

矢量自对偶形态学滤波算子

雷涛^{1,2} 樊养余² 罗维薇¹ 王履程¹

摘要 自对偶形态学算子不依赖形态学腐蚀、膨胀算子的先后次序, 是一种等同处理图像背景和前景的形态学算子. 而将自对偶形态学算子拓展到多通道图像处理是一个难题. 为了解决该问题, 提出了基于极值约束的矢量自对偶形态学滤波算子 (EC-VSDMF). 首先根据对称矢量排序算法构建满足对偶性的矢量形态学算子, 然后依据形态学算子中的极值原理优化矢量集合, 从而有效抑制矢量集合中包含单通道极值的矢量作为输出结果, 最终实现了具有约束功能的矢量自对偶形态学滤波算子 (VSDMF). 实验结果表明, EC-VSDMF 继承了传统自对偶形态学滤波算子的性质, 将其应用于彩色图像滤波可以改善现有矢量形态学滤波算子导致滤波后图像亮度和色度发生偏移的问题. 滤波后的图像在有效抑制噪声的同时较好地保留了图像细节, 滤波性能甚至超过了多种现有的矢量中值滤波算子.

关键词 数学形态学, 彩色图像滤波, 矢量排序, 自对偶形态学算子

引用格式 雷涛, 樊养余, 罗维薇, 王履程. 矢量自对偶形态学滤波算子. 自动化学报, 2015, 41(5): 1013–1023

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140116

Vector Self-dual Morphological Filtering Operators

LEI Tao^{1,2} FAN Yang-Yu² LUO Wei-Wei¹ WANG Lv-Cheng¹

Abstract Self-dual morphological filtering operators do not rely on the order of the sequence of erosion or dilation. They treat the foreground and background of an image identically. However, it is difficult to apply self-dual morphological operators to multi-channel images. To overcome the problem, vector self-dual morphological filtering operators based on extremum constraint (EC-VSDMF) is proposed in this paper. Firstly, a symmetric vector ordering is introduced to construct vector morphological operators with duality. Besides, vector sets are optical according to the extremum principle of morphological theory. And thus vectors including opposite extrema in single channels are suppressed. Finally, EC-VSDMF is constructed and applied to color image filtering. Experimental results show that the proposed EC-VSDMF inherits the properties of classic self-dual morphological operators. The problem that the brightness, saturation and hue of the filtered image turn to larger or smaller compared to the original image is also addressed. Moreover, EC-VSDMF can suppress noises efficiently while maintaining the image detail, even it can provide better results compared with the various vector median filtering operators.

Key words Mathematical morphology, color image filtering, vector ordering, self-dual morphological operators

Citation Lei Tao, Fan Yang-Yu, Luo Wei-Wei, Wang Lv-Cheng. Vector self-dual morphological filtering operators. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(5): 1013–1023

将数学形态学理论拓展到多通道图像处理是当前研究的一个热点. 而决定矢量形态学算子的两个重要因素是彩色空间的选择和矢量排序算法^[1-2]. 到目前为止, 在不同的彩色空间下, 学者们已经提

出了大量的矢量排序算法^[3-7]. 早期的矢量排序算法由词典编纂顺序构成, 将多个彩色分量作为词典编纂顺序的边缘分量, 然后根据不同彩色分量的作用将其划分为不同等级, 具有代表性的方法是 Tsalides 等和 Louverdis 等在 HSV 彩色空间下提出的两层 VS (Value-saturation) 和三层 VSH (Value-saturation-hue) 词典编纂顺序^[8-9]. 另一类重要的矢量排序算法是基于矢量距离降维理论, De Witte 等在 RGB 彩色空间中, 利用欧氏距离定义了矢量形态学腐蚀、膨胀算子以及形态学组合算子^[10]. Angulo 在 HSL 彩色空间中, 提出了基于欧氏和马氏距离的矢量排序规则 (Distance-luminance-saturation-hue, DLSH), 并定义了新的彩色形态学算子, 将其应用于彩色图像滤波、增强和分析, 并取得了较好的效果^[11]. 根据矢量数据的高维特性, 利用模糊方法实现矢量排序符合高维数据的结构特征,

收稿日期 2014-03-03 录用日期 2014-11-21
Manuscript received March 3, 2014; accepted November 21, 2014

国家自然科学基金 (61202314, 61461025), 中国博士后科学基金 (2014T70937, 2012M521801) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61202314, 61461025) and Postdoctoral Science Foundation of China (2014T70937, 2012M521801)

本文责任编辑 黄庆明

Recommended by Associate Editor HUANG Qing-Ming

1. 兰州交通大学电子与信息工程学院 兰州 730070 2. 西北工业大学电子信息学院 西安 710072

1. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070 2. School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

