

多元优化算法及其收敛性分析

李宝磊¹ 施心陵¹ 苟常兴¹ 吕丹桔¹ 安镇宙² 张榆锋¹

摘 要 提出了一种搜索个体分工明确、协同合作的群智能优化算法, 并从理论上证明了其收敛性. 由于搜索个体 (搜索元) 具有分工不同的多元化特点, 所以我们称该算法为多元优化算法 (Multivariant optimization algorithm, MOA). 多元优化算法中, 全局搜索元和局部搜索元基于数据表高效的记录和分享信息以协同合作对解空间进行搜索. 在一次迭代中, 全局搜索元搜索整个解空间以寻找潜在解区域, 然后具有不同种群大小的局部搜索元组对潜力不同的历史潜在解区域以及新发现的潜在解区域进行不同粒度的搜索. 搜索元找到的较优解按照一定的规则保存在由队列和堆栈组成的结构体中以实现历史信息的高效记忆和共享. 结构体中保存的候选解在迭代过程中不断更新逐渐接近最优解, 最终找到优化问题的多个全局最优解以及局部次优解. 基于马尔科夫过程的理论分析表明: 多元优化算法以概率 1 收敛于全局最优解. 为了评估多元优化算法的收敛性, 本文利用多元优化算法以及其他五个常用的优化算法对十三个二维及十维标准测试函数进行了寻优测试. 实验结果表明, 多元优化算法在收敛成功率和收敛精度方面优于其他参与比较的算法.

关键词 多元优化算法, 收敛性, 结构体, 局部搜索元, 全局搜索元, 优化

引用格式 李宝磊, 施心陵, 苟常兴, 吕丹桔, 安镇宙, 张榆锋. 多元优化算法及其收敛性分析. 自动化学报, 2015, 41(5): 949–959

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140585

Multivariant Optimization Algorithm and Its Convergence Analysis

LI Bao-Lei¹ SHI Xin-Ling¹ GOU Chang-Xing¹ LV Dan-Ju¹ AN Zhen-Zhou² ZHANG Yu-Feng¹

Abstract In this paper, we present a swarm intelligent algorithm and study its convergence property. We name it as multivariant optimization algorithm (MOA) because its multiple searchers (atoms) are variant in responsibilities. The solution space is searched through global-local search iterations which are based on the collaboration and coordination between the local and global search groups in the MOA. In each iteration, the global atoms explore the whole solution space to locate potential areas and then multiple local groups with different numbers of local search atoms are allotted to these potential areas for different levels of refinements. The historical better solutions are recorded in a structure made up of a queue and some stacks, according to a certain rule. The candidate solutions in the structure are improved iteratively and will converge to the optimal solutions. A theoretical convergence analysis based on Markov process shows that MOA converges to more than one global optimal solutions with probability 1. To evaluate its convergence property, MOA and other five frequently compared algorithms are employed to locate the optimal solutions of thirteen two-dimensional and ten-dimensional benchmark functions. The results show that the MOA has competitive performance to the other algorithms in terms of the convergence success rate and accuracy.

Key words Multivariant optimization algorithm (MOA), convergence, structure, local atom, global atom, optimization

Citation Li Bao-Lei, Shi Xin-Ling, Gou Chang-Xing, Lv Dan-Ju, An Zhen-Zhou, Zhang Yu-Feng. Multivariant optimization algorithm and its convergence analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5): 949–959

群智能优化算法如遗传算法 (Genetic algorithm, GA) 和粒子群优化算法 (Particle swarm

optimization, PSO) 及其改进算法由于其具有鲁棒性强、便于并行处理等优点^[1], 已经被广泛应用于路径规划^[2–3]、置换流水车间调度^[4]、限量弧路由^[5]等工程优化问题中. 近年来大部分实际工程优化问题越来越复杂且往往存在多个局部最优解 (多模)^[6]. 多模性限制了经典的 GA 和 PSO 算法在复杂工程优化问题中的应用^[7]. 这是由于: 一方面多个局部最优解 (吸引域) 很容易使搜索群陷入局部最优解出现早熟停滞, 优化精度低^[8], 另一方面多个局部最优解对种群的吸引会导致算法震荡而无法收敛^[9].

为了跳出局部最优解以增加收敛于全局最优解的概率, 许多学者引入新的搜索策略, 提出了改进的

收稿日期 2014-08-11 录用日期 2014-12-16

Manuscript received August 11, 2014; accepted December 16, 2014

国家自然科学基金 (61261007, 61361010, 11303094), 云南省自然科学基金重点项目 (2013FA008) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61261007, 61361010, 11303094), and Key Program of Yunnan Natural Science Foundation (2013FA008)

本文责任编辑 沈轶

Recommended by Associate Editor SHEN Yi

1. 云南大学信息学院 昆明 650091 2. 玉溪师范学院信息技术工程学院 玉溪 653100

1. School of Information, Yunnan University, Kunming 650091
2. School of Information Technology and Engineering, Yuxi Normal University, Yuxi 653100

GA 和 PSO 算法。这些不同策略可以大致分为四类：重启、均衡全局和局部搜索、混合全局和局部搜索以及多群。基于重启策略的算法通过分析种群的收敛程度决定对部分个体重新初始化。该类方法具有跳出局部最优解的能力，但是由于种群收敛到一定程度才通过重启对全局进行再次勘察且历史信息没有被充分利用，所以其效率不高。在单一种群同时负责全局和局部搜索的算法中，需要均衡全局搜索和局部搜索以获得较好的结果。为了在多个局部最优解中找到全局最优解，Liang 等提出了全面学习粒子群算法 (Comprehensive learning particle swarm optimizer, CLPSO)^[10]。CLPSO 算法中搜索个体利用所有粒子历史信息更新自己的位置以提高全局搜索能力，逃出局部最优解。模因算法 (Memetic algorithm, MA) 是一类混合全局和局部搜索算法^[6]，搜索个体在交流之前首先通过局部学习策略进行局部调整后分享较好的信息。李航等通过首先全局搜索然后局部搜索提出了两阶段遗传算法^[11]。Wang 等提出了一种改进的 MA 算法以通过全局搜索和局部调整相结合的方式对解空间进行高效的搜索^[12]。MA 算法通过同时增强全局和局部搜索能力以提高算法的搜索能力。然而选择合适的全局策略和局部策略对算法在不同问题中的表现非常重要。尽管以上改进的算法在复杂测试函数中表现出了较好的全局收敛性，其搜索群体仍然会在受到多个局部最优解的吸引时而振荡。为了解决多模优化问题中多峰的迷惑性，多群算法应运而生。李敏强等通过引入小生境思想提出了协同多群体遗传算法^[13]。该算法中，多个群体在不同子区域独立搜索，削弱了多峰对群体的影响。受启发于萤火虫之间的相互吸引力与它们各自的亮度成正比而与它们的距离成反比，Yang 提出萤火虫算法 (Firefly algorithm, FA)^[14]。FA 算法中，每个个体仅与其周围的个体交流，这种策略有助于避免振荡，提高算法的收敛性^[15]。Liang 等把和声算法^[16]引入到动态多群粒子群算法^[17]，提出了动态多群和声粒子群算法 (Dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with harmony search, DMS-PSO-HS)^[18]。DMS-PSO-HS 算法充分发挥了动态多群粒子群算法的全局搜索能力和和声算法的局部搜索能力。这些改进的算法一定程度上提高了解决复杂工程问题的能力，然而仍然有改进的空间。它们实现的过程中，信息的交流和共享增加了计算复杂度。因此有必要找到一种高效的结构来管理搜索群以及个体之间的信息交流。

