

# 基于区间二型模糊摩擦补偿的鲁棒自适应控制

罗刚<sup>1</sup> 王永富<sup>1</sup> 柴天佑<sup>2</sup> 张化锴<sup>1</sup>

**摘要** 针对不确定机械系统中普遍存在的摩擦力, 由于其非线性和不确定性, 传统基于摩擦模型的补偿控制方法难以达到满意的系统性能要求. 本文提出基于自适应区间二型 (Type-2) 模糊逻辑系统对系统摩擦进行补偿建模, 并在该摩擦补偿方法的基础上设计出鲁棒自适应控制器, 保证系统输出精度, 且对摩擦环境的变化具有较强自适应性. 区间二型模糊逻辑系统相对于传统一型模糊逻辑系统具有较强的处理不确定性问题的能力, 在本文中使用自适应区间二型模糊逻辑系统不断逼近摩擦力, 根据李雅普诺夫稳定性理论求出自适应律并证明系统跟踪误差的有界性. 在不同摩擦环境下的仿真结果验证了本文所提摩擦建模方法与控制策略的有效性 with 实用性.

**关键词** 非线性摩擦, 区间二型模糊, 李雅普诺夫稳定性, 自适应性

**引用格式** 罗刚, 王永富, 柴天佑, 张化锴. 基于区间二型模糊摩擦补偿的鲁棒自适应控制. 自动化学报, 2019, 45(7): 1298–1306

**DOI** 10.16383/j.aas.c180701

## Robust Adaptive Control Based on Interval Type-2 Fuzzy Friction Compensation

LUO Gang<sup>1</sup> WANG Yong-Fu<sup>1</sup> CHAI Tian-You<sup>2</sup> ZHANG Hua-Kai<sup>1</sup>

**Abstract** Due to the nonlinearity and uncertainty of friction in uncertain mechanical systems, it is difficult to establish an accurate friction model. The traditional compensation control method based on friction model is difficult to meet the requirements of system performance. The adaptive interval Type-2 fuzzy logic system is proposed to model system friction, then the robust adaptive controller is designed on the basis of the friction compensation method, which ensures the output precision of the system and has strong adaptability to variational environment. Interval Type-2 fuzzy logic system has stronger ability to deal with the uncertainty problem than the traditional Type-1 fuzzy logic system, so the adaptive interval Type-2 fuzzy logic system is used to approximate friction. The adaptive law is derived and the boundedness of the tracking error is proved based on the Lyapunov stability theory. The effectiveness and practicability of the friction modeling method and control strategy are verified by simulations under different friction environments.

**Key words** Nonlinear friction, interval Type-2 fuzzy, Lyapunov stability, adaptability

**Citation** Luo Gang, Wang Yong-Fu, Chai Tian-You, Zhang Hua-Kai. Robust adaptive control based on interval Type-2 fuzzy friction compensation. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(7): 1298–1306

摩擦现象在机械动力系统中普遍存在, 随着工业化加快, 动力系统的位移精度、速度精度等有更高的要求, 例如高精度数控机床、机械手臂、电子产品等行业. 由于摩擦力的非线性和不确定性, 导致系统产生输出误差, 降低系统控制精度和工作性能, 已经成为控制领域的难题<sup>[1–6]</sup>.

近年来, 研究人员主要从两方面对摩擦补偿控

制策略进行研究, 一方面是基于已知摩擦数学模型, 设置控制系统中控制量包含抵消摩擦项; 另一方面是在摩擦模型未知的情况下进行补偿建模控制. 摩擦数学模型是根据摩擦机理的研究和实验建立具体表达方式, 但是这种数学模型只是真实摩擦力的近似表达式, 并不完全准确; 另外系统实际运行的工作环境比较复杂, 摩擦模型自适应特性较差, 也会导致模型的不精确. 因此不依赖摩擦模型的补偿方法受到广泛关注. 文献 [7] 分别从摩擦模型、摩擦系统分析工具、摩擦补偿控制方法等方面进行详细阐述. 从文献 [7] 可以看出摩擦研究在各个领域取得重大成果. 但是, 近 20 年来, 工业控制的精度要求越来越高, 不确定性摩擦在机械系统中普遍存在, 摩擦补偿方法仍是人们所关心的问题, 研究人员继续对摩擦进行深入研究. 如文献 [8] 针对汽车电动助力制动系

收稿日期 2018-10-30 录用日期 2019-01-18  
Manuscript received October 30, 2018; accepted January 18, 2019

第 29 届中国过程控制会议 (CPCC2018) 推荐论文  
国家自然科学基金 (51775103) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (51775103)

本文责任编辑 魏庆来  
Recommended by Associate Editor WEI Qing-Lai  
1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110819 2. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819

1. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819 2. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819

统存在的摩擦现象, 建立了 LuGre 摩擦模型来表征系统的摩擦特性, 并采用遗传算法进行摩擦模型的参数辨识. 文献 [9] 使用时延技术估计双框架磁悬浮控制力矩陀螺框架伺服系统存在的摩擦力矩. 文献 [10] 利用动态增益的自适应扩展状态观测器估计磁性无杆气缸的静摩擦力.

近年来, 研究人员对基于自适应模糊逻辑系统的摩擦建模与控制方法进行了一系列研究. 文献 [11] 采用自适应模糊逻辑系统对动力系统摩擦力进行建模, 并在此基础上构建 PD (Proportion differentiation) 控制器, 保证闭环系统跟踪误差的有界性. 文献 [12] 提出用模糊状态估计器估计摩擦模型中的不可测变量, 并基于李雅普诺夫稳定性理论证明系统跟踪误差的有界性. 文献 [13] 针对多轴伺服系统中不确定摩擦力, 采用模糊逻辑系统逼近摩擦力作为控制补偿, 并引入了全局滑模控制提高系统对参数变化和外界干扰的鲁棒性. 上述文献均采用传统一型模糊逻辑系统对摩擦进行建模估计, 然而用二型模糊逻辑系统对摩擦补偿建模方面很少报道.