Aptoula 等基于该思想提出了基于 α 修剪的词典编纂顺序 α -TLO (α -Trimmed lexicographical ordering), 该顺序利用参数 α 与矢量值相乘, 然后取整的方法放宽词典编纂顺序的各层分量, 实现了对矢量集合的模糊排序, 一定程度上提高了形态学算子对彩色图像的处理效果^[12-13]. 近年来, 为了提高矢量形态学算子在彩色图像滤波、增强和分割中的性能, Lei 等提出了基于 HSV 混合距离的矢量形态学算子 HD (Hybrid distance in HSV color space), 该算子计算简单, 在彩色图像去噪中取得了更好的滤波效果^[14]. 此外, 将超复数应用于彩色图像表达, Angulo 提出了基于超复数表达的矢量形态学算子, 并给出了几种基于超复数分解的词典编纂顺序, 其中基于垂直分量、水平分量、R、G、B 的五层词典编纂顺序 (Lexicographical ordering based on quaternion decomposition, LOQD) 具有较好的矢量排序效果^[15-16]. Lei 等在此基础上提出了模糊极值估计算法 (Fuzzy extremum estimation algorithm, FEEA), 并据此定义了新的模糊矢量形态学算子, 该算子在彩色图像滤波、分割中达到了实用性, 滤波结果接近矢量中值滤波器 (Vector median filter, VMF)^[17].

近年来, 随着学者们对机器学习理论研究的不断深入, 将机器学习应用到矢量数学形态学理论成为热点研究问题. Lezoray 等用字典学习和流行学习定义了无监督的矢量排序算法, 提出了非局部矢量数学形态学算子^[18]. Velasco-Forero 等研究了基于随机投影深度的矢量数学形态学, 提出了中心向外的 P 类剥皮矢量排序算法 (P-ordering), 从而利用深度函数解决了形态学理论难以拓展到多通道图像中的难题^[19]. 更多关于机器学习在矢量形态学理论中的应用可参见文献 [20-21].

尽管大量的矢量形态学算子已被提出, 但验证所有这些算子在保留经典形态学算子性质方面的工作却鲜有报道, 一个主要原因是现有的矢量形态学算子难以满足对偶性. 由于大多数形态学算子都是发生在一对对偶算子中间的, 例如腐蚀、膨胀、开和闭, 因此对偶性是矢量形态学算法的理论基础. 传统的形态学滤波算子在处理灰度图像时都会存在图像亮度发生偏移的问题, 滤波结果依赖于形态学算子以腐蚀还是以膨胀起始, 例如: 以腐蚀起始的形态学滤波算子导致最终滤波后的图像整体变暗, 而以膨胀起始的形态学滤波算子导致滤波后的图像变亮. 为了等同处理图像的背景和前景, Heijmans 最早提出了自对偶形态学滤波算子, 该滤波算子依赖于中值算子原理, 具有严格的对称性, 能等同处理图像中的亮和暗结构, 从而等同处理图像的前景和背景, 以较好地保持图像的细节信息^[22]. 在此基础上, Ray

等提出了一类自对偶连通形态学算子, 并将其应用于图像分割、图像检索以及视频序列中的目标检测及跟踪, 均取得了较好的效果^[23]. 此外, Bouaynaya 等提出了空间变量形态学理论框架下的自对偶形态学算子, 并将其应用于雷达图像中的斑点噪声移除^[24]. 自对偶形态学算子具有重要应用^[25], 然而已有的自对偶形态学滤波器仅适用于处理二值和灰度图像, 难以应用到多通道图像处理中^[26].

为了解决该问题, 本文首先分析了导致矢量形态学算子难以满足对偶性的原因, 发现矢量排序算法是影响矢量对偶性的重要因素, 因此在 RGB 彩色空间下提出了满足对偶性的矢量形态学算子, 并基于矢量对偶形态学算子定义了矢量自对偶形态学算子. 然而, 现有的矢量形态学滤波算子的性能远低于 VMF, 为了改善矢量自对偶形态学算子在彩色图像滤波中的性能, 提出了基于极值约束的矢量自对偶形态学滤波算子. 实验结果表明, 本文提出的矢量自对偶形态学滤波算子能有效抑制彩色图像中的噪声, 滤波效果明显优于传统的矢量形态学滤波算子.

1 相关概念

常用的形态学开闭、闭开算子使得处理后的图像变亮或变暗, 为了保证处理后的图像亮度不发生偏移, 研究者们提出了自对偶形态学算子. 而如何将自对偶形态学算子拓展到彩色图像处理中是我们要解决的问题, 首先给出一些相关的定义.

定义 1. 对任一图像 f , 如果变换 ψ 作用于图像 f 等价于变换 Φ 作用于 f 的补图像 f^c 并对结果取补, 则 ψ 和 Φ 是一对对偶算子.

$$\psi(f) = (\Phi(f^c))^c \Leftrightarrow (\psi, \Phi)$$

是一对对偶算子.

定义 2. 对任一图像 f , 如果变换 ψ 作用于图像 f 等价于 ψ 作用于补图像 f^c 并对结果取补, 则 ψ 是一自对偶变换.

$$\psi(f) = (\psi(f^c))^c \Leftrightarrow \psi$$

定义 3. $\{\psi\varepsilon, \psi^*\delta\}$ 为一对偶变换, ε 为形态学腐蚀, δ 为形态学膨胀, ψ 为一递增变换, ψ^* 为 ψ 的对偶变换, 其中间值 ω (形态学自对偶变换) 的定义为

$$\omega = (id \vee \psi\varepsilon) \wedge \psi^*\delta \quad \text{or} \quad \omega = (id \wedge \psi^*\delta) \vee \psi\varepsilon$$

其中, \vee 表示上确界, 即逐点极大值运算; \wedge 表示下确界, 即逐点极小值运算, 根据定义 2, 可以证明 ω 为形态学自对偶变换.