基于前人的研究成果，考虑到计算机数据结构特点，本文提出了一种基于数据结构的多元化搜索群智能优化算法。由于搜索个体具有分工不同的多

元化特点，所以我们以多元优化算法 (Multivariate optimization algorithm, MOA) 命名该算法。在 MOA 中，多个搜索个体 (元) 基于我们称之为结构体的数据结构实现高效的信息共享，按照各自的分工对解空间进行搜索以逼近全局最优解。搜索元按照分工不同可以分为全局搜索元 (Global atom) G_a 和局部搜索元 (Local atom) L_a 。在每次迭代中，全局搜索元首先在整个解空间中随机生成负责对全局进行搜索并对发现的潜在解区域进行记忆共享，然后不同规模的局部搜索元组在不同潜在解区域内进行局部搜索以找到该局部区域内的更优的解。适应度越好的区域其对应局部搜索元组规模就越大，反之亦然。全局搜索元和局部搜索元搜索到的较优的解分别按照预先设定的规则保存到结构体中，通过结构体高效地共享搜索信息。

MOA 算法中，全局元在每次迭代中首先对全局进行勘察，一旦发现更具有潜力的潜在解区域立即分享该信息，新的局部元组再对该区域进行细致开采。这种全局勘察策略与重启策略相比具有更大的概率发现多个潜在解区域，并且能够基于历史信息迅速调整搜索策略。MOA 算法也具有 MA 算法的全局 - 局部搜索交替进行的特点，然而 MOA 算法的局部搜索是由规模不同的子群相互协作完成而不是单个个体通过单独的学习实现的。多个个体协同搜索以增加单次搜索计算复杂度为代价来减少迭代次数，提高总搜索效率。同时 MOA 引入了多群算法的多群思想，但是其与大部分多群算法相比，无需额外的计算量计算个体之间的欧氏距离或者判断其所在小生境以实现总群分组^[19]。

收敛性是智能优化算法的一个重要性质，研究算法的收敛性为算法参数选择、改进策略提供了有力的理论基础^[20-21]。近年学者们从不同角度分析了 GA 和 PSO 算法的收敛性^[22]。许多学者基于随机过程给出了 GA 和 PSO 算法收敛的充要条件，从理论上解释了其易陷入局部最优解，丰富了其理论基础^[23-25]。

本文首先介绍了 MOA 算法。然后对 MOA 算法的收敛性进行了理论和实验两方面的分析。通过把 MOA 算法的寻优过程描述为马尔科夫随机过程，从理论上证明了算法以概率 1 收敛于全局最优解。通过比较多元优化算法和其他五个成熟优化算法对十三个典型二维和十维测试函数的寻优实验，我们验证了多元优化算法较其他方法具有较高的收敛成功率和精度。

1 多元优化算法

多元优化算法通过交替的全局 - 局部搜索，对解空间进行搜索并逐渐逼近全局最优解。算法基于

如图 1 所示的上三角型结构体完成对历史信息的记忆和共享来指导多元化搜索元分工合作对解空间进行全面和细致的探索. 多元优化算法中的结构体是由一个位于顶部的队列和 n 个挂接在队列节点上的堆栈所组成. 队列负责对全局元的管理, 共享全局信息; 队列负责局部元的管理, 实现局部开采并向全局元汇报其区域内更优解的位置. 其中, pPrior 指向前一个队列节点, pNext 指向后一个队列节点, pStack 指向其下挂接的堆栈, pUpper 指向上一个堆栈节点, pUnder 指向下一个堆栈节点, pAtom 指向一个搜索元.

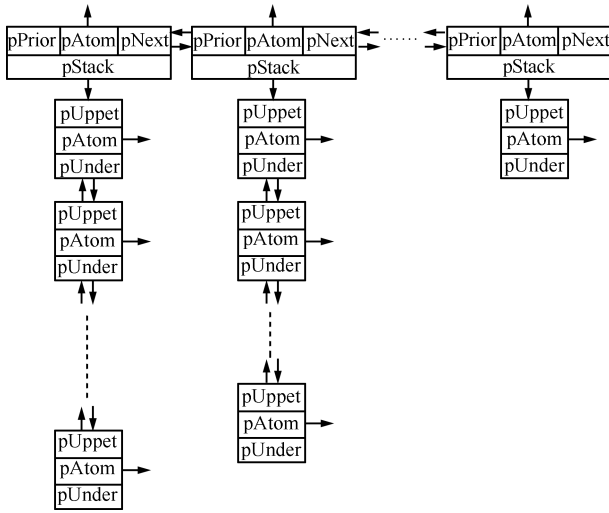


图 1 上三角型结构体

Fig. 1 Upper triangular structure

在求目标函数最小值的优化问题中, 队列节点中搜索元的适应度值按从左到右依次递增, 即队列最左端的搜索元的适应度值始终是最小的. 堆栈中节点根据搜索元的适应度值从上到下依次递增, 堆栈顶部搜索元的适应度值始终是最小的. 队列中 G_a 在队列中的位置越靠前, 在其邻域内生成的 L_a 个数就越多, 这样就能大幅增加找到更优解的概率. 结构体是 MOA 算法的迭代基础, 全局-局部搜索交替迭代进行, 直到找到全局最优解.

多元优化算法的伪代码 (Pseudo-code) 如下所示:

设置每次迭代中全局元个数 m ; 第 i 个局部内分配的局部元个数 m_i ; 局部半径 r ; 最大迭代次数 $I_{\max}$; 问题的维度 d ; 解空间第 i 维的上、下限 $\min_i$ 和 $\max_i$.

以新生成的全局元、局部元 $X_{j,i}$ ($i = 1, \dots, m; j = m_i$) 及其适应度值初始化结构体.

While $k \leq I_{\max}$

For $i = 1 : m$ //全局搜索

$G_a^i \leftarrow$ 根据式 (1) 生成全局元

$f(G_a^i) \leftarrow$ 评价 G_a^i

End For

根据 $f(X_{1,i}) \leq f(X_{1,i+1})$ 的原则, 用 G_a^i ($i = 1, \dots, n$) 更新队列.

For $i = 1 : m$

For $j = 1 : m_i$ //局部搜索

$L_a^j \leftarrow$ 根据式 (2) 生成局部元

$f(L_a^j) \leftarrow$ 评价 L_a^j

End For

根据 $f(X_{j,i}) < f(X_{j+1,i})$ 的原则, 用

L_a^j ($j = 1, \dots, m_i$) 更新第 i 个堆栈.

