

# 网络控制系统发送功率分配问题研究

王丽媛<sup>1</sup> 郭戈<sup>2</sup> 庄严<sup>1</sup>

**摘要** 以网络控制系统为研究对象, 讨论传感器发送功率对系统性能和通信能耗的影响. 首先, 针对无线通信系统中存在的丢包问题, 根据发送功率的大小, 建立系统切换模型, 其中, 发送功率越大, 丢包率越低, 系统性能越好. 然后, 利用平均逗留时间技术, 得到系统指数均方稳定的充分条件以及发送功率的可调度条件. 最后, 根据以上结果, 给出系统功率分配和控制器增益的协同设计算法, 该算法不仅能保证系统具有理想的控制性能, 同时能够使得通信能耗最优.

**关键词** 网络控制系统, 功率分配, 丢包, 指数均方稳定

**引用格式** 王丽媛, 郭戈, 庄严. 网络控制系统发送功率分配问题研究. 自动化学报, 2017, 43(8): 1350–1357

**DOI** 10.16383/j.aas.2017.c150876

## Transmission Power Allocation for Networked Control Systems

WANG Li-Yuan<sup>1</sup> GUO Ge<sup>2</sup> ZHUANG Yan<sup>1</sup>

**Abstract** This paper investigates the effects of sensor transmission power on system performance and communication energy cost of networked control system. First, by considering the packet dropout problem in wireless communication systems, a switching system control model is built based on the transmission power level, in which a larger transmission power leads to a smaller packet dropout rate, and hence a better system performance. Then by using average dwell time technique, sufficient conditions for the exponential mean square stability and schedulability requirements are obtained. Finally, a co-design framework for transmission power allocation and system stabilization is derived, which can guarantee a desired decay rate of the system with minimal communication energy consumption.

**Key words** Networked control systems, power allocation, packet dropout, exponential mean square stability

**Citation** Wang Li-Yuan, Guo Ge, Zhuang Yan. Transmission power allocation for networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(8): 1350–1357

在过去的几十年里, 网络控制系统一直是研究的热点问题之一, 其可靠性高, 易于维护等特点, 使得网络控制系统被应用于各行各业, 为社会做出了巨大贡献, 如交通系统、工业控制和环境监测等<sup>[1–3]</sup>. 网络化系统实现了资源共享, 使得多个节点设备可以通过无线网络完成数据传输, 从而实现团队协作. 但是由于无线信道噪声的存在, 使得数据包在传输过程中会发生丢失. 减少丢包的最直接的方法就是提高发送功率, 发送功率越高, 丢包率越低<sup>[4]</sup>. 然而在大多数的实际应用中, 许多网络节点是电池供电

的, 且由于环境恶劣等因素, 这些节点的电池是不可替换的<sup>[5]</sup>, 持续的高功率发送会导致系统能耗的增加, 降低电池的使用寿命. 因此如何选择合适的发送功率分配策略使得系统保证理想性能的同时能够降低能耗是急需解决的问题之一, 也是当今社会节能环保思想的集中体现.

功率分配, 又称为功率控制, 在过去的几年里, 受到了越来越多科研工作者的关注, 学者们提出了许多行之有效的建模方法和控制方法. Ren 等<sup>[6]</sup>研究了单个传感器的工作调度问题, 为了节约能量, 传感器只在需要时才发送数据, 反之, 则不发送. Shi 等<sup>[7]</sup>研究了单个传感器的功率调度问题, 并假设传感器有两种发送功率, 即高功率和低功率. 通过分析, 给出了一种最优的功率调度序列使得系统估计误差的协方差最小. 之后, Shi 等<sup>[8]</sup>又将该调度方法进一步推广到高阶高斯马尔科夫系统中, 得到了高阶系统下的传感器功率调度序列. 与文献 [6–8] 离线调度序列不同, Han 等<sup>[9]</sup>提出了一种在线的传感器调度策略, 每一次采样时刻, 传感器根据前几个时刻的总丢包次数决定当前时刻是否采用高功率发送数据, 通过比较发现, 该策略可以在有效的通信能量范围内使得系统的平均估计误差最小, 且消耗能量较离线调度策略更低. 文献 [10] 在综合系统

收稿日期 2015-12-28 录用日期 2016-04-28  
Manuscript received December 28, 2015; accepted April 28, 2016

国家自然科学基金 (61273107, 61174060), 大连领军人才项目 (841252), 中央高校基本科研业务费 (3132013334), 辽宁省高等学校优秀人才支持计划 (LJQ2013008) 资助

Supported by Natural Science Foundation of China (61273107, 61174060), Dalian Leading Talent Project (841252), Fundamental Research Funds for Central Universities (3132013334), and Training Program Foundation for University Talents by Liaoning Province (LJQ2013008)

本文责任编辑 陈积明

Recommended by Associate Editor CHEN Ji-Ming

1. 大连理工大学控制科学与工程学院 大连 116024 2. 大连海事大学信息科学技术学院 大连 116026

1. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024 2. School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026

二次型指标和通信能耗的前提下, 设计 LQG 控制器 (Linear-quadratic-Gaussian control), 利用近似线性规划方法找到最优的发送功率分配策略。