证明.

$$\omega(f^c) = (id(f^c) \vee \psi\varepsilon(f^c)) \wedge \psi^*\delta(f^c) =$$

$$\begin{aligned} & (id(f) \wedge \psi^* \delta(f))^c \wedge \psi^* \delta(f^c) = \\ & ((id(f) \wedge \psi^* \delta(f))^c \wedge (\psi \varepsilon(f))^c) = \\ & ((id(f) \wedge \psi^* \delta(f)) \vee (\psi \varepsilon(f)))^c = (\omega(f))^c \end{aligned}$$

□

2 矢量对偶形态学算子

在研究矢量对偶形态学算子之前, 我们首先看一组实验结果 ($\vec{\varepsilon}$ 、 $\vec{\delta}$ 分别表示矢量腐蚀和矢量膨胀; $\vec{\gamma} = \vec{\delta}\vec{\varepsilon}$ 、 $\vec{\phi} = \vec{\varepsilon}\vec{\delta}$ 分别表示矢量开运算和矢量闭运算, 结构元素采用尺寸为 3×3 的方形结构), 如图 1 所示.

传统的形态学对偶算子 (例如: γ 和 ϕ) 具有近似的滤波性能, 滤波后的图像具有近似的峰值信噪比, 根据这一结论可知, 矢量对偶形态学算子 (例如:

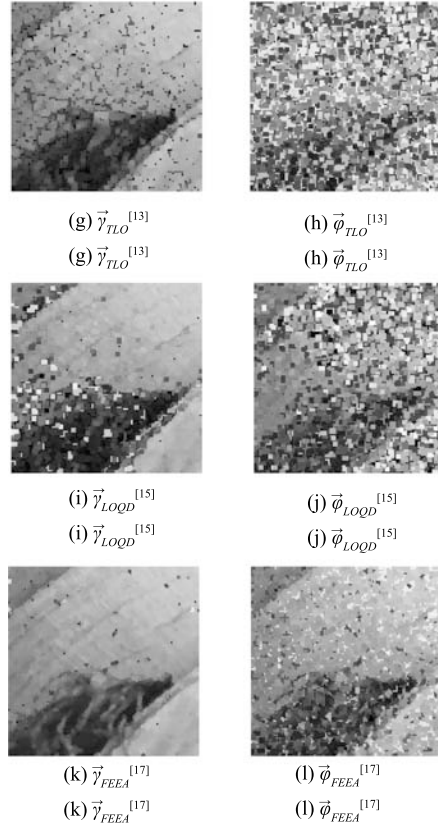
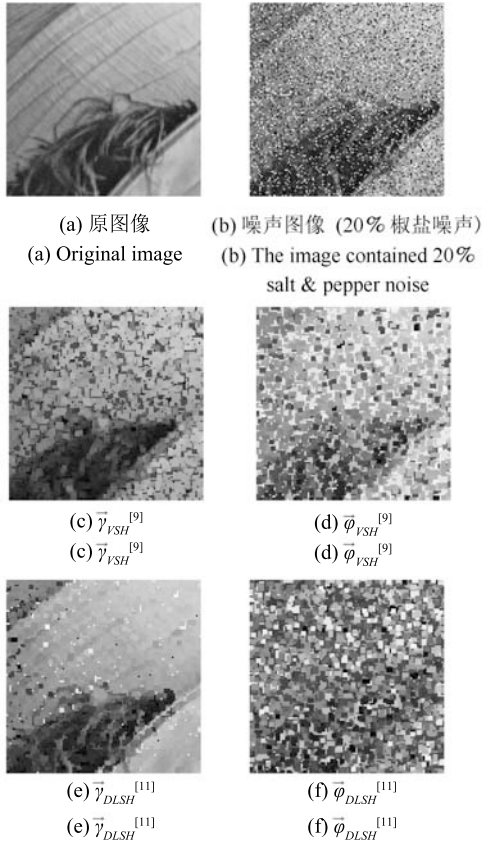


图 1 基于不同矢量形态学开、闭滤波算子的彩色图像滤波结果

Fig. 1 The filtering results using different vector morphological opening and closing operation

$\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\phi}$) 也应该具有近似的滤波性能. 然而, 由图 1 可以看出, 以 $\vec{\varepsilon}$ 起始的 $\vec{\gamma}$ 能有效抑制彩色图像中的噪声, 具有较好的滤波效果, 而以 $\vec{\delta}$ 起始的 $\vec{\phi}$ 不仅难以有效抑制噪声, 而且放大了图像中的噪声. 显然, $\vec{\gamma}$ 和 $\vec{\phi}$ 对彩色图像的滤波效果相差甚大, 这一结果与经典的对偶形态学算子具有近似滤波性能的结论不一致, 由于决定形态学算子性质的主要因素是矢量排序算法, 为了构建满足对偶性的矢量形态学算子, 给出了一种新的矢量排序算法.