End For

$k = k + 1$

End While

多元优化算法的一次迭代包括全局搜索和局部搜索两个阶段. 在全局搜索阶段, 根据式 (1) 在整个搜索空间中随机生成全局元 G_a , 实现对全局的搜索.

$$\begin{cases} G_a = [h_1, \dots, h_d] \\ h_i = \text{unifrnd}(\min_i, \max_i) \end{cases} \quad (1)$$

式中, d 是问题的维度; $\min_i$ 和 $\max_i$ 分别为解空间第 i 维的下界和上界; $\text{unifrnd}(\min_i, \max_i)$ 函数返回一个均匀分布在 $\min_i$ 和 $\max_i$ 之间的随机数. 新生成的全局元与全局链表中的元比较, 适应度值较好的全局元被作为潜在解区域的中心记录在结构体的全局链表中. 在局部搜索阶段, 根据式 (2) 在以全局元 G_a 为中心、 r 为半径的局部邻域内随机生成局部元, 实现对各个潜在解区域的局部搜索.

$$L_a = G_a + r \times [l_1, \dots, l_d] \quad (2)$$

其中, l_i ($i = 1, \dots, d$) 是 -1 到 1 之间的随机数. 新生成的局部元与局部链表中的元比较, 较好的元作为历史信息保留下来. 如果局部元优于该区域的全局元, 则该局部元将取代全局元作为新的潜在解区域中心进入全局链表.

由 MOA 算法的流程可知: 与 GA 和 PSO 相比, 多元化搜索个体的管理增加了算法的计算复杂度. 当用上三角形结构体时, $m_i = m - i + 1$, 则 MOA 算法一次迭代的计算复杂度为 $O(m + m(m + 1)/2)$.

2 多元优化算法的收敛性分析

假设所求解目标问题的状态空间 S 是有限集, 我们首先证明了当算法的运行过程可以用齐次马尔科夫链来描述, 然后基于 MOA 寻优过程的状态转移概率, 证明了 MOA 算法以概率 1 收敛于全局最优解.

定义 1. MOA 算法在第 t 次迭代时结构体状态集合为 $X(t) = \{\mathbf{x}_{t,1}, \dots, \mathbf{x}_{t,n}\}$, 其中 $\mathbf{x}_{t,i} \in S, n <$

∞ , $\mathbf{x}$ 和 S 分别表示可行解向量和解空间, n 为结构体中搜索元的个数. $\{X(t), t > 0\}$ 构成一个离散时间的随机过程, 其状态空间为 $E = |S|^n$.

定义 2. 优化问题的全局最优解集合为

$$E^* = \{\mathbf{x}^* | \nexists \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)\} \quad (3)$$

令 $F(X(t)) = |X(t) \cap E^*|$ 表示结构体中包含的最优解的个数.

定义 3. 如果对于任意初始状态 X_0 均有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(F(X(t)) > 0 | X(0) = X_0) = 1 \quad (4)$$

则称算法以概率 1 收敛于全局最优解.

定理 1. MOA 算法的寻优过程 $\{X(t), t > 0\}$ 是有限齐次马尔科夫链.

证明. 当 $t = 0$ 时, 结构体的初始状态 $X(0) = \{\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,n}\}$ 是随机产生的. 在后续的迭代搜索过程中, 搜索元基于当前结构体中记忆的信息对解空间搜索, 并用搜索过程中获得的有用信息对结构体的状态进行更新. 令 t 时刻结构体的状态为 $X(t)$, 下一时刻结构体的状态为 $X(t+1)$. 由多元优化算法的搜索过程可以看出, 搜索元搜索解空间使结构体以概率 $P(X(t+1)|X(t))$ 转移到下一个状态. 该概率依赖于当前结构体的状态 $X(t)$ 且是一个与时间无关的常量:

$$P(X(t+1) = X_i | X(t) = X_j) = \zeta, \quad \zeta > 0 \quad (5)$$

其中, X_i, X_j 是两个任意的状态. 可见 $\{X(t), t > 0\}$ 具有齐次马尔科夫性质.

由于结构体大小是有限的, 所以如果搜索空间有限, 则结构体的状态有限. 这样结构体的状态转移构成的马尔科夫过程的状态空间有限, 因此多元优化算法的搜索过程 $\{X(t), t > 0\}$ 是有限齐次马尔科夫链. $\square$

定理 2. 结构体包含最优解的个数序列是单调不递减的, 即对于任意 $\forall t \geq 0$, 有

$$P(F(X(t+1)) < m | F(X(t) = m)) = 0, \quad m \geq 0 \quad (6)$$

证明. 由于表示最优解的搜索元的适应度值总是优于其他搜索元, 而多元优化算法的选择策略为保留较优搜索元, 因此老一代结构体中的最优解在新一代结构体中不可能被淘汰, 即在任意时刻 t 结构体中最优解的个数为 m ($m \geq 0$) 的条件下, $t+1$ 时刻结构体中最优解的个数小于 m 的概率是 0. $\square$

定理 3. 多元优化算法在任意时刻都有可能发现全局最优解, 即

$$P(F(X(t+1)) > 0 | F(X(t) = 0)) > 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (7)$$

证明. 由多元优化算法的搜索策略可知, 全局搜索元组在整个搜索空间中随机生成, 故任意时刻全局搜索元为任一可能解的概率不为 0. 则任意时刻全局搜索元为全局最优解的概率也不为 0. 故在老一代结构体中最优解的个数为 0 的条件下, 新一代搜索元中最优解的个数不为 0 的概率大于 0. $\square$

定理 4. 多元优化算法以概率 1 收敛于全局最优解.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(F(X(t)) > 0) = 1 \quad (8)$$

证明. 记 t 时刻结构体中最优解的个数为 i 的概率为 $P_i(t) = P(F(X(t)) = i)$, 由贝叶斯条件概率公式有

$$\begin{aligned} P_0(t+1) &= P(F(X(t+1)) = 0 | F(X(t)) = 0) \times \\ &\quad P(F(X(t)) = 0) + P(F(X(t)) \neq 0) \times \\ &\quad P(F(X(t+1)) = 0 | F(X(t)) \neq 0) \end{aligned}$$

由定理 2 可得: $P(F(X(t+1)) = 0 | F(X(t)) \neq 0) = 0$, 所以

$$P_0(t+1) = P(F(X(t+1)) = 0 | F(X(t)) = 0) \times P_0(t)$$

又由定理 3 可知: $P(F(X(t+1)) > 0 | F(X(t)) = 0) > 0$, 令 $\xi = \min(P(F(X(t+1)) > 0 | F(X(t)) = 0), t = 0, 1, \dots)$, 即

$$P(F(X(t+1)) > 0 | F(X(t)) = 0) \geq \xi > 0 \quad (9)$$

由式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} P(F(X(t+1)) = 0 | F(X(t)) = 0) &= \\ 1 - P(F(X(t+1)) \neq 0 | F(X(t)) = 0) &= \\ 1 - P(F(X(t+1)) > 0 | F(X(t)) = 0) &\leq \\ 1 - \xi < 1 \quad (t = 0, 1, \dots) \end{aligned}$$