值得注意的是上述大部分文献讨论的都是非常简单的功率调度情况, 即传感器只有一种或两种发送功率, 在这种情况下, 传感器只需要决定何时发送数据或者何时采用高功率发送。然而, 在实际应用中, 传感器常常有多种功率选择<sup>[11]</sup>, 多种选择意味着功率调度问题具有更大的挑战。除此之外, 大多数的研究旨在讨论系统的状态估计问题, 对于系统镇定问题的讨论少之又少, 因此, 如何设计一种合理的功率调度策略和有效的控制方法使得系统能够镇定的同时且能耗最优具有重要的研究意义。

本文以线性离散时不变系统为研究对象, 讨论发送功率对系统稳定性和通信能耗的影响。假设传感器有  $N$  种发送功率选择, 在任意时刻, 传感器根据功率调度序列, 选择一种发送功率, 将测量信号通过无线网络发送到远处的控制器, 由于信道噪声等影响, 数据在传输过程中会发生丢包, 发送功率的大小决定了丢包率的高低, 发生功率越大, 丢包率越小。本文旨在设计合理的功率调度序列和有效控制策略使得系统保证理想控制性能的同时能耗最优。

本文的主要贡献概括如下:

1) 本文研究了功率调度和控制器的协同设计问题, 根据传感器不同的功率选择, 我们将系统建模为由  $N$  个子系统组成的切换系统。根据平均驻留时间技术和随机系统理论, 得出了发送功率和系统稳定性的关系, 并以此得到了发送功率的可调度条件。

2) 通过分析, 我们将调度与控制的协同设计问题转化为求解功率周期占空比和控制器增益的能量最优化问题。在周期性调度策略中, 本文所给出的调度序列不仅能够保证系统具有理想的衰减率且通信能耗最低。

本文结构安排如下: 第 1 节, 给出系统模型和控制目标; 第 2 节, 分析系统稳定性并给出发送功率和控制器的协同设计方法; 第 3 节, 通过数值仿真, 验证算法的有效性; 第 4 节分为本文总结和展望。

## 1 问题描述

### 1.1 丢包和通信能量

考虑一个网络控制系统, 假设在任意时刻, 传感器有  $N$  种发送功率选择, 即  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , 其中,  $\sigma_1 < \dots < \sigma_N$ 。用二进制函数  $\gamma(k)$  表示系统的丢包过程, 其中,  $\gamma(k) = 1$  表示数据包成功传输,  $\gamma(k) = 0$  表示数据包丢失。那么, 根据文献 [12] 可知, 数据包的成功传输率可以表示为

$$E\{\gamma(k) = 1 | \sigma(k) = \sigma_i\} = 1 - \theta^{\sigma_i} \quad (1)$$

其中,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\theta \in (0, 1)$  为信道参数。其中,

$E\{\gamma(k) = 1 | \sigma(k) = \sigma_i\} = 1 - \theta^{\sigma_i}$ ,  $\sigma(k) = \sigma_i$ 。由式 (1) 可知, 发送功率越大, 数据包成功传输的概率就越高, 即丢包率就越小。

令函数  $\alpha_i(k)$  表示发送功率  $\sigma_i$  在时间段  $(0, k)$  内被采用的总的长度, 其数学表达式为  $\alpha_i(k) = \sum_{s=1}^k \delta\{\sigma(s) - \sigma_i\}$ , 其中,  $\delta\{\cdot\}$  为克罗内克函数, 当  $\sigma(k) = \sigma_i$  时,  $\delta\{\sigma(k) - \sigma_i\} = 1$ 。令  $\Omega$  表示  $\sigma(k)$  的周期性的调度策略, 即,  $\Omega = \{\sigma(1), \dots, \sigma(T)\}$ , 其中,  $T$  为调度周期。对于给定的调度序列  $\Omega$ ,  $\alpha_i(k)/k$  称为发送功率  $\sigma_i$  的占空比, 且满足  $\sum_{i=1}^N \alpha_i(k)/k = 1$ 。

根据以上描述, 系统在每个调度周期内发送数据所消耗的平均通信能耗可以表示为

$$J = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \sigma(k)h = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\alpha_i(T)}{T} \right] \sigma_i h = \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i h \quad (2)$$

其中,  $h$  为采样时间,  $\beta_i = \alpha_i(T)/T$  为发送功率  $\sigma_i$  在每个调度周期内的占空比, 称为周期占空比, 且同样满足  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ 。

### 1.2 系统描述和控制目标

假设网络控制系统的动态特性可以描述为

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3)$$

其中,  $x(k) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $u(k) \in \mathbf{R}^m$  为控制输入,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  为系统矩阵。

采用状态反馈控制器

$$u(k) = K_i \hat{x}(k), \quad \sigma(k) = \sigma_i \quad (4)$$

其中,  $K_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为控制器增益,  $\hat{x}(k)$  为控制器实际采用的测量值。

当数据包成功传输时, 控制器采用当前接收到的数据计算控制信号, 反之, 控制器采用上一时刻的测量值。根据上述描述, 控制器实际采用的测量信号  $\hat{x}(k)$  可以表示为

$$\hat{x}(k) = \gamma(k)x(k) + [1 - \gamma(k)]\hat{x}(k-1) \quad (5)$$

由式 (3)~(5) 可得系统的闭环特性为

$$x(k+1) = Ax(k) + BK_i \gamma(k)x(k) + BK_i [1 - \gamma(k)]\hat{x}(k-1)$$

令  $z(k) = [x^T(k) \quad \hat{x}^T(k-1)]^T$ , 则系统的闭环特性可以重写为

$$z(k+1) = \Phi_i(k)z(k) \quad (6)$$

$$\text{其中, } \Phi_i(k) = \begin{bmatrix} A + BK_i\gamma(k) & BK_i[1 - \gamma(k)] \\ I\gamma(k) & I[1 - \gamma(k)] \end{bmatrix}.$$