定义 \mathbf{v} 为矢量集合, $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $1 \leq i, j \leq n$, $\mathbf{v}_i = \{\mathbf{v}_{ir}, \mathbf{v}_{ig}, \dots, \mathbf{v}_{ib}\}$, 从而可以定义对

$$\mathbf{v}_i \leq_{BED} \mathbf{v}_j \Leftrightarrow \begin{cases} d_{BED}(\mathbf{v}_i, \mathbf{k}) < d_{BED}(\mathbf{v}_j, \mathbf{k}) \text{ or} \\ d_{BED}(\mathbf{v}_i, \mathbf{k}) = d_{BED}(\mathbf{v}_j, \mathbf{k}) \text{ and } d_{WED}(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}) > d_{WED}(\mathbf{v}_j, \mathbf{w}) \text{ or} \\ d_{BED}(\mathbf{v}_i, \mathbf{k}) = d_{BED}(\mathbf{v}_j, \mathbf{k}) \text{ and } d_{WED}(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}) = d_{WED}(\mathbf{v}_j, \mathbf{w}) \text{ and} \\ \begin{cases} g_i < g_j \text{ or} \\ g_i = g_j \text{ and } r_i < r_j \text{ or} \\ g_i = g_j \text{ and } r_i = r_j \text{ and } b_i \leq b_j \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

$$v_i \leq_{WED} v_j \Leftrightarrow \begin{cases} d_{WED}(v_i, w) > d_{WED}(v_j, w) \text{ or} \\ d_{WED}(v_i, w) = d_{WED}(v_j, w) \text{ and } d_{BED}(v_i, k) < d_{BED}(v_j, k) \text{ or} \\ d_{WED}(v_i, w) = d_{WED}(v_j, w) \text{ and } d_{BED}(v_i, k) = d_{BED}(v_j, k) \text{ and} \\ \begin{cases} g_i < g_j \text{ or} \\ g_i = g_j \text{ and } r_i < r_j \text{ or} \\ g_i = g_j \text{ and } r_i = r_j \text{ and } b_i \leq b_j \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$d_{BED}(v_i, k) = \sqrt{(v_{ir} - k_r)^2 + (v_{ig} - k_g)^2 + (v_{ib} - k_b)^2} \quad (3)$$

$$d_{WED}(v_i, w) = \sqrt{(w_r - v_{ir})^2 + (w_g - v_{ig})^2 + (w_b - v_{ib})^2} \quad (4)$$

称矢量顺序 SVO (\leq_{BED} , \leq_{WED}) 为式 (1)~(4).

式 (1)~(4) 中, r, g, b 分别表示彩色图像的红、绿色和蓝色分量, $k = (k_r, k_g, k_b) = (0, 0, 0)$, $w = (w_r, w_g, w_b) = (255, 255, 255)$. d_{BED} 表示以黑色点为参考的欧氏距离; d_{WED} 表示以白色点为参考的欧氏距离.

根据式 (1)~(4), 得到基于 SVO 的矢量上确界、下确界定义为

$$\begin{cases} \wedge_{SVO}(v) = \{v_i \in v | v_i \leq_{BED} v_j, \forall v_j \in v\} \\ \vee_{SVO}(v) = \{v_i \in v | v_j \leq_{WED} v_i, \forall v_j \in v\} \end{cases} \quad (5)$$

\wedge_{SVO} 表示基于 d_{BED} 的矢量下确界, \vee_{SVO} 表示基于 d_{WED} 的矢量上确界. 根据式 (1)~(5), 可以定义 RGB 彩色空间下基于 SVO 的矢量腐蚀 $\vec{\varepsilon}_{SVO}$ 和矢量膨胀 $\vec{\delta}_{SVO}$ 为

$$\vec{\varepsilon}_{SVO}(f)(x) = \{f(y) : f(y) = \wedge_{SVO}[f(t)], t \in B_x\} \quad (6)$$

$$\vec{\delta}_{SVO}(f)(x) = \{f(y) : f(y) = \vee_{SVO}[f(t)], t \in B_x\} \quad (7)$$

其中, f 为输入的彩色图像, B 表示结构元素. 根据形态学算子的对偶性, 可以证明 $(\vec{\varepsilon}_{SVO}, \vec{\delta}_{SVO})$ 是一对形态学对偶算子.