所以

$$P_0(t+1) \leq (1 - \xi)P_0(t) \leq \dots \leq (1 - \xi)^{t+1}P_0(0)$$

因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \xi)^{t+1} = 0$, 且 $0 \leq P_0(0) \leq 1$, 所以当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$0 \leq P_0(t+1) \leq (1 - \xi)^{t+1}P_0(0) = 0$$

因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t+1) = 0$, 综上所述

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(F(X(t+1)) > 0) &= \\ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P(F(X(t+1)) = 0) &= \\ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t+1) &= 1 \end{aligned}$$

由此, $\lim_{t \rightarrow \infty} P(F(X(t)) > 0) = 1$. $\square$

3 实验和结果

3.1 实验设置

为了运用统计分析的方法公平合理地比较 6 种

不同算法的性能, 我们对如表 1 所示的 13 个 2 维和 10 维标准测试函数分别进行了 30 次寻优测试. 表中 D 表示问题的维度, ϵ 为搜索精度阈值, 当算法找到的最优解与全局最优解的欧氏距离小于该阈值时,

表 1 测试函数
Table 1 Benchmark functions

函数名	函数表达式	搜索空间	维度	全局最优解	ϵ	r
Michalewicz	$\sum_{i=1}^d (\sin(\frac{i \cdot x_i^2}{\pi}))^{20} \sin(x_i) + 1.81 - \sum_{i=1}^5 c_i \cdot \cos(z_i \pi) \cdot e^{-\frac{z_i}{\pi}} + 5.163$ $z_i = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$	$(0, 5)^D$	$D = 2$	$[2.20, 1.57]$	0.1	0.1
Langermann	$a = [3, 5, 2, 1, 7]$ $b = [5, 2, 1, 4, 9]$ $c = [1, 2, 5, 2, 3]$	$(0, 10)^D$	$D = 2$	$[2.00, 1.00]$	0.1	0.1
YangStandingWave	$e^{(-\sum_{i=1}^d (\frac{x_i}{15})^6)} - 2e^{(-\sum_{i=1}^d x_i^2)} \prod_{i=1}^d \cos^2(x_i)$	$(-20, 20)^D$	$D = 2$	$[0.00, 0.00]$	0.1	0.4
Damavandi	$\left[1 - \left \frac{\sin[\pi(x_1 - 2)] \sin[\pi(x_2 - 2)]}{\pi^2(x_1 - 2)(x_2 - 2)}\right ^5\right] \times$ $(2 + (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2) + 1$	$(0, 14)^D$	$D = 2$	$[2.00, 2.00]$	0.1	0.15
CF1	$cf_1 \sim cf_{10}$: Sphere function $[\delta_1, \dots, \delta_{10}] = [1, \dots, 1]$ $[\lambda_1, \dots, \lambda_{10}] = [0.05, \dots, 0.05]$	$(-5, 5)^D$	$D = 2$ $D = 10$	$[-1.94 - 3.78]$ $[-1.94, -3.78, -1.54, 1.61, 1.34, 2.45, 1.79, 3.75, 0.13, -0.08]$	0.1 0.5	0.1 0.1
CF2	$cf_1 \sim cf_{10}$: Griewank's function $[\delta_1, \dots, \delta_{10}] = [1, \dots, 1]$ $[\lambda_1, \dots, \lambda_{10}] = [0.5, \dots, 0.5]$	$(-5, 5)^D$	$D = 2$ $D = 10$	$[-3.85, 3.42]$ $[-3.85, 3.42, 1.71, 3.07, 0.6, 2.58, 4.03, 4.18, -4.02, 3.84]$	0.1 0.5	0.1 0.1
CF3	$cf_1 \sim cf_{10}$: Griewank's function $[\delta_1, \dots, \delta_{10}] = [1, \dots, 1]$ $[\lambda_1, \dots, \lambda_{10}] = [1, \dots, 1]$	$(-5, 5)^D$	$D = 2$ $D = 10$	$[1.06, -3.76]$ $[1.06, -3.76, 3.96, -2.57, 3.36, 0.87, 2.34, -3.48, -3.68, 0.39]$	0.1 0.5	0.1 0.1
CF4	$cf_1 \sim cf_2$: Ackley's function $cf_3 \sim cf_4$: Rastrigin's function $cf_5 \sim cf_6$: Weierstrass function $cf_7 \sim cf_8$: Griewank's function $cf_9 \sim cf_{10}$: Sphere function $[\delta_1, \dots, \delta_{10}] = [1, \dots, 1]$ $[\lambda_1, \dots, \lambda_5] = [\frac{5}{32}, \frac{5}{32}, 1, 1, 10]$ $[\lambda_6, \dots, \lambda_{10}] = [10, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05]$	$(-5, 5)^D$	$D = 2$ $D = 10$	$[3.33, -1.28]$ $[3.33, -1.28, 1.90, -0.41, 0.09, 2.76, 0.98, -1.81, -2.50, 2.74]$	0.1 0.5	0.1 0.1
CF5	$cf_1 \sim cf_2$: Rastrigin's function $cf_3 \sim cf_4$: Weierstrass function $cf_5 \sim cf_6$: Griewank's function $cf_7 \sim cf_8$: Ackley's function $cf_9 \sim cf_{10}$: Sphere function $[\delta_1, \dots, \delta_{10}] = [1, \dots, 1]$ $[\lambda_1, \dots, \lambda_5] = [\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 10, 10, 0.05]$ $[\lambda_6, \dots, \lambda_{10}] = [0.05, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, 0.05, 0.05]$	$(-5, 5)^D$	$D = 2$ $D = 10$	$[1.60, 2.64]$ $[1.60, 2.64, 1.80, 0.94, -3.05, -1.16, 3.56, 2.42, -0.38, 4.46]$	0.1 0.5	0.1 0.1

我们称算法成功收敛于全局最优解. 2 维和 10 维优化问题中, ϵ 的设置分别与文献 [26] 和文献 [27] 保持一致. r 为 MOA 算法中的局部搜索半径, r 的选择对算法的性能具有一定的影响, 根据经验, r 一般设置为搜索空间上下限差值的 0.1~0.2 倍较宜, 这与小生境算法中小生境半径的设置一致^[28].

函数 CF1~CF5 是 Liang 等提出的新型合成多峰复杂测试函数^[29]. Suganthan^[30] 在其个人主页 (<http://www.ntu.edu.sg/home/EPNSugan/>) 上提供了这些函数的代码及其所使用的正交矩阵、偏移全局最优解、控制参数.

所有参与比较的算法具有相同的种群大小和迭代次数. 在 2 维的优化问题中, 种群大小为 20, 最大迭代次数为 200. 在 10 维的优化问题中, 种群大小为 65, 最大迭代次数为 450. 算法达到最大迭代次数就停止.