1975 年, Zadeh 教授首次提出 Type-2 模糊集合概念<sup>[14]</sup>. 在近 20 年来, Type-2 模糊理论得到快速的发展, 国内外研究人员不断进行深入研究丰富其理论基础, 逐渐形成一个新兴的研究领域. Type-2 模糊集合本质是对一型模糊集合的扩展, 对一型模糊的隶属度再次进行模糊化, 扩大隶属度空间, 可以处理语言规则不确定性问题, 能够综合同一事物的多个专家经验. 文献 [15–20] 对 Type-2 模糊逻辑系统做了更深入详细的研究, 并形成完整的 Type-2 模糊逻辑系统理论框架. 区间 Type-2 模糊逻辑系统具有 Type-2 模糊逻辑系统处理不确定问题能力, 并且避免 Type-2 模糊逻辑系统繁琐的计算量, 所以区间 Type-2 模糊逻辑系统的实际应用面比较广泛<sup>[21–22]</sup>.

本文的主要贡献有以下几个方面: 1) 提出基于自适应区间 Type-2 模糊逻辑系统对摩擦进行补偿建模; 2) 在该摩擦补偿方法的基础上设计出鲁棒自适应控制器, 保证系统输出精度满足要求, 并在不同摩擦环境下仿真验证该方法的自适应性; 3) 根据 Lyapunov 稳定性导出自适应律, 并证明跟踪误差的一致最终有界.

本文结构安排如下: 第 1 节对传统摩擦模型进行了简要介绍. 第 2 节对 Type-2 模糊集合与 Type-2 模糊逻辑系统进行详细介绍, 在此理论上使用自适应区间 Type-2 模糊逻辑系统对摩擦进行补偿建模, 并设计出鲁棒自适应控制器, 根据 Lyapunov 稳定性导出自适应律, 保证系统的输出精度. 第 3 节在不同的摩擦环境下进行仿真, 验证本文所提方法的有效性与自适应性, 并合理设计衰减系数, 保证系

统跟踪误差在适当范围之内. 第 4 节是结论.

## 1 考虑摩擦特性的不确定机械系统

参考不确定机械系统的微分方程如下:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \tau - F_f \quad (1)$$

式中,  $m$  为运动物体质量,  $x$  为物体运动位移,  $\tau$  为输入控制力,  $F_f$  为不确定摩擦力.

为保证系统的控制精度, 有效方法是降低摩擦对系统影响. 由于摩擦的不确定性和非线性, 摩擦建模至今仍然是一个研究难题. 研究人员目前为止提出库伦摩擦模型、Stribeck 摩擦模型、LuGre 摩擦模型、Karnopp 摩擦模型等. 这里对常用摩擦模型做简要介绍<sup>[23–25]</sup>:

### 1) 库伦摩擦模型

该模型是一种理想干摩擦模型, 该模型表达方式简洁, 但只局限于非零速度下的摩擦, 不能描述相对速度为零时的摩擦力情况. 摩擦力与作用在摩擦面的法向力成正比, 摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(a) 所示, 其数学公式为:

$$F_f = F_c \cdot \text{sgn}(v) \quad (2)$$

式中,  $F_f$  是摩擦力,  $F_c = \mu |F_N|$ ,  $\mu$  是摩擦系数,  $F_N$  为法向力.

### 2) 库伦摩擦 + 静摩擦模型

物体从静止加速到一定速度, 所受到的最大静摩擦力大于库伦摩擦力, 该模型相对于单一的库伦摩擦具有较高准确度, 实际上并不能真正仿真静摩擦现象. 其摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(b) 所示, 其数学公式为:

$$F_f = \begin{cases} F_e, & v = 0, |F_e| < F_s \\ F_s \cdot \text{sgn}(F_e), & v = 0, |F_e| \geq F_s \\ F_c \cdot \text{sgn}(v), & v \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $F_e$  是外力,  $F_s$  为最大静摩擦, 单位为 N.

### 3) 库伦摩擦 + 粘滞摩擦模型

随着流体动力学的发展, 研究人员推出粘滞摩擦模型, 该模型经常与库伦摩擦配合使用, 该模型比较简单, 但该摩擦模型具有不连续性, 且无法描述摩擦的动态特性, 其控制效果受到一定程度限制. 其摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(c) 所示.

### 4) 静摩擦 + 库伦摩擦 + 粘滞摩擦

随着粘滞摩擦理论的引入, 该模型能够改善系统在零速附近的响应, 但该模型要求准确的速度信号, 且只能描述摩擦静态特性. 其摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(d) 所示.

5) Stribeck 摩擦模型

该模型在描述摩擦现象时, 能够将静摩擦与粘滞摩擦之间用过渡曲线连接, 更能准确描述系统低速时摩擦特性. 该摩擦模型虽然能够实现摩擦的连续性, 但不能描述摩擦力的动态特性. 其摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(e) 所示, 其数学公式为:

$$F_f(v) = \left( F_c + (F_s - F_c) \exp\left(-\left|\frac{v}{v_s}\right|^{\delta_s}\right) \right) \cdot \operatorname{sgn}(v) + F_v v \quad (4)$$

式中,  $F_v$  为摩擦力的粘性摩擦系数, 单位为 Ns/m;  $v_s$  为 Stribeck 速度, 单位为 m/s;  $\delta_s$  为经验参数.