证明. 根据式 (1)~(7), 可得:

$$\begin{aligned} (\vec{\delta}_{SVO}(f^c))^c &= (\vee_{SVO}(f^c))^c = \\ &255 - \{v_i^c \in f^c | v_i^c \leq_{WED} v_j^c, \forall v_j^c \in f^c\} = \\ &255 - (v_i^c) = v_i \\ \vec{\varepsilon}_{SVO}(f) &= \wedge_{SVO}(f) = \\ &\{v_i \in f | v_i \leq_{BED} v_j, \forall v_j \in f\} = v_i \end{aligned}$$

显然存在

$$(\vec{\delta}_{SVO}(f^c))^c = \vec{\varepsilon}_{SVO}(f) \quad \square$$

由此得证 $(\vec{\varepsilon}_{SVO}, \vec{\delta}_{SVO})$ 是一对形态学对偶算子. 根据形态学算子的组合特性, 给出矢量形态学开、闭运算的定义如下:

$$\vec{\gamma}_{SVO}(f) = \vec{\delta}_{SVO}[\vec{\varepsilon}_{SVO}(f)] \quad (8)$$

$$\vec{\phi}_{SVO}(f) = \vec{\varepsilon}_{SVO}[\vec{\delta}_{SVO}(f)] \quad (9)$$

3 矢量自对偶形态学算子

3.1 基于 SVO 的矢量自对偶形态学算子 (VS-DMF)

在第 2 节中, 我们得到了满足对偶性的矢量形态学算子, 结合定义 3, 将自对偶形态学算子拓展到彩色图像处理中, 给出矢量形态学中值算子的定义:

定义 4. 若 $(\vec{\psi}_{SVO}\vec{\varepsilon}_{SVO}, \vec{\psi}_{SVO}^*\vec{\delta}_{SVO})$ 为一对对偶变换, $\vec{\varepsilon}_{SVO}$ 为矢量形态学腐蚀, $\vec{\delta}_{SVO}$ 为矢量形态学膨胀, $\vec{\psi}_{SVO}$ 为一递增变换, $\vec{\psi}_{SVO}^*$ 为 $\vec{\psi}_{SVO}$ 的矢量对偶变换, 其中间值 $\vec{\omega}$ 的定义为

$$\vec{\omega} = (id \vee_{SVO} \vec{\psi}_{SVO} \vec{\varepsilon}_{SVO}) \wedge_{SVO} \vec{\psi}_{SVO}^* \vec{\delta}_{SVO} \quad (10)$$

或

$$\vec{\omega} = (id \wedge_{SVO} \vec{\psi}_{SVO}^* \vec{\delta}_{SVO}) \vee_{SVO} \vec{\psi}_{SVO} \vec{\varepsilon}_{SVO} \quad (11)$$

然而, 我们已知经典的自对偶形态学算子在图像复原中并不具有实用性, 滤波效果较具有实用价值的中值滤波方法明显要差. 因此, 在实际应用中, 我们常常给出改进的自对偶形态学滤波算子^[27].

3.2 基于 SVO 的柔性矢量形态学算子

自对偶形态学滤波算子的性能由两个因素决定: 一个是形态学对偶滤波算子的性能, 另一个是中值算子的选值空间. 通过提高形态学对偶算子的滤波

性能并增大形态学中值算子的选值空间, 均可提升自对偶形态学滤波算子的性能. 根据这一思路, 我们可以改善矢量自对偶形态学滤波算子的性能. 然而, 由于增大选值空间会导致自对偶形态学算子的计算复杂度较高, 导致算子的执行效率较低. 因此, 本文主要通过改善矢量对偶形态学算子的性能来提高矢量自对偶形态学滤波算子的性能.

在经典的形态学理论中, 由于柔性形态学算子具有较好的抗噪声性能, 因此基于柔性形态学对偶算子构造的自对偶形态学算子将具有更好的性能, 下面给出柔性形态学算子的基本定义.

1) 柔性形态学腐蚀运算:

$$f \ominus (B, A, r)(x) =$$

The r th smallest value of

$$\{r \diamond f(a) : a \in A_x\} \cup \{f(b) : b \in (B \setminus A)_x\} \quad (12)$$

2) 柔性形态学膨胀运算:

$$f \oplus (B, A, r)(x) =$$

The r th largest value of

$$\{r \diamond f(a) : a \in A_x\} \cup \{f(b) : b \in (B \setminus A_x)\} \quad (13)$$

其中, f 为待处理图像, B 表示结构元素, A 表示结构元素的内核, r 表示等级参数或中心结构的重复次数, $B \setminus A$ 表示柔性轮廓. $r \diamond x = \underbrace{x, \dots, x}_r$ 表示

重复运算. r 的取值直接影响到柔性形态学腐蚀和膨胀的输出结果. 当 $r = 1$ 或者 $A = B$ 时, 柔性形态学变换就退化为传统的形态学变换.

根据式 (12) 和式 (13), 结合满足对偶性的矢量形态学算子 (式 (6) 和式 (7)), 给出柔性矢量形态学腐蚀、膨胀运算的定义:

$$\bar{\varepsilon}_{SVO}^{soft}(\mathbf{f}, B, A, r)(\mathbf{x}) =$$

The r th smallest vector value of

$$\{r \diamond \mathbf{f}(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A_x\} \cup \{\mathbf{f}(\mathbf{b}) : \mathbf{b} \in (B \setminus A_x)\} \quad (14)$$

$$\bar{\delta}_{SVO}^{soft}(\mathbf{f}, B, A, r)(\mathbf{x}) =$$

The r th largest vector value of

$$\{r \diamond \mathbf{f}(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A_x\} \cup \{\mathbf{f}(\mathbf{b}) : \mathbf{b} \in (B \setminus A_x)\} \quad (15)$$

与经典的形态学算子相比, 柔性形态学算子在抗噪声方面具有明显的优势, 然而, 当噪声密度较高时, 柔性形态学算子难以得到有效的滤波结果.