参与比较的算法以及文献中给出的各自特有最优参数如下:

1) 精英保留策略的基因算法: 每次迭代种群更新率 (Generation gap) 为 0.8; 交叉和变异的概率分别设置为 0.2 和 0.01^[31].

2) 自适应惯性权重的粒子群优化算法: 惯性权重随着迭代次数的增加从 1.4 按照指数递减到 0.5; 加速常数 c_1 和 c_2 均为 1.49445^[32].

3) 全面学习粒子群优化算法: 惯性权重随着迭代次数的增加从 0.9 按照指数递减到 0.4; 加速常数 c 为 1.49445; 更新间隔 (Refreshing gap) 为 7^[10].

4) 动态多粒子群和声算法: DMS-PSO-HS 算法的提出者建议的最优参数如下^[18]: $w = 0.729$, $c_1 = c_2 = 1.49445$. 在 2 维的优化问题中, 5 个子群, 每个子群内有 4 个个体; 在 10 维的优化问题中, 13 个子群, 每个子群内有 5 个个体. 重新分组间隔 $R = 10$, 和声记忆采取率 $HMCR = 0.98$, 第 t 次迭代时微调概率 $PAR(t)$ 及范围宽度 $bw(t)$ 由下式决定:

$$PAR(t) = 0.01 + \frac{0.99 - 0.01}{max_g} \times t$$

$$bw(t) = (0.05 \times (UB - LB))e^{\frac{0.0001}{(0.05 \times (UB - LB))} \times t}$$

其中, max_g 是最大迭代次数, UB 和 LB 是搜索空间的上下限.

5) 萤火虫算法: 随机搜索因子 α 为 0.2; 吸引力参数 β_0 为 1; 亮度吸收参数 γ 为 1^[14].

6) 多元优化算法: 结构体为三角形结构. 在 2 维的优化问题中, 队列长度为 5; 在 10 维的优化问

题中, 队列长度为 10. 堆栈深度从左到右依次递减 1, 左边第一个堆栈栈深与队列长度相等, 全局搜索元个数与队列长度相等, 局部搜索元组种群大小与其对应的堆栈深度相等.

3.2 结果分析

本文以全局最优解收敛成功率 (成功收敛于最优解的测试次数与测试总次数的比率) 和算法找到的最优解与全局最优解之间误差的欧氏距离 (收敛精度) 为评价标准, 对 6 个算法做了统计分析比较, 并基于适应度渐近曲线比较了 6 种算法在欺骗性较强、局部极值较多优化问题中的收敛性能.

表 2 为 6 种算法分别对 13 个全局优化测试函数执行 30 次寻优的收敛成功率统计结果. 由表 2 可知:

1) 在大部分优化问题中, 多元优化算法的收敛成功率大于其他几个算法. 在对 10 维 CF3 函数寻优中, 虽然 MOA 收敛成功率不是最高, 但是其与最高值相差不大. MOA 算法仅在 2 维 CF2 函数寻优中获得成功收敛率较低. 可见, 与其他方法相比, MOA 算法收敛于全局最优解的概率较高. MOA 算法中全局元对全局进行勘察, 不仅能够快速发现较优区域, 而且保证了种群的多样性不随迭代次数的增加而衰减. 这正是 MOA 算法能够跳出局部最优解逐渐向全局最优解收敛并获得较高收敛成功率的原因. MOA 算法具有在多个区域独立搜索以发现多个最优解以及局部次优解的能力, 然而当局部最优值与全局最优值非常接近时, 由于其很难根据适应度值区分局部陷阱与全局最优解, 所以尽管其找到的最优解适应度值很接近全局最优值, 然而该最优解与全局最优解的欧氏距离可能很远, 这也符合没有免费的午餐定理. CF2 函数全局最优解附近有较多的局部最优解且其适应度值与全局最优值非常接近, 然而本文以算法找到的最优解距离全局最优解的欧氏距离而非最优解的适应度值为依据来判断算法是否成功收敛于全局最优解. 这就解释了为什么 MOA 算法对 CF2 函数寻优时具有较低的收敛成功率.

2) 在大部分优化问题特别是 2 维优化问题中, 改进的算法包括 CLPSO、DMS-PSO-HS 以及新算法 FA 获得的收敛成功率较经典的 GA 和 PSO 算法高. 这一定程度上说明了混合全局-局部策略和多群策略有利于消弱早熟收敛、多峰迷惑现象, 从而在多个局部最优解中找到全局最优解. MOA 算法较高的收敛成功率也得益于交替的全局-局部搜索和多群分工策略.

3) 在 10 维的优化问题中, 所有算法的收敛成功

表 2 收敛成功率统计
Table 2 Static of convergence success rate

函数	维度	GA (%)	PSO-w	CLPSO (%)	DMS-PSO-HS (%)	FA (%)	MOA (%)
Michalewicz	2	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Langermann	2	33.0	74.0	100.0	81.5	99.0	100.0
YangStandingWave	2	97.5	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Damavandi	2	0.0	0.0	0.0	0.0	28.5	33.3
CF1	2	81.5	78.0	100.0	94.0	100.0	100.0
CF2	2	3.0	60.0	94.0	42.5	89.0	47.5
CF3	2	19.0	66.5	98.0	82.5	100.0	100.0
CF4	2	13.5	21.5	14.0	22.0	58.0	66.5
CF5	2	30.5	49.0	87.5	64.0	100.0	100.0
CF1	10	76.7	46.7	46.7	80.0	0.0	100.0
CF2	10	10.0	0.0	13.3	30.0	0.0	33.3
CF3	10	3.3	0.0	0.0	3.3	0.0	0.0
CF4	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
CF5	10	30.0	56.7	3.3	73.3	0.0	100.0

率普遍偏低, 特别是对于 10 维 CF3 以及 CF4 函数. 尽管如此, MOA 算法在其他 3 个 10 维测试函数中仍然获得了明显高于其他算法的收敛成功率. 与 2 维优化问题相比, 10 维优化问题具有局部陷阱数量多、优化变量多的特点. 这一方面增加了算法陷入局部最优解的概率, 另一方面给算法收敛精度带来了挑战. GA、PSO、CLPSO 和 FA 算法收敛成功率偏低的主要原因是它们容易受多局部陷阱影响, 出现早熟收敛或者震荡不收敛现象. MOA 和 DMS-PSO-HS 算法收敛成功率偏低的主要原因是它们的收敛精度没有达到标准. 特别是 MOA 算法的局部搜索方式是以全局元为中心的云状搜索. 尽管这种局部搜索方式计算复杂度低, 发现隐蔽最优解能力强, 然而局部半径大小对算法收敛精度具有较大影响. 较小的局部半径会导致较慢的收敛速度和较弱的逃离局部陷阱能力, 然而较大的局部半径无法保证较高的收敛进度. 收敛精度不达标是 MOA 算法在 10 维优化问题中较低收敛成功率的主要原因.