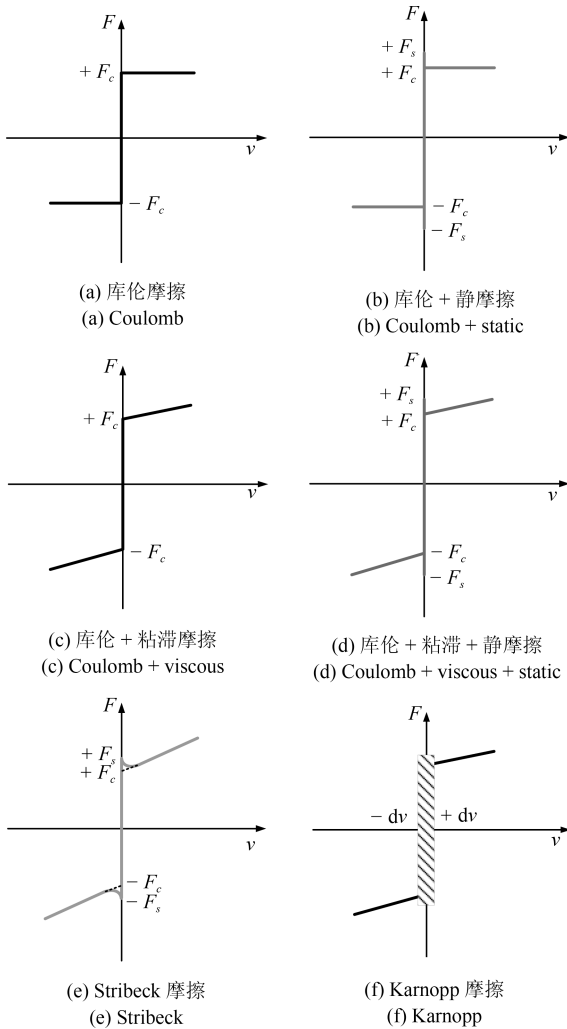


图 1 摩擦力模型图

Fig. 1 Friction model diagram

6) Karnopp 摩擦模型

该模型能够比较准确描述相对速度  $v$  为零时系统的摩擦特性, 且该模型对速度检测精度要求不高, 实用性比较大. 但该模型只能描述摩擦模型静态特

性, 不能描述动态特性. 其摩擦力与相对滑动速度  $v$  关系如图 1(f) 所示, 其数学公式为:

$$F_f = \begin{cases} F_f(v), & |v| \geq dv \\ F_e, & |v| < dv \text{ 且 } |F_e| < F_s \\ F_s, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

7) LuGre 摩擦模型

该模型认为刚体接触面存在弹性的鬃毛, 下表面刚体的材料刚度大于上表面. 该模型能够准确体现出摩擦的动态特性和静态特性, 可以更加准确描述摩擦现象, 但其参数不易确定. 其数学公式为:

$$\begin{cases} F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v \\ \dot{z} = v - \frac{|v|z}{g(v)} \\ \sigma_0 g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-|\frac{v}{v_s}|^2} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $z$  为鬃毛的平均变形,  $v$  为速度,  $\sigma_0, \sigma_1$  为动摩擦参数,  $F_c, F_s, \sigma_2, v_s$  为静摩擦参数.

综上, 摩擦模型具有一定研究成果, 但仍然存在一些问题有待解决: 现提出的摩擦模型不能精确地描述摩擦的动态特性和静态特性; 模型参数不易辨识, 难以准确描述摩擦力; 由于工作环境的复杂特性, 摩擦模型未考虑其他因素的影响, 如温度、湿度、润滑条件的变化影响.

2 II 型模糊逻辑系统与控制器设计

Type-2 模糊集合  $\tilde{A}$  是 Type-1 模糊集合的扩展, 在处理复杂不确定性时具有更多的隶属度空间, 提高模糊逻辑系统对未知函数逼近的准确性, 如图 2 所示. Type-2 模糊集合  $\tilde{A}$  表示为:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) | x \in X, u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (7)$$

式中,  $x$  为二型模糊集合  $\tilde{A}$  的第一变量,  $u$  为二型模糊集合  $\tilde{A}$  的第二变量,  $J_x$  为  $x$  的第一隶属度,  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  是  $x$  的第二隶属度.

二型模糊集合  $\tilde{A}$  的不确定覆盖域 (Footprint of uncertainty, FOU) 为论域上每一点与在该点的主隶属度的笛卡尔积之并<sup>[18]</sup>, 如图 2 阴影部分所示, 其表达式为:

$$\text{FOU}(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} x \times J_x \quad (8)$$

FOU 的边界由上隶属度函数 (Upper membership function, UMF) 和下隶属度函数 (Lower membership function, LMF) 构成.

区间 Type-2 模糊集合是 Type-2 模糊集合的一种特殊情况, 其第二隶属度  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  都等于 1. 区间

Type-2 模糊逻辑系统相对于一般的 Type-2 模糊逻辑系统来说计算比较简便, 更加实用, 所以在本文中

式,  $[y_l(\mathbf{x}), y_r(\mathbf{x})]$  为用 KM 算法得到的输出区间,

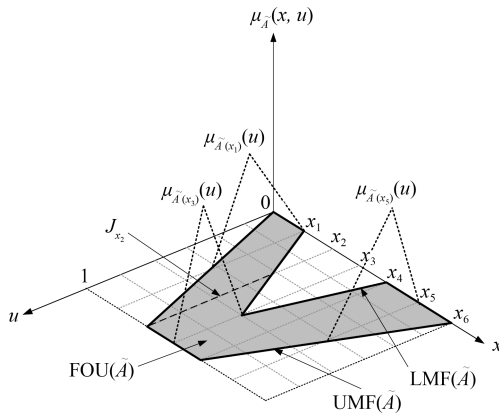


图 2 二型模糊集合的各元素

Fig. 2 Various elements of Type-2 fuzzy set

以  $n$  输入单输出的 Mamdani 区间 Type-2 模糊逻辑系统为例, 输入为  $x_i \in X_i$ , 输出为  $y \in Y$ ,  $i = 1, \dots, n$ . 模糊逻辑系统由下面 “IF-THEN” 语句构成:

$$R^{(j)} : \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{A}_1^j, \dots, x_n \text{ is } \tilde{A}_n^j, \text{ THEN } y \text{ is } B^j \quad (9)$$

式中,  $j = 1, \dots, M$  是规则数,  $\tilde{A}_i^j$  为前件区间二型模糊集合, 与  $B^j$  为后件一型模糊集合. 在本文中,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (x, \dot{x})^T$ ,  $x$  为位移信号,  $\dot{x}$  为速度信号,  $y = \hat{F}_f$  为估计摩擦力.