3.3 基于极值约束的 VSDMF (EC-VSDMF)

已知矢量中值滤波是当前彩色图像滤波的主要方法, 其性能明显优于现有的矢量形态学滤波方法. 该方法通过计算窗口中与其他像素具有最小距离和的像素代替中心像素的方法实现对彩色图像的滤波^[28]. 改进矢量中值滤波方法一直以来都是学者们关注的热点问题^[29-34], 尤其是矢量开关滤波的研究得到了快速发展, 通过判断当前像素是否属于噪声而进行开关滤波, 在有效抑制噪声的同时较好地保留了图像细节信息. 如何将矢量开关滤波方法的优势拓展到矢量自对偶形态学算子中, 以构造高性能矢量自对偶形态学滤波算子是我们解决的问题.

为了提高矢量自对偶形态学算子的滤波性能, 我们对自对偶形态学算子增加了是否为噪声的判断步骤, 通过约束柔性矢量形态学算子的输出结果, 从而避免将噪声像素作为输出结果以改善滤波效果, 图 2 给出了极值约束的原理.

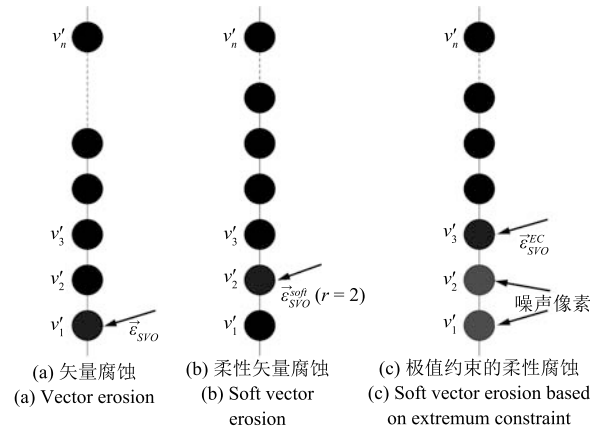


图 2 各种矢量形态学腐蚀运算的取值原理

Fig. 2 The principle of different vector morphological erosion operations

由图 2 可以看出, 通过对输出结果的判断可以有效避免对噪声像素的选择, 从而改善矢量形态学算子的输出结果. 以柔性矢量腐蚀运算为例, 判断矢量集合经升序排序后第 r (若矢量集合包含 N 个矢量, 则 $1 \leq r \leq \text{floor}(N/2)$) 个矢量中是否包含单通道极大值, 如果是, 则 $r = r + 1$; 如果 $r + 1 > \text{floor}(N/2)$, 则取 $r = \text{floor}(N/2)$, 基于该原理, 给出基于极值约束的矢量上确界、下确界计算规则:

$$\wedge_{SVO}^{EC}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v} | \mathbf{v}_i \leq_{SVO} \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \notin \mathbf{v}^{EC}, \mathbf{v}_j \notin \mathbf{v}^{EC}, \forall \mathbf{v}_j \in \mathbf{v}\}, & \mathbf{v}^{EC} \neq \phi \\ \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v} | \mathbf{v}_i \leq_{SVO} \mathbf{v}_j, \forall \mathbf{v}_j \in \mathbf{v}\}, & \mathbf{v}^{EC} = \phi \end{cases} \quad (16)$$

$$\vee_{SVO}^{EC}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v} | \mathbf{v}_j \leq_{SVO} \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \notin \mathbf{v}^{EC}, \mathbf{v}_j \notin \mathbf{v}^{EC}, \forall \mathbf{v}_j \in \mathbf{v}\}, & \mathbf{v}^{EC} \neq \phi \\ \{\mathbf{v}_i \in \mathbf{v} | \mathbf{v}_j \leq_{SVO} \mathbf{v}_i, \forall \mathbf{v}_j \in \mathbf{v}\}, & \mathbf{v}^{EC} = \phi \end{cases} \quad (17)$$

其中, \wedge_{SVO}^{EC} 和 \vee_{SVO}^{EC} 分别表示矢量上确界和矢量下确界.

$$\mathbf{v}^{EC} = \left\{ \mathbf{v}_i | \max \{v_j^h\}_{1 \leq j \leq n, 1 \leq h \leq p} \notin \mathbf{v}_i, \forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{v} \right\}$$

根据式 (6)、式 (7) 和式 (16)、式 (17), 给出基于极值约束的矢量形态学算子的定义如下:

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{EC}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \\ \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \wedge_{SVO}^{EC} \{ \mathbf{f}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in B_{\mathbf{x}} \} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{SVO}^{EC}(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \\ \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{y}) : \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \vee_{SVO}^{EC} \{ \mathbf{f}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in B_{\mathbf{x}} \} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