综上所述, MOA 算法具有在多个局部最优解中找到全局最优解的能力, 并且其全局最优解收敛成功率高于其他 5 个成熟的算法.

表 3 为 6 种算法分别对 13 个测试函数执行 30 次寻优的收敛误差均值和标准差统计结果. 数据格式为: 误差均值 $\pm$ 标准差. 由表 3 我们可以得到如下结论:

1) 除了 2 维 CF2 和 10 维 CF3、CF4 以外, 多元优化算法的收敛误差均值小于其他几个算法. 在对 2 维函数 CF2 寻优中, 虽然 MOA 收敛误差均值不是最低的, 但是其与最低值相差不大. MOA 算

法仅对 10 维函数 CF3 和 CF4 寻优收敛误差较大. 尽管如此, MOA 算法在其他 3 个 10 维测试函数中仍然获得了明显低于其他算法的收敛误差均值. 对于大部分优化问题, MOA 算法收敛误差低于其他 5 个方法. MOA 算法在对 10 维 CF3、CF4 函数寻优测试中收敛误差较大的主要原因是在这两个函数的全局最优解的吸引域相对较小且解空间中存在多个离全局最优解较远而适应度值与全局最优解较接近的局部最优解. MOA 算法中的全局元能够快速找到吸引域相对较大的局部最优解所在区域, 由于局部最优解适应度值与全局最优解接近, 全局解所在区域内优于局部最优解的区域就较小. 局部最优解进入队列的速度越快, 落入全局解所在区域的全局元进入队列的机会就越少. 交替的全局 - 局部搜索策略加快了算法的收敛速度, 也增加了算法忽略吸引域较小、适应度值较局部最优解差距不大的全局最优解的概率.

2) 在大部分 2 维以及 10 维优化问题中, 改进的算法包括 CLPSO、DMS-PSO-HS 以及新算法 FA 获得的收敛误差均值较经典的 GA 和 PSO 算法低. 这是由于一方面经典算法收敛成功率低, 另一方面经典算法跳出局部最优解的能力较弱, 其陷入离全局最优解较远的局部最优解后早熟收敛. 然而改进的算法及新算法由于引入新的搜索策略, 具有跳出局部最优解的能力, 即使其无法找到全局最优解, 其也有可能跳出离全局最优解较远的局部最优解而向离全局最优解较近的局部最优解逼近, 这种现象在包络是单峰的多峰优化问题中经常发生. 10 维测试函数 CF1 和 CF3 的实验结果也佐证了这一点. GA 算法的收敛成功率高于 CLPSO 算法, 然而 GA 的

表 3 收敛精度统计
Table 3 Static of convergence accuracy

函数	维度	GA	PSO-w	CLPSO	DMS-PSO-HS	FA	MOA
Michalewicz	2	0.003±0.00	0.003±0.00	0.003±0.00	0.003±0.00	0.005±0.00	0.003±0.00
Langermann	2	2.467±3.28	2.095±3.76	0.007±0.00	1.601±3.50	0.042±0.02	0.007±0.00
YangStandingWave	2	0.175±1.10	0.000±0.00	0.000±0.00	0.000±0.00	0.018±0.01	0.000±0.00
Damavandi	2	7.071±0.00	7.071±0.00	7.071±0.00	7.071±0.00	5.068±3.18	5.013±3.01
CF1	2	0.764±1.64	0.769±1.46	0.003±0.00	0.215±0.86	0.018±0.01	0.003±0.00
CF2	2	3.196±3.58	2.840±3.56	0.042±1.34	2.072 ±3.12	0.045±0.08	0.147±0.15
CF3	2	2.060±1.54	1.051±1.56	0.076±0.52	0.553±1.25	0.023±0.01	0.002±0.00
CF4	2	4.250±2.38	3.679±2.31	3.165±1.40	3.557±2.24	1.926±2.50	1.733±2.72
CF5	2	3.016±2.13	2.113±2.07	0.517±1.37	1.489±1.99	0.028±0.01	0.006±0.00
CF1	10	1.964±3.63	4.877±4.7	0.577±0.27	1.617±3.27	4.029±1.85	0.256±0.03
CF2	10	6.245±5.27	8.187±4.69	1.392±1.68	5.918±4.68	2.810±0.46	0.955±0.22
CF3	10	7.066±4.19	6.949±3.74	4.110±2.81	6.787±4.61	6.172±3.61	6.378±3.21
CF4	10	9.138±0.62	9.457±1.31	8.865±0.53	8.239±0.52	9.295±0.7	9.671±0.64
CF5	10	3.229±4.91	5.543±6.31	0.845±0.21	3.153±5.13	3.296±0.62	0.305±0.05

收敛误差均值仍然高于 CLPSO 算法。
综上所述, MOA 算法能够以一定的精度在多个局部最优解中找到全局最优解, 并且其全局最优解收敛误差低于其他 5 个成熟的算法。为了形象

地说明 MOA 算法在欺骗性较强、局部极值较多优化问题中的收敛性能, 我们绘制了如图 2 所示的四个具有代表性测试函数的适应度均值曲线。其中 Langermann 和 Damavandi 函数具有较强的欺骗