对于上面的模糊逻辑系统, 基于 KM (Kuhn-Munkes) 算法的降型在线计算过程如下:

步骤 1. 计算每条规则输入向量  $\mathbf{x}$  的激活区间:

$$\tilde{A}^j : \begin{cases} \tilde{A}^j(\mathbf{x}) \equiv [\underline{a}^j(\mathbf{x}), \bar{a}^j(\mathbf{x})] \\ \underline{a}^j(\mathbf{x}) \equiv T_{i=1}^n \underline{\mu}_{\tilde{A}_i^j}(x_i) \\ \bar{a}^j(\mathbf{x}) \equiv T_{i=1}^n \bar{\mu}_{\tilde{A}_i^j}(x_i) \end{cases} \quad (10)$$

步骤 2. 每条规则输出变量  $y$  的最大隶属度所对应的值为:

$$C_{B^j} = \bar{y}_j = \Theta_j \quad (11)$$

步骤 3. 基于 KM 算法降型:

$$Y_{ACOS}(\mathbf{x}) = \frac{1}{[y_l(\mathbf{x}), y_r(\mathbf{x})]} \quad (12)$$

$$\begin{cases} y_l(\mathbf{x}) = \min_{\forall v_j^l \in [\underline{a}^j(\mathbf{x}), \bar{a}^j(\mathbf{x})]} \frac{\sum_{j=1}^M \Theta_j v_j^l}{\sum_{j=1}^M v_j^l} \\ y_r(\mathbf{x}) = \max_{\forall v_j^r \in [\underline{a}^j(\mathbf{x}), \bar{a}^j(\mathbf{x})]} \frac{\sum_{j=1}^M \Theta_j v_j^r}{\sum_{j=1}^M v_j^r} \end{cases} \quad (13)$$

步骤 4. 计算区间 Type-2 模糊逻辑系统输出:

$$y = \frac{1}{2}(y_l(\mathbf{x}) + y_r(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \Theta^T (\xi_l(\mathbf{x}) + \xi_r(\mathbf{x})) \quad (14)$$

式中,  $\Theta = [\Theta_1, \dots, \Theta_M]^T$  为区间 Type-2 模糊逻辑系统的自适应参数向量,  $\xi_l(\mathbf{x})$  为区间 Type-2 模糊逻辑系统的左基函数,  $\xi_r(\mathbf{x})$  为区间 Type-2 模糊逻辑系统的右基函数, 表达式如下:

$$\begin{cases} \xi_l(\mathbf{x}) = \left[ \frac{v_1^l}{\sum_{j=1}^M v_j^l}, \dots, \frac{v_M^l}{\sum_{j=1}^M v_j^l} \right]^T \\ \xi_r(\mathbf{x}) = \left[ \frac{v_1^r}{\sum_{j=1}^M v_j^r}, \dots, \frac{v_M^r}{\sum_{j=1}^M v_j^r} \right]^T \end{cases} \quad (15)$$

系统控制目标为系统的输出位移追踪目标位移  $x_r$ , 假设真实摩擦力  $F_f$  已知, 设置控制器为:

$$\tau = m(x_r^{(2)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}) + F_f \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{e} = x_r - x$ ,  $\mathbf{e} = [e, \dot{e}]^T$ ,  $\mathbf{k} = [k_2, k_1]^T$ .

将式 (16) 代入式 (1) 可得跟踪误差动态方程为

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad (17)$$

通过选择  $k_1$  和  $k_2$  值, 使多项式  $h(s) = s^2 + k_1 s + k_2$  所有根都在左半开平面上, 满足 Hurwitz 条件, 跟踪误差  $\mathbf{e}$  趋近于 0.

由于真实摩擦力  $F_f$  是未知的, 本文采用区间 Type-2 模糊逻辑系统  $\hat{F}_f$  估计摩擦力值, 可表示为:

$$\hat{F}_f(\mathbf{x}|\Theta) = \frac{1}{2} \Theta^T (\xi_l(\mathbf{x}) + \xi_r(\mathbf{x})) \quad (18)$$

并在控制器 (16) 中引入补偿项  $\tau_\alpha$  来抵消模糊逻辑系统建模误差, 构建鲁棒自适应控制器:

$$\tau = m(x_r^{(2)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}) + \hat{F}_f - \tau_\alpha \quad (19)$$

将式 (19) 代入式 (1) 中, 可得跟踪误差动态方程:

$$\dot{e} = Ae + B\tau_a + B(F_f - \hat{F}_f) \quad (20)$$

式中,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$

设置最优参数  $\Theta^*$ :

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} (\sup_{x \in \Omega_x} \| F_f(x) - \hat{F}_f(x|\Theta) \|) \quad (21)$$

式中,  $\Omega_\Theta := \{\Theta \mid \|\Theta\| \leq M_\Theta\}, \Omega_x := \{x \mid \|x\| \leq M_x\}, M_\Theta, M_x$  是正数.

模糊逻辑系统最小逼近误差可表示为:

$$\omega = F_f(x) - \hat{F}_f(x|\Theta^*) \quad (22)$$

跟踪误差动态方程 (20) 可以写为:

$$\dot{e} = Ae + B\tau_a + B(\hat{F}_f(x|\Theta^*) - \hat{F}_f(x|\Theta)) + B\omega \quad (23)$$

经过进一步计算上式可以简化为:

$$\dot{e} = Ae + B\tau_a + \frac{1}{2}B\tilde{\Theta}^T(\xi_l(x) + \xi_r(x)) + B\omega \quad (24)$$

式中,  $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$ .