令  $N(k)$  表示  $\sigma(k)$  在时间间隔  $[0, k]$  内的切换次数. 如果  $N(k) \leq N_0 + k/\tau$  对某个参数  $N_0 \geq 0$  和  $\tau > 0$  成立, 那么常数  $\tau$  称为平均驻留时间<sup>[13]</sup>. 平均驻留时间和占空比是设计调度序列的重要参数, 对系统的性能有着不可忽视的影响, 具体设计方法将在下文介绍.

**定义 1**<sup>[14]</sup>. 系统  $z(k+1) = f(z(k))$ ,  $f(0) = 0$ , 是  $\eta$  指数均方稳定的, 如果存在两个正数  $c > 0$  和  $\eta > 1$ , 使得对于任意的  $z(0) \in \mathbf{R}^n$  有:

$$E\{\|z(k)\|^2\} \leq c\eta^{-k} \|z(0)\|^2$$

其中,  $\eta$  为衰减率.

本文的目标是找到一个合适的功率分配和控制器的协同设计策略, 使得系统 (6) 指数镇定. 换句话说, 我们旨在设计功率调度序列  $\Omega$  和控制器增益  $K_i$  使得:

- 1) 系统 (6) 是  $\eta$  指数均方稳定的;
- 2) 系统的平均通信能耗最小, 即

$$J_{\min} = \min \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i h$$

**讨论 1.** 文献 [12] 研究了类似的发送功率的调度策略, 然而与本文存在本质的不同. 1) 研究的问题不同, 本文对网络控制系统的镇定问题进行了研究, 讨论了发送功率分配对系统控制性能的影响, 而文献 [12] 主要研究系统状态的估计问题. 2) 控制目标不同, 本文旨在建立一种功率调度策略, 使得系统在保证理想控制性能的前提下能耗最优, 而文献 [12] 的目标在于找到合适的功率调度策略使得系统在给定系统能耗的前提下, 状态估计的协方差最小. 3) 解决问题的方法不同, 本文通过将系统建模为切换系统, 利用平均驻留时间技术得到系统稳定的充分条件, 进而设计控制器和功率调度策略. 文献 [12] 通过分析系统丢包概率的分布特性, 将系统的丢包过程建模为马尔科夫过程; 然后, 利用卡尔曼滤波方法, 得到系统估计误差的表达式; 最后, 通过求解最优化问题, 计算每个周期内发送功率的大小.

## 2 主要结果

本节首先给出了系统 (6) 指数均方稳定的充分条件; 然后, 给出发送功率的可调度条件; 最后, 根据所得结果, 给出调度序列和反馈控制器的协同设计算法, 该算法不仅能够保证系统具有理想的衰减率且通信能耗最优.

### 2.1 系统稳定性

系统指数均方稳定的充分条件如定理 1 所示.

**定理 1.** 如果以下 4 个条件成立:

- 1) 存在正数  $\eta_N > \dots > \eta_1 > 0$  和矩阵  $0 < P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 使得:

$$\theta^{\sigma_i} \Phi_{i_o}^T P_i \Phi_{i_o} + (1 - \theta^{\sigma_i}) \Phi_{i_c}^T P_i \Phi_{i_c} < \eta_i^{-1} P_i \quad (7)$$

$$\text{其中, } \Phi_{i_o} = \begin{bmatrix} A & BK_i \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Phi_{i_c} = \begin{bmatrix} A + BK_i & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix};$$

- 2) 存在一个常数  $\mu > 1$  使得:

$$P_i \leq \mu P_j \quad (8)$$

其中,  $j = 1, \dots, N$  且  $i \neq j$ ;

- 3) 发送功率的占空比满足:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(k)}{k} \ln \eta_i \geq 2 \ln \eta \quad (9)$$

- 4) 切换次数和平均驻留时间满足:

$$N(k) \leq N_0 + k/\tau, \tau \geq \tau^* = \ln \mu / \ln \eta \quad (10)$$

那么, 系统 (6) 是指数均方稳定的, 且衰减率为  $\eta$ .

**证明.** 不失一般性, 令  $k_0, k_1, \dots, k_l$ , 表示  $\sigma(k)$  在时间间隔  $[0, k]$  内的切换时间点, 且当  $k = k_s$  时,  $\sigma(k_s) = \sigma_{i_s}$ , 其中,  $k_0 = 0$ ,  $s = 0, 1, \dots, l$ ,  $i_s \in \{1, 2, \dots, N\}$ . 选取分段李雅普诺夫函数如下:

$$V_i(k) = z^T(k) P_i z(k), \quad \sigma(k) = \sigma_i \quad (11)$$

其中,  $0 < P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

于是, 由式 (8) 可得:

$$V_i(k) \leq \mu V_j(k) \quad (12)$$

当  $\sigma(k) = \sigma(k+1) = \sigma_i$  时, 由式 (7) 可知

$$\begin{aligned} E\{V_i(k+1)\} &= \\ E\{z^T(k+1) P_i z(k+1)\} &= \\ E\{[\Phi_i(k)z(k)]^T P_i [\Phi_i(k)z(k)]\} &= \\ z^T(k) [\theta^{\sigma_i} \Phi_{i_o}^T P_i \Phi_{i_o} + (1 - \theta^{\sigma_i}) \Phi_{i_c}^T P_i \Phi_{i_c}] z(k) &< \\ \eta_i^{-1} z^T(k) P_i z(k) &= \eta_i^{-1} V_i(k) \end{aligned} \quad (13)$$