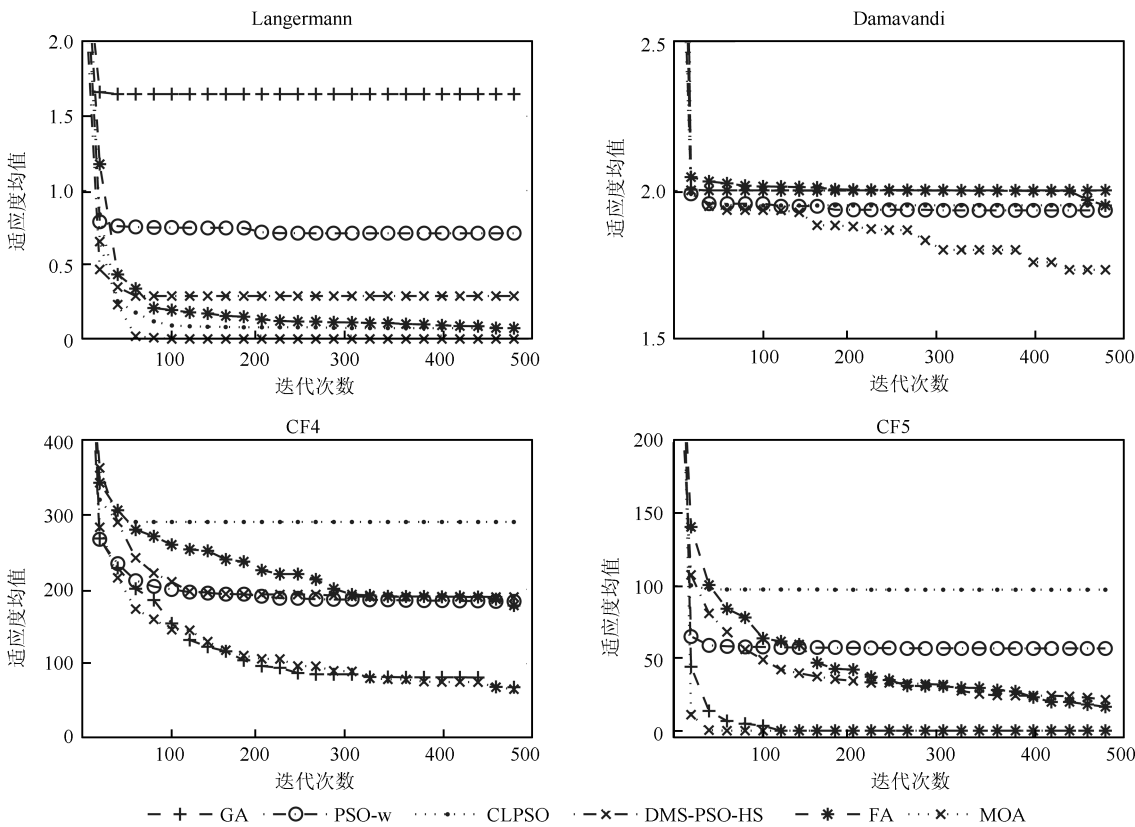


图 2 适应度均值曲线
Fig. 2 Averaged fitness-value curves

性, 局部陷阱的吸引很容易误导搜索群, 导致算法早熟收敛; CF4 和 CF5 具有较多的局部极值, 多局部极值之间的吸引容易导致算法在多个极值之间震荡而无法收敛。

由图 2 中 Langermann 和 Damavandi 函数适应度均值曲线可以看出, 随着迭代次数的增加, MOA 算法的适应度值不断降低, 而其他方法的适应度达到某一值后不再变化。可见, 随着迭代次数的增加, MOA 算法能够跳出欺骗性函数的局部陷阱向全局最优解靠, 而其他算法容易陷入局部最优解而早熟收敛。这是由于: 一方面 MOA 算法中全局元在每次迭代时都进行全局勘察, 一旦发现更优的区域立即在该区域内进行局部搜索, 而局部陷阱区域的全局元在队列更新操作中被排到队列的后面或者被挤出队列; 另一方面 MOA 算法中局部元以全局元为中心进行云团状搜索, 增加了算法在搜索过程中发现如 Damavandi 函数隐蔽性较强全局最优解的概率。

由图 2 中 CF4 和 CF5 函数适应度均值曲线可以看出, 随着迭代次数的增加, MOA 和 DMS-PSO-HS 两个多群算法的适应度值不断接近全局最优值, 而其他方法的适应度值达到某一点后不再变化。可见, 随着迭代次数的增加, MOA 和 DMS-PSO-HS 两个多群算法受多局部极值迷惑较少, 而其他算法容易在多个极值之间震荡而无法收敛, 不能逐渐向最优解靠近。原因在于多群算法中的各个子群在某一局部区域相对独立的搜索, 该局部区外的其他极值对其不产生吸引作用, 这样就降低了多局部极值对算法的影响。

4 结论

本文根据计算机数据结构的特点, 通过队列和堆栈高效共享搜索信息, 提出了一种多元化的群搜索优化算法。该算法具有操作简单、能够以较高的成功率和精度在多个局部最优解中找到全局最优解的优点。本文详细地描述了算法的寻优过程, 并通过把算法的搜索过程描述成一个随机过程, 从理论上证明了算法始终以概率 1 收敛于全局最优解。模拟实验结果表明, MOA 算法与其他 5 个成熟的群优化算法相比具有较高的收敛成功率和精度, 特别是在欺骗性较强、局部极值较多优化问题中。

本文主要介绍了多元优化算法的基本原理并证明了其收敛性, 以后的工作将从参数对算法性能的影响出发, 来进一步提高算法在高维复杂寻优问题中的收敛成功率和精度。

致谢

感谢 Suganthan 和 Yang 教授在 [http://www.](http://www.ntu.edu.sg/home/epnsugan)

[ntu.edu.sg/home/epnsugan](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29693-firefly-algorithm) 和 <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29693-firefly-algorithm> 网页上分享 CLPSO、DMS-PSO-HS、FA 以及混合测试函数代码。

References

- 1 Sivanandam S N, Deepa S N. *Introduction to Genetic Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 78–82
- 2 Li Ren-Fu, Dokgo Myongchol, Hu Lin. Path planning based on PSO algorithm convergence and parameters analysis. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2013, **41**(S1): 271–275 (李仁府, 独孤明哲, 胡麟. 基于 PSO 算法的路径规划收敛性与参数分析. 华中科技大学学报 (自然科学版), 2013, **41**(S1): 271–275)
- 3 Liang J J, Song H, Qu B Y, Mao X B. Path planning based on dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with crossover. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Computing Theories and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2012. 159–166
- 4 Liu Chang-Ping, Ye Chun-Ming. Solving permutation flow-shop scheduling problem by firefly algorithm. *Industrial Engineering and Management*, 2012, **17**(3): 56–59 (刘长平, 叶春明. 置换流水车间调度问题的萤火虫算法求解. 工业工程与管理, 2012, **17**(3): 56–59)
- 5 Tang K, Mei Y, Yao X. Memetic algorithm with extended neighborhood search for capacitated arc routing problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, **13**(5): 1151–1166
- 6 Wang H F, Moon I, Yang S X, Wang D W. A memetic particle swarm optimization algorithm for multimodal optimization problems. *Information Sciences*, 2012, **197**: 38–52
- 7 Zhang Yong, Gong Dun-Wei, Zhang Wan-Qiu. A simplex method based improved particle swarm optimization and analysis on its global convergence. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 289–298 (张勇, 巩敦卫, 张婉秋. 一种基于单纯形法的改进微粒群优化算法及其收敛性分析. 自动化学报, 2009, **35**(3): 289–298)
- 8 Liu Chang-Ping, Ye Chun-Ming. Mutative scale chaos particle swarm optimization algorithm based on self logical mapping function. *Application Research of Computer*, 2011, **28**(8): 2825–2827 (刘长平, 叶春明. 基于逻辑自映射的变尺度混沌粒子群优化算法. 计算机应用研究, 2011, **28**(8): 2825–2827)
- 9 Brits R, Engelbrecht A P, Van Den Bergh F. Scalability of niche PSO. In: *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Swarm Intelligence Symposium*. New York, USA: IEEE, 2003. 228–234
- 10 Liang J J, Qin A K, Suganthan P N, Baskar S. Comprehensive learning particle swarm optimizer for global optimization of multimodal functions. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, **10**(3): 281–295