**定理 1.** 对于不确定机械系统 (1), 采用鲁棒自适应控制器为式 (19), 其中补偿项  $\tau_a$  为:

$$\tau_a = -\frac{1}{\lambda}B^TPe \quad (25)$$

二型模糊逻辑系统的自适应律为

$$\dot{\Theta} = \begin{cases} \frac{\gamma}{2}e^TPB(\xi_l(x) + \xi_r(x)), & \text{if } (\|\Theta\| < M_\Theta) \text{ or } \{\|\Theta\| = M_\Theta \\ \text{and } B^TPe(\xi_l(x) + \xi_r(x))^T\Theta \leq 0\} \\ P[\cdot], & \text{if } (\|\Theta\| = M_\Theta) \text{ and } B^TPe(\xi_l(x) + \xi_r(x))^T\Theta > 0 \end{cases} \quad (26)$$

式中,  $\gamma$  是给定正常数,  $P[\cdot]$  投影算子可表示为:

$$P[\cdot] = \frac{\gamma}{2}e^TPB(\xi_l(x) + \xi_r(x)) - \frac{\gamma}{2} \frac{B^TPe(\xi_l(x) + \xi_r(x))^T\Theta}{\|\Theta\|^2} \Theta \quad (27)$$

矩阵  $P = P^T > 0$  是 Riccati 方程的解, Riccati 方程表示为:

$$PA + A^TP + Q - \frac{2}{\lambda}PBB^TP + \frac{1}{\alpha^2}PBB^TP = 0 \quad (28)$$

式中,  $Q$  为正定对称矩阵,  $\lambda > 0, \alpha$  为衰减系数. 则可以保证系统的稳定性和跟踪误差有界性.

**证明.** 考虑 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}e^TPe + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\Theta}^T\tilde{\Theta} \quad (29)$$

则 Lyapunov 函数的时间导数  $\dot{V}$  可以表示为:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{e}^TPe + \frac{1}{2}e^T\dot{P}e + \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\Theta}}^T\tilde{\Theta} \quad (30)$$

将式 (24) 和式 (25) 代入上式得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \left[ e^T A^T P e - \frac{1}{\lambda} e^T P B B^T P e + \frac{1}{2} (\xi_l(x) + \xi_r(x))^T \tilde{\Theta} B^T P e + \omega^T B^T P e + e^T P A e - \right. \\ & \left. \frac{1}{\lambda} e^T P B B^T P e + e^T P B \omega + \frac{1}{2} e^T P B \tilde{\Theta}^T (\xi_l(x) + \xi_r(x)) \right] + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\Theta}}^T \tilde{\Theta} \quad (31) \end{aligned}$$

由式 (28) 代入式 (31), 并经过一系列计算之后得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2}e^TQe - \frac{1}{2\alpha^2}e^TPBB^TPe + \frac{1}{2}(e^TPB\omega + \omega^TB^TPe) + \\ & \left[ \frac{\gamma}{2}(\xi_l(x) + \xi_r(x))^TB^TPe + \dot{\tilde{\Theta}}^T \right] \frac{\tilde{\Theta}}{\gamma} \quad (32) \end{aligned}$$

由于  $\dot{\tilde{\Theta}} = -\dot{\Theta}$ , 根据自适应律 (26), 上式可以写为:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\frac{1}{2}e^TQe - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha}B^TPe - \alpha\omega \right)^T \times \\ & \left( \frac{1}{\alpha}B^TPe - \alpha\omega \right) + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^T\omega \quad (33) \end{aligned}$$

上式可推导为:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}e^TQe + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^T\omega. \quad (34)$$

由于矩阵  $Q$  为正定矩阵, 特征值均大于零, 则上式可推导为:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\delta_{\min}(Q)\|e\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\omega_0^2 \quad (35)$$

式中,  $\delta_{\min}(Q)$  为矩阵  $Q$  的最小特征值,  $\omega_0$  为逼近误差  $\omega$  的界, 即  $\|\omega\| \leq \omega_0$ .

可以看出式 (35) 为变号函数, 当在约束集  $\Gamma$  之外时, 则  $\dot{V} < 0$

$$\Gamma = \left\{ e \mid 0 \leq \|e\| \leq \frac{\alpha\omega_0}{\sqrt{\delta_{\min}(Q)}} \right\} \quad (36)$$

由标准 Lyapunov 理论可知, 跟踪误差  $\mathbf{e}$  一致最终有界 (Uniformly ultimately bounded, UUB).  $\square$

### 3 仿真与结果分析

仿真采用机械动力系统模型为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \tau - F_f \quad (37)$$

**步骤 1.** 建立二型模糊逻辑系统

摩擦力  $F_f$  由区间 Type-2 模糊逻辑系统估计, 输入向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (x, \dot{x})^T$ , 模糊规则为:

$$\begin{aligned} R^{(j)} : & \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{A}_1^j, x_2 \text{ is } \tilde{A}_2^j, \\ & \text{THEN } \hat{F}_f \text{ is } B^j \end{aligned} \quad (38)$$

式中,  $j = 1, \dots, 6$ ,  $\tilde{A}_1^j, \tilde{A}_2^j$  分别是  $x_1, x_2$  的区间二型模糊集合, 如图 3 所示,  $B^j$  是  $\hat{F}_f$  的传统一型模糊集合.

设置模糊规则前件隶属度函数为:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_1^1}(x_i) = \frac{1}{1 + \exp(5 \times (x_i + 2))} \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_1^1}(x_i) = \frac{1}{1 + \exp(5 \times (x_i + 2.2))} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_2^2}(x_i) = \exp(-(x_i + 1.5)^2) \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_2^2}(x_i) = \exp(-2 \times (x_i + 1.5)^2) \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_3^3}(x_i) = \exp(-(x_i + 0.5)^2) \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_3^3}(x_i) = \exp(-2 \times (x_i + 0.5)^2) \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_4^4}(x_i) = \exp(-(x_i - 0.5)^2) \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_4^4}(x_i) = \exp(-2 \times (x_i - 0.5)^2) \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_5^5}(x_i) = \exp(-(x_i - 1.5)^2) \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_5^5}(x_i) = \exp(-2 \times (x_i - 1.5)^2) \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}_6^6}(x_i) = \frac{1}{1 + \exp(-5 \times (x_i - 2))} \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}_6^6}(x_i) = \frac{1}{1 + \exp(-5 \times (x_i - 2.2))} \end{cases} \quad (44)$$

根据第 2 节中计算步骤可建立区间二型模糊逻辑系统  $\hat{F}_f$ .