那么, 由式 (12) 和 (13) 可得:

$$\begin{aligned} E\{V(k)\} &< \eta_{i_s}^{-(k-k_s)} E\{V_{i_s}(k_s)\} \leq \\ \mu \eta_{i_{s-1}}^{-(k-k_s)} E\{V_{i_{s-1}}(k_s^-)\} &\leq \\ \mu \eta_{i_s}^{-(k-k_s)} \eta_{i_{s-1}}^{-(k_s-k_{s-1})} E\{V_{i_{s-1}}(k_{s-1})\} &\leq \\ \dots &\leq \\ \mu^{N(k)} \eta_1^{-\alpha_1(k)} \dots \eta_N^{-\alpha_N(k)} V(0) &\quad (14) \end{aligned}$$

其中,  $k_s^-$  表示  $\sigma(k)$  在时刻  $k_s$  完成切换的前一瞬间. 根据分段李雅普诺夫函数 (11) 可得:

$$E\{V(k)\} \geq \frac{E\{\|z(k)\|^2\}}{\max_{i=1, \dots, N}\{\|P_i^{-1}\|\}} \quad (15)$$

另一方面

$$E\{V(0)\} \leq \max_{i=1, \dots, N}\{\|P_i\|\}\|z(0)\|^2 \quad (16)$$

由式 (14) ~ (16) 可得:

$$E\{\|z(k)\|^2\} \leq a\mu^{N(k)}\eta_1^{-\alpha_1(k)} \dots \eta_N^{-\alpha_N(k)}\|z(0)\|^2 \quad (17)$$

其中,  $a = \max_{i=1, \dots, N}\{\|P_i^{-1}\|\} \times \max_{i=1, \dots, N}\{\|P_i\|\}$ .

由定理 1 中的条件 3) 可知

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(k) \ln \eta_i \geq 2k \ln \eta$$

于是有

$$\eta_1^{-\alpha_1(k)} \dots \eta_N^{-\alpha_N(k)} \leq \eta^{-2k} \quad (18)$$

将式 (18) 和 (10) 代入式 (17) 可得:

$$\begin{aligned} E\{\|z(k)\|^2\} &\leq a\mu^{N_0+k/\tau'} \eta^{-2k} \|z(0)\|^2 = \\ &a\mu^{N_0+k \ln \eta / \ln \mu} \eta^{-2k} \|z(0)\|^2 = \\ &a\mu^{N_0} \eta^k \eta^{-2k} \|z(0)\|^2 = \\ &c\eta^{-k} \|z(0)\|^2 \end{aligned}$$

其中,  $c = a\mu^{N_0}$ . 根据定义 1, 我们可知系统 (6) 是指数均方稳定的, 且衰减率为  $\eta$ .  $\square$

**推论 1.** 对于传感器只有一种发送功率的特殊情况, 本文的问题就可以简化为一个纯丢包问题, 此时系统 (6) 是  $\eta$  指数均方稳定的, 如果存在一个正的矩阵  $P$  和控制器增益  $K$  使得下列不等式成立

$$\theta^\sigma \Phi_o^T P \Phi_o + (1 - \theta^\sigma) \Phi_c^T P \Phi_c - \eta^{-1} P < 0$$

$$\text{其中, } \Phi_o = \begin{bmatrix} A & BK \\ 0 & I \end{bmatrix}, \Phi_c = \begin{bmatrix} A + BK & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.2 系统可调度条件

根据定理 1, 我们可以得到保证系统 (6) 稳定的发送功率可调度条件如下所示.

**定理 2.** 如果定理 1 中的条件 1) 和 2) 成立, 且功率周期占比  $\beta_i$  满足:

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i \geq 2\eta \quad (19)$$

那么, 存在一个发送功率的调度序列  $\Omega$  使得系统 (6)  $\eta$  指数均方镇定.

**证明.** 该证明分为两部分, 首先给出发送功率的周期性调度序列  $\Omega$ ; 然后, 证明该调度序列可以保证系统的稳定性要求.

1) 调度序列  $\Omega$

a) 选择调度周期为  $T \geq N\tau^*h$ , 其中,  $h$  为采样时间.

b) 令传感器从高到低依次采用发送功率  $\sigma_N, \sigma_{N-1}, \dots, \sigma_1$ , 且每种发送功率工作时长为  $\beta_i T$ , 其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