由于 $\vec{\varepsilon}_{SVO}^{EC}$ 和 $\vec{\delta}_{SVO}^{EC}$ 通过优化矢量集合可以有效抑制噪声像素的输出, 因此, 基于 $\vec{\varepsilon}_{SVO}^{EC}$ 和 $\vec{\delta}_{SVO}^{EC}$ 构建的矢量形态学滤波算子将具有更强的噪声抑制性能, 结合式 (10) 和式 (11), 给出 EC-VSDMF 的表达式如下:

$$\vec{\omega}_{SVO}^{EC} = (id \vee_{SVO} \psi_{SVO} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{EC}) \wedge_{SVO} \psi_{SVO}^* \vec{\delta}_{SVO}^{EC} \quad (20)$$

$$\vec{\omega}_{SVO}^{EC} = (id \wedge_{SVO} \psi_{SVO}^* \vec{\delta}_{SVO}^{EC}) \vee_{SVO} \psi_{SVO} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{EC} \quad (21)$$

其中, $\psi_{SVO} = \vec{\delta}_{SVO}^{soft} \cdots \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft} \vec{\delta}_{SVO}^{soft}$, $\psi_{SVO}^* = \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft} \cdots \vec{\delta}_{SVO}^{soft} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft}$.

4 实验结果及分析

4.1 EC-VSDMF 的性能分析

为了验证本文提出的矢量自对偶形态学算子 $\vec{\omega}$ 的性能, 仿真实验选用了标准测试图像 Zebra, 如图 3(a) 所示, 图 3(b)~3(j) 给出了利用矢量对偶形态学算子以及 $\vec{\omega}$ 对图像 Zebra 的处理结果对比 (结构元素选用 3×3 的正方形结构). 为了表明经过处理后的彩色图像能保持原图像的亮度不发生偏移, 图 4 给出了图 3 在 HSV 彩色空间下的各分量直方图对比.



图 3 矢量对偶及自对偶形态学算子的彩色图像处理结果
Fig. 3 The filtering results of color image based on different morphology dual or self-dual filter operators

由图 3 可以看出, 本文提出的矢量腐蚀、膨胀运算满足经典的形态学算子的性质, 腐蚀后的图像整体变暗, 而膨胀后的图像整体变亮 (见图 3(b) 和

图 3 (c). 经过矢量腐蚀处理后的彩色图像整体向黑色点靠拢, 而经过矢量膨胀处理后的彩色图像整体向白色点靠拢, 由此可见本文给出的矢量腐蚀、膨胀运算与经典的形态学腐蚀、膨胀算子保持一致. 图 3 (b)、3 (e)、3 (h) 表明, 以腐蚀起始的矢量形态学算子会导致滤波后的图像整体变暗; 同理, 以膨胀起始的矢量形态学算子会导致滤波后的图像整体变亮, 如图 3 (c)、3 (f)、3 (i) 所示. 矢量自对偶形态学算子 $\vec{\omega}$ 解决了这一问题, 经过 $\vec{\omega}$ 处理后的图像亮度没有发生偏移, 如图 3 (d)、3 (g)、3 (j) 所示. 为了进一步表明矢量自对偶形态学算子对原图像亮度和色度的保持作用, 图 4 给出了图 3 在 HSV 彩色空间下各分量的直方图. 从图 4 可以看出, 经过形态学对偶运算 (腐蚀、膨胀、开、闭、开闭、闭开) 后的图像亮度、

饱和度、色调明显发生偏移, 且随着滤波器迭代次数的增加, 图像偏移程度逐渐降低 (矢量开闭运算后的灰度值偏移程度要明显低于矢量腐蚀运算). 而经过自对偶运算后的图像亮度、饱和度、色调与原图像基本一致. 显然, 矢量自对偶运算解决了传统矢量形态学算子会导致处理后的图像亮度、饱和度、色调发生偏移的问题.

4.2 VSDMO-EC 的性能分析

为了验证 $\vec{\omega}_{SVO}^{EC}$ 的性能, 仿真实验选用了椒盐噪声模型, 对标准测试图像 Zebra 加入 10% 的椒盐噪声, 如图 5 (a) 所示. 图 5 (b)~5 (j) 给出了利用多种矢量对偶形态学算子以及矢量自对偶形态学滤波算子对图 5 (a) 的处理结果对比. 图 6 是对图 5 的