**步骤 2.** 参数选择

在仿真中, 选择仿真环境参数:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $F_N = 5 \text{ N}$ ,  $F_v = 0.04F_N$ ,  $v_s = 1$ ,  $\delta_s = 1$ . 系统状态

初始值  $x_1(0) = 0.7$ ,  $x_2(0) = 0.5$ . 选择控制器参数:  $\gamma = 0.1$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ , 自适应参数初始值  $\Theta(0) = [-8, -4, -1, 2, 3, 4]^T$ . 目标位移  $x_r = \sin(t)$ , 目标速度  $\dot{x}_r = \cos(t)$ . 取  $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ , 考虑两种衰减系数情况  $\alpha = 0.2, 0.4$ , 设置  $\lambda = 0.08, 0.32$ , 通过解 Riccati 方程 (28) 得  $P = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ .

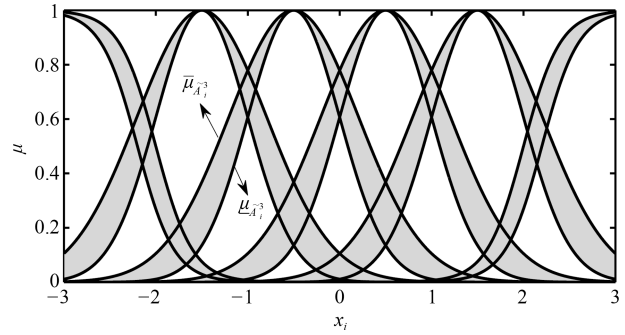


图 3 二型模糊逻辑系统隶属度函数

Fig. 3 Membership function of Type-2 fuzzy logic system

求得鲁棒自适应控制器  $\tau$  为:

$$\tau = (-\sin(t) + 2\dot{e} + e) + \hat{F}_f - \tau_a \quad (45)$$

求得自适应律为:

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{2}\gamma(5e + 5\dot{e})(\xi_l(\mathbf{x}) + \xi_r(\mathbf{x})) \quad (46)$$

求得补偿  $\tau_a$  为:

$$\tau_a = -\frac{1}{\lambda}(5e + 5\dot{e}) \quad (47)$$

**步骤 3.** 仿真环境设置

为验证本文所提建模方法的有效性 with 自适应性, 设置仿真环境如表 1 所示. 环境 1 为 Stribeck 摩擦模型, 不同时间段参数发生变化, 但摩擦结构不变; 环境 2 中摩擦力在不同时间段不仅摩擦力参数发生变化, 摩擦结构也发生变化.

表 1 摩擦模型参数与结构

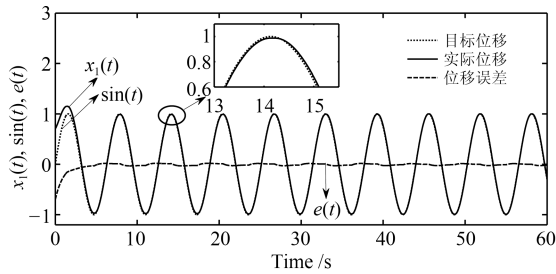
Table 1 Friction model parameters and structures

仿真环境	摩擦模型 $F_f(t/s)$		
	$0 < t \leq 20$	$20 < t \leq 40$	$40 < t \leq 60$
环境 1	Stribeck	Stribeck	Stribeck
	$F_c = 0.40F_N$	$F_c = 0.30F_N$	$F_c = 0.20F_N$
	$F_s = 0.60F_N$	$F_s = 0.50F_N$	$F_s = 0.40F_N$
环境 2	Stribeck	Stribeck	Coulomb
	$F_c = 0.40F_N$	$F_c = 0.30F_N$	$F_c = 0.20F_N$
	$F_s = 0.60F_N$	$F_s = 0.50F_N$	

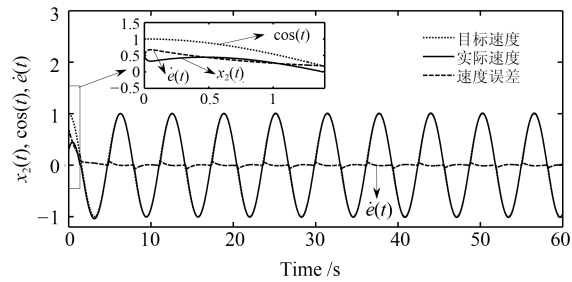
**步骤 4.** 仿真结果与分析

为验证基于区间 Type-2 模糊逻辑系统对摩擦进行建模补偿的控制效果, 在表 1 所示的两种仿真环境下, 对不确定机械系统进行仿真, 系统位移与速度追踪情况如图 4、图 5 所示。

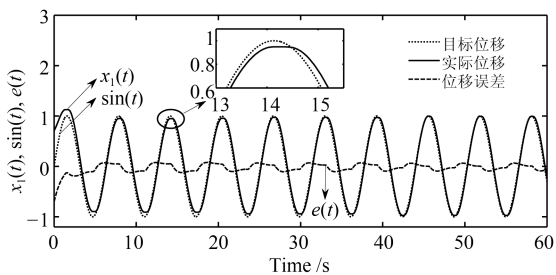
图 4 和图 5 是分别是在两种摩擦环境下取不同的衰减系数时系统输出位移与速度追踪曲线, 可以看出本文提出摩擦建模方法和鲁棒自适应控制器能够使不确定机械系统输出的实际位移  $x_1(t)$  与速度  $x_2(t)$  准确追踪目标位移  $\sin(t)$  与目标速度  $\cos(t)$ ,



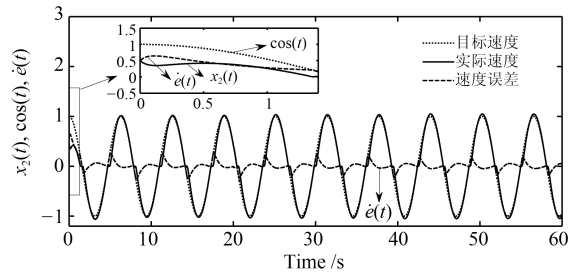
(a) 当  $\alpha = 0.2$  时位移跟踪曲线  
(a) Tracking curve of displacement when  $\alpha = 0.2$