2) 稳定性

对于任意时刻  $kh = nT + v$ , 其中,  $0 \leq v < T$ ,  $n$  和  $v$  为非负整数. 当  $\sum_{i=j+1}^N \beta_i T \leq v < \sum_{i=j}^N \beta_i T$ , 其中,  $j = 1, \dots, N-1$  时, 可知

$$\alpha_i(k)h = \begin{cases} n\beta_i T, & i = 1, \dots, j-1 \\ n\beta_i T + v, & i = j \\ (n+1)\beta_i T, & i = j+1, \dots, N \end{cases} \quad (20)$$

$$N_i(k) = Nn + N - j \quad (21)$$

于是由式 (20) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(k)h}{kh} \ln \eta_i &= \\ &\frac{\sum_{i=1}^{j-1} n\beta_i T \ln \eta_i + (n\beta_j T + v) \ln \eta_j}{nT + v} + \\ &\frac{\sum_{i=j+1}^N (n+1)\beta_i T \ln \eta_i}{nT + v} = \\ &\frac{-v \sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i + v \ln \eta_j + T \sum_{i=j+1}^N \beta_i \ln \eta_i}{nT + v} + \\ &\frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i}{nT + v} > \\ &\frac{-v \sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i + v \ln \eta_j + v \sum_{i=j+1}^N \beta_i \ln \eta_i}{nT + v} + \\ &\frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i}{nT + v} = \frac{v(\ln \eta_j - \sum_{i=1}^j \beta_i \ln \eta_i)}{nT + v} + \\ &\frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i}{nT + v} \quad (22) \end{aligned}$$

由  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$  和  $0 < \eta_1 < \dots < \eta_N$  可知

$$\begin{aligned} \ln \eta_j - \sum_{i=1}^j \beta_i \ln \eta_i &> \ln \eta_j - \sum_{i=1}^j \beta_i \ln \eta_j = \\ \ln \eta_j (1 - \sum_{i=1}^j \beta_i) &> 0 \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (22), 并根据式 (19) 可得:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i(k)}{k} \ln \eta_i > \sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i \geq 2 \ln \eta$$

即定理 1 中的条件 3) 成立.

由于  $T \geq N\tau^*h$ , 即  $\tau^*h \leq T/N$ , 于是有:

$$\frac{k}{\tau'} \geq \frac{Nk}{T} = \frac{N(nT + v)}{T} > Nn \quad (24)$$

令  $N_o = N$ , 由式 (21) 和 (24), 可知

$$\frac{k}{\tau'} + N_o > Nn + N \geq N(k)$$

即定理 1 中的条件 4) 成立.

结合定理 1 中的条件 1) 和 2) 可知, 系统 (6) 是  $\eta$  指数均方稳定的.  $\square$

**讨论 2.** 由定理 2 和通信能耗表达式可知, 功率周期占空比越大, 系统的衰减率就越高, 控制性能就越好, 但同时消耗的通信能耗就越多, 因此通信能耗越多, 系统的控制性能就越好.

### 2.3 发送功率与控制器协同设计

本节中, 我们旨在设计周期性的调度序列  $\Omega$  和控制器使得系统 (6) 是  $\eta$  指数均方镇定的, 且通信能耗最低. 换句话说, 我们旨在设计周期性占空比  $\beta_i$ , 子系统衰减率  $\eta_i$ , 切换参数  $\mu$  和控制器增益  $K_i$ , 使得问题 1 中的通信能耗最优.

**问题 1.**

$$\min \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i h$$

s. t.

- 1)  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ ;
- 2)  $\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i \geq 2 \ln \eta$ .

其中,  $0 < \eta_1 < \dots < \eta_N$  和  $i = 0, 1, \dots, N$ . 条件 1) 和 2) 是定理 2 中保证系统稳定的可调度条件.

引理 1 给出了问题 1 最优解存在的必要条件

**引理 1.** 令  $\beta_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 表示问题 1 的最优解, 于是我们有  $\sum_{i=1}^N \beta_i^* \ln \eta_i = 2 \ln \eta$ .

**证明.** 假设  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , 是问题 1 的最优解, 且满足条件  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$  和  $\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i >$

$2 \ln \eta$ , 于是, 我们有:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i - 2 \ln \eta}{\ln \eta_N - \ln \eta_1} > 0$$

建立另外一组周期性占空比:

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 + \varepsilon, \bar{\beta}_N = \beta_N - \varepsilon, \bar{\beta}_j = \beta_j$$

其中,  $j = 2, \dots, N - 1$ .

于是有

$$\sum_{i=1}^N \bar{\beta}_i = \beta_1 + \varepsilon + \sum_{i=2}^{N-1} \beta_i + \beta_N - \varepsilon = \sum_{i=1}^N \beta_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{\beta}_i \ln \eta_i = (\beta_1 + \varepsilon) \ln \eta_1 +$$

$$\sum_{i=2}^{N-1} \beta_i \ln \eta_i + (\beta_N - \varepsilon) \ln \eta_N =$$

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i + \varepsilon(\ln \eta_1 - \ln \eta_N) = 2 \ln \eta$$

两组周期性占空比下的平均通信能量为

$$\begin{aligned} J\{\bar{\beta}_i\} &= \sum_{i=1}^N \bar{\beta}_i \sigma_i = (\beta_1 + \varepsilon) \sigma_1 + \\ &\sum_{i=2}^{N-1} \beta_i \sigma_i + (\beta_N - \varepsilon) \sigma_N = \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i + \end{aligned}$$

$$\bar{\varepsilon}(\sigma_1 - \sigma_N) < \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i = J\{\beta_i\}$$