- 11 Li Hang, Li Min-Qiang, Kou Ji-Song. Dynamical behavior of genetic algorithms on multi-modal optimization. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 180–187
(李航, 李敏强, 寇纪淞. 遗传算法求解多模态优化问题的动力性. 自动化学报, 2008, **34**(2): 180–187)
- 12 Wang Z, Tang K, Yao X. A memetic algorithm for multi-level redundancy allocation. *IEEE Transactions on Reliability*, 2010, **59**(4): 754–765
- 13 Li Min-Qiang, Kou Ji-Song. Coordinate multi-population genetic algorithm for multi-modal function optimization. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(4): 497–504
(李敏强, 寇纪淞. 多模态函数优化的协同多群体遗传算法. 自动化学报, 2002, **28**(4): 497–504)
- 14 Yang X S. Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, 2010, **2**(2): 78–84
- 15 Liu Chang-Ping, Ye Chun-Ming. Novel bioinspired swarm intelligence optimization algorithm: firefly algorithm. *Application Research of Computer*, 2011, **28**(9): 3295–3297
(刘长平, 叶春明. 一种新颖的仿生群智能优化算法: 萤火虫算法. 计算机应用研究, 2011, **28**(9): 3295–3297)
- 16 Lee K S, Geem Z W. A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**: 3902–3933
- 17 Liang J J, Suganthan P N. Dynamic multi-swarm particle swarm optimizer. In: *Proceedings of the 2005 IEEE International Swarm Intelligence Symposium*. New York, USA: IEEE, 2005. 124–129
- 18 Zhao S Z, Suganthan P N, Pan Q K, Tasgetiren M F. Dynamic multi-swarm particle swarm optimizer with harmony search. *Expert Systems with Applications*, 2011, **38**(4): 3735–3742
- 19 Li L, Tang K. History-based topological speciation for multimodal optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, (99): 1, DOI: 10.1109/TEVC.2014.2306677
- 20 Li Min-Qiang, Kou Ji-Song, Lin Dan, Li Shu-Quan. *The Basic Theory and Application Genetic Algorithm*. Beijing: Science Press, 2002. 78–79
(李敏强, 寇纪淞, 林丹, 李书全. 遗传算法的基本理论与应用. 北京: 科学出版社, 2002. 78–79)
- 21 Pan Feng, Chen Jie, Gan Ming-Gang, Cai Tao, Tu Xu-Yan. Model analysis of particle swarm optimizer. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(3): 368–377
(潘峰, 陈杰, 甘明刚, 蔡涛, 涂序彦. 粒子群优化算法模型分析. 自动化学报, 2006, **32**(3): 368–377)
- 22 Pan Feng, Chen Jie, Xin Bin, Zhang Juan. Several characteristics analysis of particle swarm optimizer. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(7): 1010–1016
(潘峰, 陈杰, 辛斌, 张娟. 粒子群优化方法若干特性分析. 自动化学报, 2009, **35**(7): 1010–1016)
- 23 Yu Zhi-Gang, Song Shen-Min, Duan Guang-Ren. On the mechanism and convergence of genetic algorithm. *Control and Decision*, 2005, **20**(9): 971–980
(于志刚, 宋申民, 段广仁. 遗传算法的机理与收敛性研究. 控制与决策, 2005, **20**(9): 971–980)
- 24 Jin Xin-Lei, Ma Long-Hua, Wu Tie-Jun, Qian Ji-Xin. convergence analysis of the particle swarm optimization based on stochastic processes. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **33**(12): 1263–1268
(金欣磊, 马龙华, 吴铁军, 钱积新. 基于随机过程的 PSO 收敛性分析. 自动化学报, 2008, **33**(12): 1263–1268)
- 25 Pan Feng, Zhou Qian, Li Wei-Xing, Gao Qi. Analysis of standard particle swarm optimization algorithm based on Markov chain. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 381–389
(潘峰, 周倩, 李位星, 高琪. 标准粒子群优化算法的马尔科夫链分析. 自动化学报, 2013, **39**(4): 381–389)
- 26 Li X D. Niching without niching parameters: particle swarm optimization using a ring topology. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2010, **14**(1): 150–169
- 27 Das S, Abraham A, Chakraborty U K, Konar A. Differential evolution using a neighborhood-based mutation operator. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, **13**(3): 526–553
- 28 Li X D. Adaptively choosing neighbourhood bests using species in a particle swarm optimizer for multimodal function optimization. In: *Proceedings of the 2004 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004. 105–116
- 29 Liang J J, Suganthan P N, Deb K. Novel composition test functions for numerical global optimization. In: *Proceedings of the 2005 IEEE Swarm Intelligence Symposium*. New York, USA: IEEE, 2005. 68–75
- 30 Suganthan P N. Benchmarks for evaluation of evolutionary algorithms [Online], available: http://www.ntu.edu.sg/home/epsugan/index_files/SIS2005-function-codes.zip, May 6, 2014
- 31 Djurišić A B. Elite genetic algorithms with adaptive mutations for solving continuous optimization problems-application to modeling of the optical constants of solids. *Optics Communications*, 1998, **151**(1–3): 147–159
- 32 Shi Y, Eberhart R C. A modified particle swarm optimizer. In: *Proceedings of the 1998 IEEE World Congress on Computational Intelligence*. New York, USA: IEEE, 1998. 69–73



李宝磊 云南大学信息学院博士研究生. 2009 年获得延边大学工学院电子系学士学位. 主要研究方向为智能优化算法, 信号处理. E-mail: bl_li@126.com

(**LI Bao-Lei** Ph.D. candidate at the School of Information, Yunnan University. He received his bachelor degree from Yanbian University in 2009. His

research interest covers intelligent optimization algorithm and signal processing.)



施心陵 云南大学信息学院教授. 主要研究方向为智能优化算法, 生物医学. 本文通信作者. E-mail: xlshi@ynu.edu.cn

(**SHI Xin-Ling** Professor at the School of Information, Yunnan University. His research interest covers intelligent optimization algorithm and biomedicine. Corresponding author of

this paper.)



苟常兴 云南大学信息学院硕士研究生. 2011 年获得云南大学信息学院学士学位. 主要研究方向为智能优化算法.

E-mail: gou.changxing@gmail.com

(**GOU Chang-Xing** Master student at the School of Information, Yunnan University. He received his bachelor degree from Yunnan University in

2011. His research interest covers intelligent optimization

algorithm.)



吕丹桔 云南大学信息学院博士研究生. 主要研究方向为智能优化算法, 信号检测. E-mail: lvdanjv@gmail.com

(**LV Dan-Ju** Ph.D. candidate at the School of Information, Yunnan University. Her research interest covers intelligent optimization algorithm and signal detection.)



安镇宙 云南玉溪师范学院信息技术工程学院教授. 2012 年获得云南大学信息学院博士学位. 主要研究方向为智能优化算法, 信号处理.

E-mail: anzhenzhou@sina.com

(**AN Zhen-Zhou** Professor at the School of Information Technology and Engineering, Yuxi Normal University.

He received his Ph.D. degree from Yunnan University in 2012. His research interest covers intelligent optimization algorithm and signal processing.)



张榆锋 云南大学信息学院教授. 主要研究方向为医学信号处理, 生物医学.

E-mail: zhangyf@ynu.edu.cn

(**ZHANG Yu-Feng** Professor at the School of Information, Yunnan University. His research interest covers biosignal processing and biomedicine.)