(b) 当  $\alpha = 0.2$  时速度跟踪曲线  
(b) Tracking curve of velocity when  $\alpha = 0.2$



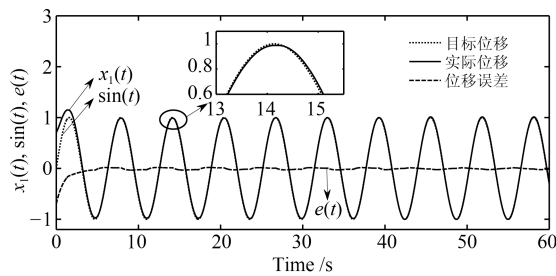
(c) 当  $\alpha = 0.4$  时位移跟踪曲线  
(c) Tracking curve of displacement when  $\alpha = 0.4$



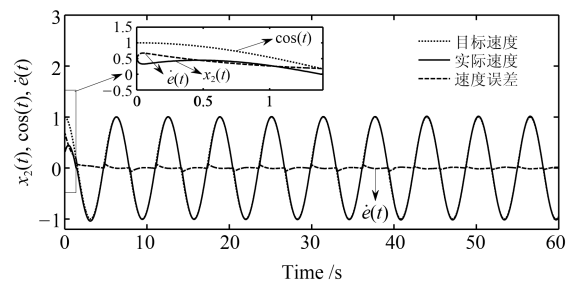
(d) 当  $\alpha = 0.4$  时速度跟踪曲线  
(d) Tracking curve of velocity when  $\alpha = 0.4$

图 4 环境 1 系统跟踪曲线

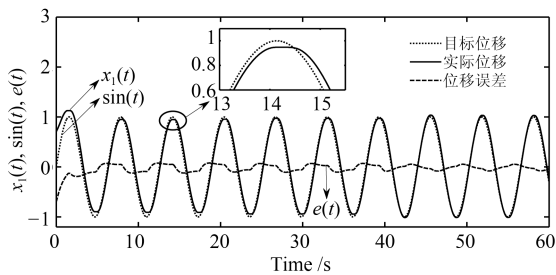
Fig. 4 Tracking curve of system output in Environment 1



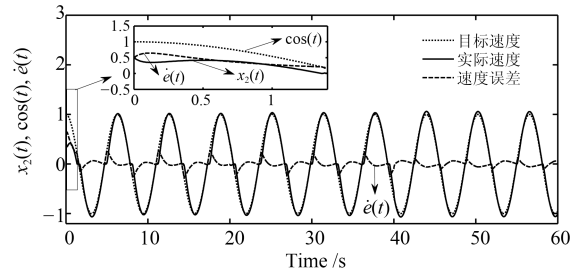
(a) 当  $\alpha = 0.2$  时位移跟踪曲线  
(a) Tracking curve of displacement when  $\alpha = 0.2$



(b) 当  $\alpha = 0.2$  时速度跟踪曲线  
(b) Tracking curve of velocity when  $\alpha = 0.2$



(c) 当  $\alpha = 0.4$  时位移跟踪曲线  
(c) Tracking curve of displacement when  $\alpha = 0.4$



(d) 当  $\alpha = 0.4$  时速度跟踪曲线  
(d) Tracking curve of velocity when  $\alpha = 0.4$

图 5 环境 2 系统跟踪曲线

Fig. 5 Tracking curve of system output in Environment 2

追踪误差在一定范围内, 且具有较强的自适应性. 从数学公式 (36) 与仿真结果两方面可以看出系统跟踪误差受衰减系数影响, 且成正比关系, 所以在设置控制器时应根据实际情况选取合适衰减系数.

注 1. 在实际工程应用中, 衰减系数过小, 会导致控制变量剧烈变化, 对系统执行器不利.

## 4 结论

针对传统摩擦模型建模不准确、参数难以辨识以及不具有自适应特性等问题, 本文运用区间 Type-2 模糊逻辑系统对不确定机械系统的摩擦力进行补偿建模, 自适应律根据李雅普诺夫稳定性理论求出. 设计鲁棒自适应控制器使系统输出具有较好追踪性能, 根据李雅普诺夫理论证明该系统跟踪误差一致最终有界. 经过数值仿真证明: 本文所提方法能够适用于不同的摩擦环境, 自适应能力较强, 具有准确的追踪性能, 且通过设置合理的衰减系数, 保证系统跟踪误差满足精度要求.