即  $J\{\bar{\beta}_i\} < J\{\beta_i\}$ , 周期性占空比  $\beta_i$  下的通信能量大于  $\bar{\beta}_i$ , 所以解  $\beta_i$  并不是最优的, 这与假设相矛盾. 因此问题 1 的最优解一定满足  $\sum_{i=1}^N \beta_i^* \ln \eta_i = 2 \ln \eta$ .  $\square$

由引理 1 可知, 功率  $\sigma_N$  的周期占空比  $\beta_N$  可以表示为  $\beta_N = (2 \ln \eta - \sum_{i=2}^N \beta_i \ln \eta_i) / \ln \eta_N$ , 代入式 (2), 可知系统的平均通信能耗可以重写为

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i = \\ &\sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \sigma_i + \frac{\left(2 \ln \eta - \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \ln \eta_i\right) \sigma_N}{\ln \eta_N} \end{aligned}$$

通过求导, 我们发现

$$\frac{\partial J}{\partial \eta_i} < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

即系统的平均通信能耗随着子系统衰减率  $\eta_i$  的增大而减小, 因此当  $\eta_i$  取最大值时, 系统的通信能耗最低. 子系统的最大衰减率可以通过求解下述最优化问题得到:

$$\eta_i^{\max} = \max\{\eta_i \geq 0 : \theta^{\sigma_i} \Phi_{i0}^T P_i \Phi_{i0} + (1 - \theta^{\sigma_i}) \Phi_{ic}^T P_i \Phi_{ic} < \eta_i^{-1} P_i\} \quad (25)$$

根据 Schur 补引理, 问题 (25) 等价于

$$\begin{aligned} & \text{maximize}\{\eta_i\} \\ \text{s.t. } & 1) \begin{bmatrix} \eta_i^{-1} P_i & * & * \\ -\Phi_{i0} & \theta^{-\sigma_i} Q_i & * \\ -\Phi_{ic} & 0 & (1 - \theta^{\sigma_i})^{-1} Q_i \end{bmatrix} > 0 \quad (26) \\ & 2) P_i Q_i = I \end{aligned}$$

上述问题是一个非凸可行性问题, 可以采用锥补线性化方法求解<sup>[15]</sup>, 其中, 最优解  $\eta_i^{\max}$  表示系统 (6) 采用功率  $\sigma(k) = \sigma_i$  时的最大衰减率, 且发送功率越高, 系统成功传输的概率就越高, 对应的系统衰减率就越大. 于是有  $\eta_1^{\max} < \dots < \eta_N^{\max}$ . 实际上, 通过求解问题 (26), 我们不仅能够得到  $\eta_i^{\max}$ , 对应的控制器增益  $K_i$  也可以得到. 利用锥补线性化方法, 控制增益  $K_i$  可以通过求解下述带有线性矩阵不等式约束的非线性最优化问题得到

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{tr}(P_i M_i) \\ \text{s.t. } & 1) \text{ 线性矩阵不等式 (26)} \\ & 2) \begin{bmatrix} P_i & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (27) \end{aligned}$$

根据上述讨论和引理 1, 我们发现, 问题 1 的最优解一定满足等式  $\sum_{i=1}^N \beta_i^* \ln \eta_i = 2 \ln \eta$ , 并且当  $\eta_i$  取最大值时, 目标函数最小, 由此, 问题 1 的变量取值的限制条件 2) 可以进一步缩小为  $\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i^{\max} = 2 \ln \eta$ , 于是, 问题 1 可以等价地简化为

**问题 2.**

$$\min \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i h$$

s. t.

- 1)  $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$ ;
- 2)  $\sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i^{\max} = 2 \ln \eta$ .

问题 2 是一个凸优化问题, 可以利用拉格朗日乘子法求解, 令函数

$$f = \sum_{i=1}^N \beta_i \sigma_i h + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^N \beta_i - 1 \right) +$$

$$\lambda_2 \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \ln \eta_i^{\max} - 2 \ln \eta \right)$$

那么, 问题 2 的最优解  $\beta_i^*$  可以通过求解下述方程组得出

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \beta_N} = 0 \\ \frac{\partial f(\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial f(\beta_1, \dots, \beta_N, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

**推论 2.** 如果  $N = 2$ , 即传感器有两种发送功率, 即高功率  $\sigma_1$  和低功率  $\sigma_2$ , 那么求解方程组 (29), 可得系统最优的周期占空比为

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{2 \ln \eta - \ln \eta_2^{\max}}{\ln \eta_1^{\max} - \ln \eta_2^{\max}} \\ \beta_2^* &= 1 - \frac{2 \ln \eta - \ln \eta_2^{\max}}{\ln \eta_1^{\max} - \ln \eta_2^{\max}} \end{aligned}$$

最后, 根据以上讨论, 我们可以给出求解系统控制器和功率调度序列的协同设计算法如下.

**算法 1.** 功率调度和控制协同算法

**步骤 1.** 选择一个理想的衰减率  $\eta$ . 利用下述迭代步骤 1)~3) 计算  $\eta_i$  的最大值  $\eta_i^{\max}$  和对应的矩阵  $0 < P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ .

1) 选择一个足够小的  $\eta_i$ , 找到使得不等式 (26) 和 (27) 成立的可行解  $[P_i^0, Q_i^0, K_i^0]$ . 令  $k = 0$  和  $\eta_i^0 = \eta_i$ .

