHEN Qiang** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.)

His research interests include adaptive control and learning control.)



葛之琳 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: 15358927785@163.com

(**GE Zhi-Lin** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.)

Her research interests include adaptive control and learning control.)



成 云 浙江工业大学信息工程学院博士后. 主要研究方向为无模型自适应控制和自抗扰控制.

E-mail: yuncheng5@zjut.edu.cn

(**CHENG Yun** Postdoctor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.)

His research interests include model-free adaptive control and active disturbance rejection control.)



王守勤 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: w2609881675@163.com

(**WANG Shou-Qin** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of

Technology. Her research interests include adaptive control and learning control.)



何熊熊 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为迭代学习控制, 智能控制及其在多智能体系统和传感器网络中的应用. 本文通信作者.

E-mail: hxx@zjut.edu.cn

(**HE Xiong-Xiong** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interests include iterative learning control, intelligent control and its applications in multi-agent systems and sensor networks. Corresponding author of this paper.)