## References

- Bisoffi A, Lio M D, Teel A R, Zaccarian L. Global asymptotic stability of a PID control system with coulomb friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, **63**(8): 2654–2661
- Kim S. Moment of inertia and friction torque coefficient identification in a servo drive system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, **66**(1): 60–70
- Liu Qiang, Er Lian-Jie, Liu Jin-Kun. Robust nonlinear friction compensation of mechanical servo system with time variable parameters. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(4): 628–632  
(刘强, 尔联洁, 刘金琨. 参数不确定机械伺服系统的鲁棒非线性摩擦补偿控制. *自动化学报*, 2003, **29**(4): 628–632)
- Cong Shuang, De Carli-Alessandro. Two advanced control strategies for dynamic friction compensation. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(2): 236–240  
(丛爽, De Carli Alessandro. 两种补偿动态摩擦力的先进控制策略. *自动化学报*, 1998, **24**(2): 236–240)
- Verbert K A J, Toth R, Babuska R. Adaptive friction compensation: a globally stable approach. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, **21**(1): 351–363
- Roy R, Wang L, Simaan N. Modeling and estimation of friction, extension, and coupling effects in multisegment continuum robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, **22**(2): 909–920
- Armstrong-Helouvry B, Dupont P, Wit C C D. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 1994, **30**(7): 1083–1138
- He Rui, Wu Jian, Gao Ji. Modeling and compensation control for friction in vehicle power assisted braking system. *Automotive Engineering*, 2017, **39**(6): 683–688  
(何睿, 吴坚, 高吉. 汽车电动助力制动系统摩擦建模与补偿控制. *汽车工程*, 2017, **39**(6): 683–688)
- Cui P L, Zhang D C, Yang S, Li H T. Friction compensation based on time delay control and internal model control for gimbal system in MSCMG. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, **64**(5): 3798–3807
- Yang H J, Sun J H, Xia Y Q, Zhao L. Position control for magnetic rodless cylinders with strong static friction. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, **65**(7): 5806–5815
- Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. Data mining and systems theory based fuzzy modeling and control compensation for friction. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 412–420  
(王永富, 王殿辉, 柴天佑. 基于数据挖掘与系统理论建立摩擦模糊模型与控制补偿. *自动化学报*, 2010, **36**(3): 412–420)
- Wang Yong-Fu, Wang Dian-Hui, Chai Tian-You. State estimate-based friction fuzzy modeling and robust adaptive control. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(2): 245–252  
(王永富, 王殿辉, 柴天佑. 基于状态估计的摩擦模糊建模与鲁棒自适应控制. *自动化学报*, 2011, **37**(2): 245–252)
- Zhong G L, Shao Z Z, Deng H, Ren J L. Precise position synchronous control for multi-axis servo systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, **64**(5): 3707–3717
- Zadeh L A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I. *Information Sciences*, 1975, **8**(3): 199–249
- Wang Fei-Yue, Mo Hong. Some fundamental issues on type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(16): 1114–1141  
(王飞跃, 莫红. 关于二型模糊集合的一些基本问题. *自动化学报*, 2017, **43**(16): 1114–1141)
- Wang Jia-Jun. A new type of fuzzy membership function designed for interval type-2 fuzzy neural network. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(8): 1425–1433
- Mo Hong, Wang Fei-Yue, Xiao Zhi-Quan, Chen Qian. Stabilities of linguistic dynamic systems based on interval type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 1018–1024  
(莫红, 王飞跃, 肖志权, 陈茜. 基于区间二型模糊集合的语言动力系统稳定性. *自动化学报*, 2011, **37**(8): 1018–1024)
- Mo Hong, Wang Fei-Yue, Zhou Min, Li R M, Xiao Z Q. Footprint of uncertainty for type-2 fuzzy sets. *Information Sciences*, 2014, **272**: 96–110
- Mendel J M. On KM Algorithms for solving type-2 fuzzy set problems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, **21**(3): 426–446
- Mendel J M. General type-2 fuzzy logic systems made simple: a tutorial. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, **22**(5): 1162–1182
- Li Run-Mei, Wang Qiu-Hong. Artificial traffic system credibility evaluation based on interval type-2 fuzzy sets. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.16383/j.aas.c180105  
(李润梅, 梁秋鸿. 基于区间二型模糊集合的人工交通系统可信度评估. *自动化学报*, DOI: 10.16383/j.aas.c180105)
- Tang Xiao-Ming, Deng Li, Yu Ji-Min, Qu Hong-Chun. Output feedback model predictive control for interval type-2 T-S fuzzy networked control systems with bounded disturbance. *Acta Automatica Sinica*, DOI: 10.16383/j.aas.c170554  
(唐晓铭, 邓梨, 虞继敏, 屈洪春. 基于区间二型 T-S 模糊模型的网络控制系统的输出反馈预测控制. *自动化学报*, DOI: 10.16383/j.aas.c170554)
- Ding Qian, Zhai Hong-Mei. The advance in reseraches of friction dynamics in mechanics system. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(1): 112–131  
(丁千, 翟红梅. 机械系统摩擦动力学研究进展. *力学进展*, 2013, **43**(1): 112–131)



- 24 Zhang X G. Researches of Experimental Modeling and System Dynamics on Frictions Concerning Extended Stribeck Effect [Ph. D. thesis], Shanghai Jiao Tong University, China, 2009

(张新刚, 基于扩展 Stribeck 效应的摩擦实验建模及系统动力学研究 [博士学位论文], 上海交通大学, 中国, 2009)

- 25 Xiang H B. Research on Model and Compensation for Open Servo System [Ph. D. thesis], Tianjin University, China, 2010

(向红标, 开放式伺服系统的摩擦建模与补偿研究 [博士学位论文], 天津大学, 中国, 2010)



**罗 刚** 东北大学机械工程与自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性系统建模与控制, 模糊控制.

E-mail: m15940256365@163.com

(**LUO Gang** Ph. D. candidate at the School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University. His research interest covers modeling

and control of nonlinear systems, and fuzzy control.)



**王永富** 东北大学机械工程与自动化学院教授. 1998 年获得东北大学机械电子专业硕士学位, 2005 年获得东北大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向为机电系统模糊建模与控制, 数据挖掘, 信号处理. 本文通信作者.

E-mail: nuve122@163.com

(**WANG Yong-Fu** Professor at the School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University. He received his master degree in me-

chanical engineering and Ph. D. degree in control theory and control engineering from Northeastern University in 1998 and 2005, respectively. His research interest covers fuzzy modeling and intelligent control of mechanical engineering, data mining, and signal processing. Corresponding author of this paper.)



**柴天佑** 中国工程院院士, 东北大学教授, IEEE Fellow, IFAC Fellow. 1985 年获得东北大学博士学位. 主要研究方向为自适应控制, 智能解耦控制, 流程工业综合自动化理论、方法与技术.

E-mail: tychai@mail.neu.edu.cn

(**CHAI Tian-You** Academician of Chinese Academy of Engineering, pro-

fessor at Northeastern University, IEEE Fellow, IFAC Fellow. He received his Ph. D. degree from Northeastern University in 1985. His research interest covers adaptive control, intelligent decoupling control, integrated automation theory, method and technology of industrial process.)



**张化锴** 东北大学机械工程与自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性系统建模与控制, 自适应控制.

E-mail: zhk@sia.cn

(**ZHANG Hua-Kai** Ph. D. candidate at the School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University. His research interest covers

modeling and control of nonlinear systems, and adaptive control.)