2) 求解如下最小化问题

$$\text{Minimize}[\text{tr}(P_i^k Q_i + Q_i^k P_i)] \quad \text{s.t. 式 (26) 和 (27)}$$

令求出的最优解为  $[P_i^{k+1}, Q_i^{k+1}, K_i^{k+1}]$ .

3) 验证所求出的最优解是否满足式 (7), 若满足, 则得解. 若不满足, 检查  $k$  是否到达规定的迭代次数, 如果达到, 则系统无解; 否则, 令  $k = k+1$ , 转到 2).

**步骤 2.** 通过求解不等式  $P_i \leq \mu P_j$ , 找到可行的切换参数  $\mu \geq 1$ .

**步骤 3.** 通过求解方程组 (28) 找到系统最优的功率周期占空比  $\beta_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**步骤 4.** 设计周期性调度序列如定理 2 所示.

**讨论 3.** 本文以周期性调度策略为研究对象, 通过求解通信能耗最优化问题, 得到了系统功率调度和控制器的协同设计算法, 该算法在一定程度上实现了控制性能理想化和通信能耗最优. 然而从严格

意义上讲, 该算法并不是最优的, 主要原因有以下两点: 1) 本文对于功率调度序列的讨论只限于周期性的调度策略, 周期性调度序列简单易于实现, 然而并不一定是最优的调度序列. 2) 本文对于求解能耗最优化的约束条件建立在定理 1 中所得到的稳定性充分条件上, 该稳定性条件只是充分条件, 并不是充分必要条件, 因此本文最优解的取值范围也存在一定的局限性. 所以, 综上所述, 本文所讨论的功率调度和控制器的协同设计算法是一个局部次优的, 对于如何找到真正的最优化的协同设计算法仍是本文下一步继续努力的方向.

### 3 仿真

考虑如下网络控制系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

假设信道参数为  $\theta = 0.2$ , 采样时间为  $h = 1$ , 在任意时刻, 传感器有三种不同的功率选择, 即  $\sigma_1 = 0.4$ ,  $\sigma_2 = 0.6$  和  $\sigma_3 = 1.2$ . 系统理想的衰减率为  $\eta = 1.25$ . 通过计算可得:

$$\eta_1^{\max} = 1.08, \eta_2^{\max} = 1.3 \text{ 和 } \eta_3^{\max} = 1.5$$

对应的矩阵  $P_i$  和控制器增益  $K_i$  分别为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.5532 & 0 & -0.1642 & 0 \\ 0 & 2.4208 & 0 & -1.4710 \\ -0.1642 & 0 & 1.1294 & 0 \\ 0 & -1.4710 & 0 & 1.4951 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.2701 & 0 & -0.5063 & 0 \\ 0 & 2.5550 & 0 & -1.4357 \\ -0.5063 & 0 & 0.9746 & 0 \\ 0 & -1.4357 & 0 & 1.4377 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 5.4496 & 0 & -1.5658 & 0 \\ 0 & 3.4181 & 0 & -0.7286 \\ -1.5658 & 0 & 1.4541 & 0 \\ 0 & -0.7286 & 0 & 1.7574 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.2852 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.3612 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.8507 \end{bmatrix}$$

令  $\mu = 3.73$ . 通过求解方程组 (29) 可得系统的最优功率周期占空比为

$$\beta_1^* = 0.2, \beta_2^* = 0.8, \beta_3^* = 0$$

选择调度周期为  $T^* = 20$ , 则在每个调度周期

内的功率切换信号可以表示为

$$\Omega^* : \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_4 \underbrace{\sigma_2 \cdots \sigma_2}_{16}$$

对应的通信能耗为  $J\{\Omega^*\} = 0.56$ .

为了对比, 我们给出另外两组功率调度序列  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$

$$\Omega_1 : \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{14} \underbrace{\sigma_3 \cdots \sigma_3}_{11}$$

$$\Omega_2 : \underbrace{\sigma_1 \cdots \sigma_1}_{16} \underbrace{\sigma_3 \cdots \sigma_3}_4$$

其中, 序列  $\Omega_1$  可以保证系统具有理想的衰减率, 序列  $\Omega_2$  具有与最优序列  $\Omega$  相同的通信能耗. 两组序列下的通信能耗分别为  $J\{\Omega_1\} = 0.752$ ,  $J\{\Omega_2\} = 0.56$ .

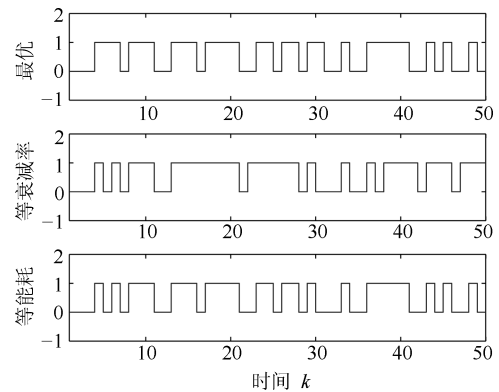


图 1 通信状态

Fig. 1 Communication states

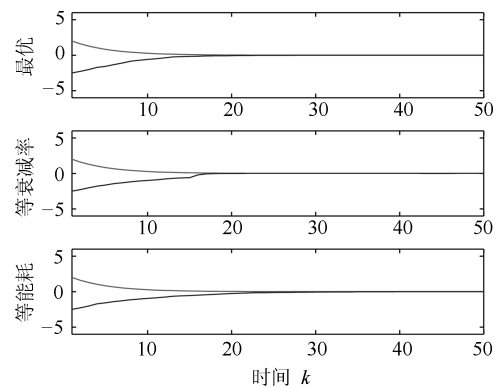


图 2 系统状态

Fig. 2 System states

三组功率调度序列下的通信状态如图 1 所示, 其中  $y$  轴的 0 和 1 分别表示数据包丢失和成功传输. 三组调度序列下的系统状态如图 2 所示, 从中可以看出三组调度序列都可以使得系统镇定, 然而在保证相同理想衰减率的情况下, 调度序列  $\Omega_1$  比序列  $\Omega^*$  消耗的能耗要多, 且系统镇定所需的时间要长.

除此之外, 在系统通信能耗相同的前提下, 系统在调度序列  $\Omega_2$  下镇定所需要的时间要比序列  $\Omega^*$  长得多. 因此, 无论是从通信能耗还是系统镇定时间方面, 调度序列  $\Omega^*$  都要优于序列  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ .

#### 4 结论与展望

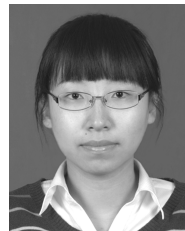
本文讨论了带有信道噪声的线性离散系统的镇定问题, 利用平均驻留时间技术, 得到了系统稳定的充分条件以及系统的功率可调度条件. 提出了一个次优的功率调度和反馈控制器的协同设计算法, 该算法不仅能够保证系统的理想特性, 且使得系统通信能耗局部最优.

在下一步的研究计划中, 我们旨在将本文所得结果扩展到其他非周期调度序列中, 且进一步考虑传感器的带宽受限问题, 这样在调度功率的同时, 我们需要进一步考虑信道的调度问题.

#### References

- Jiang Yan, Wang Qi, Gong Jian-Wei, Chen Hui-Yan. Research on temporal consistency and robustness in local planning of intelligent vehicles. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(3): 518–527  
(姜岩, 王琦, 龚建伟, 陈慧岩. 无人驾驶车辆局部路径规划的时间一致性与鲁棒性研究. *自动化学报*, 2015, **41**(3): 518–527)
- Fan Jia-Lu, Jiang Yi, Chai Tian-You. Operational Feedback Control of Industrial Processes in a Wireless Network Environment. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(8): 1166–1174  
(范家璐, 姜艺, 柴天佑. 无线网络环境下工业过程运行反馈控制方法. *自动化学报*, 2016, **42**(8): 1166–1174)
- Luo Xu, Chai Li, Yang Jun. Offshore pollution source localization in static water using wireless sensor networks. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 849–861  
(罗旭, 柴利, 杨君. 无线传感器网络下静态水体中的近岸污染源定位. *自动化学报*, 2014, **40**(5): 849–861)
- Son D, Krishnamachari B, Heidemann J. Experimental study of the effects of transmission power control and blacklisting in wireless sensor networks. In: Proceedings of the 1st Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor and Ad Hoc Communications and Networks. Santa Clara, USA: IEEE, 2004. 289–298
- Appadwedula S, Veeravalli V V, Jones D L. Energy-efficient detection in sensor networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2005, **23**(4): 693–702
- Ren Z, Cheng P, Chen J M, Shi L, Sun Y X. Optimal periodic sensor schedule for steady-state estimation under average transmission energy constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(12): 3265–3271
- Shi L, Cheng P, Chen J M. Sensor data scheduling for optimal state estimation with communication energy constraint. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1693–1698
- Shi L, Xie L H. Optimal sensor power scheduling for state estimation of Gauss-Markov systems over a packet-dropping network. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(5): 2701–2705
- Han D, Cheng P, Chen J M, Shi L. An online sensor power schedule for remote state estimation with communication energy constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(7): 1942–1947

- Gatsis K, Ribeiro A, Pappas G J. Optimal power management in wireless control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(6): 1495–1510
- Xiao J J, Cui S G, Luo Z Q, Goldsmith A J. Power scheduling of universal decentralized estimation in sensor networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(2): 413–422
- Li Y Z, Quevedo D E, Lau V, Shi L. Optimal periodic transmission power schedules for remote estimation of ARMA processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(24): 6164–6174
- Dai S L, Lin H, Ge S S. Scheduling-and-control codesign for a collection of networked control systems with uncertain delays. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(1): 66–78
- Fang Y G, Loparo K A. Stochastic stability of jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(7): 1204–1208
- El Ghaoui L, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(8): 1171–1176



王丽媛 大连理工大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为网络控制系统. 本文通信作者.

E-mail: wangliyuan@163.com

(WANG Li-Yuan Ph.D. candidate at the School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology. Her main research interest is

networked control systems. Corresponding author of this paper.)



郭戈 大连海事大学信息科学技术学院教授. 主要研究方向为网络控制系统, 智能交通系统. E-mail: geguo@yeah.net

(GUO Ge Professor at the School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University. His research interest covers networked control systems, intelligent transportation system.)



庄严 大连理工大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为移动机器人定位, 3D 地图构建, 环境识别.

E-mail: zhuang@dlut.edu.cn

(ZHUNAG Yan Professor at the School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology. His research interest covers mobile-robot localization, 3-D mapping, and place recognition.)