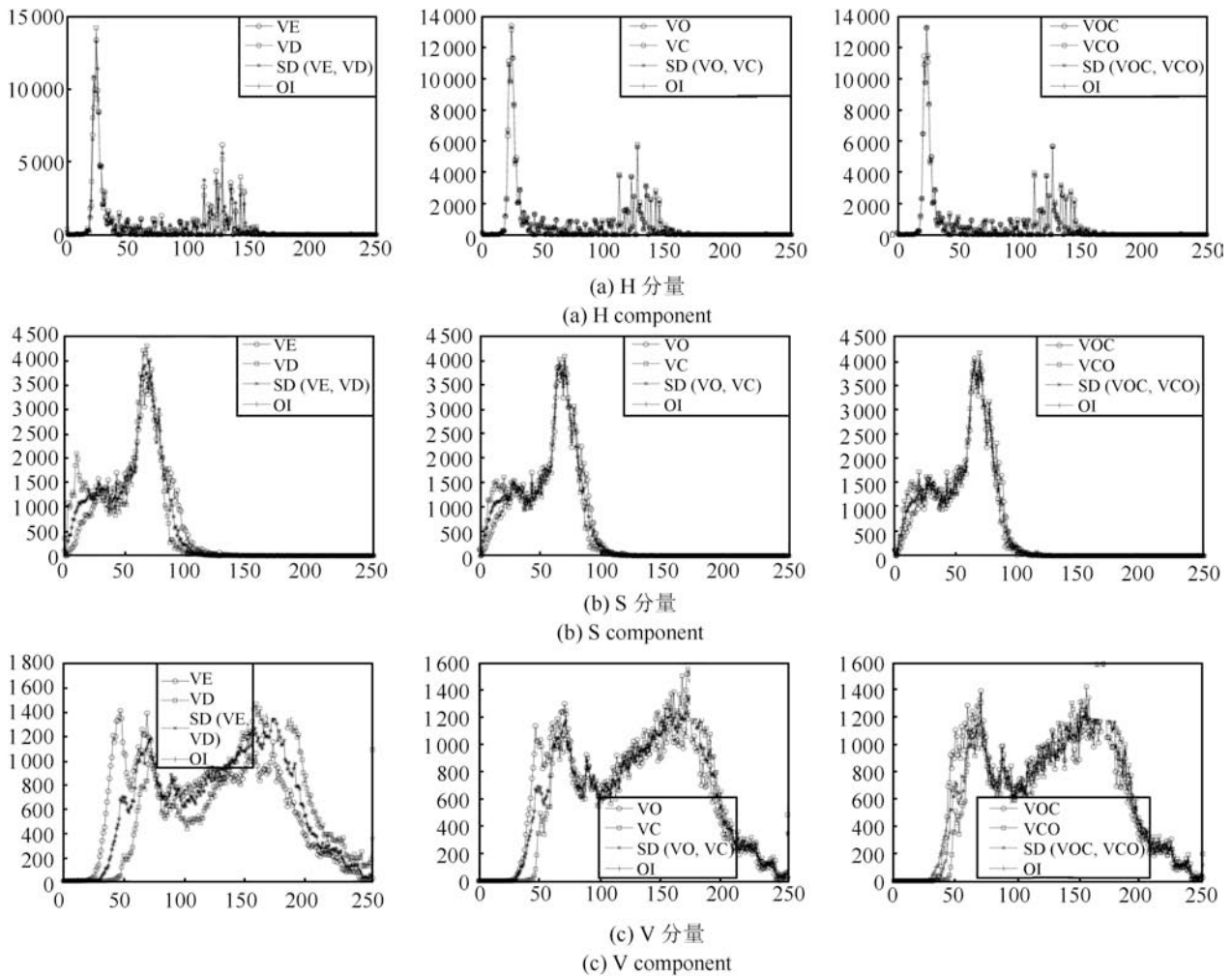


图 4 图 3 在 HSV 彩色空间下的各分量直方图 (VE、VD 分别表示 $\vec{\epsilon}_{SVO}$ 和 $\vec{\delta}_{SVO}$; VO、VC 分别表示 $\vec{\gamma}_{SVO}$ 和 $\vec{\phi}_{SVO}$; VOC、VCO 分别表示 $\vec{\phi}_{SVO}\vec{\gamma}_{SVO}$ 和 $\vec{\gamma}_{SVO}\vec{\phi}_{SVO}$; SD (VE, VD) 表示 $\vec{\omega}(\vec{\epsilon}_{SVO}, \vec{\delta}_{SVO})$; SD (VO, VC) 表示 $\vec{\omega}(\vec{\gamma}_{SVO}, \vec{\phi}_{SVO})$; SD (VOC, VCO) 表示 $\vec{\omega}(\vec{\phi}_{SD}\vec{\gamma}_{SD}, \vec{\gamma}_{SD}\vec{\phi}_{SD})$)

Fig. 4 The histogram of components of Fig. 3 in HSV color space (VE, VD denotes $\vec{\epsilon}_{SVO}$ and $\vec{\delta}_{SVO}$ respectively; VO, VC denotes $\vec{\gamma}_{SVO}$ and $\vec{\phi}_{SVO}$ respectively; VOC, VCO denotes $\vec{\phi}_{SVO}\vec{\gamma}_{SVO}$ and $\vec{\gamma}_{SVO}\vec{\phi}_{SVO}$ respectively; SD(VE, VD) denotes $\vec{\omega}(\vec{\epsilon}_{SVO}, \vec{\delta}_{SVO})$; SD(VO, VC) denotes $\vec{\omega}(\vec{\gamma}_{SVO}, \vec{\phi}_{SVO})$; SD(VOC, VCO) denotes $\vec{\omega}(\vec{\phi}_{SD}\vec{\gamma}_{SD}, \vec{\gamma}_{SD}\vec{\phi}_{SD})$.)

局部细节放大结果 (结构元素为 3×3 的方形结构, 柔性等级 $r = 2$, $\psi_{SVO} = \vec{\delta}_{SVO}^{soft}$, $\psi_{SVO}^* = \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft}$).

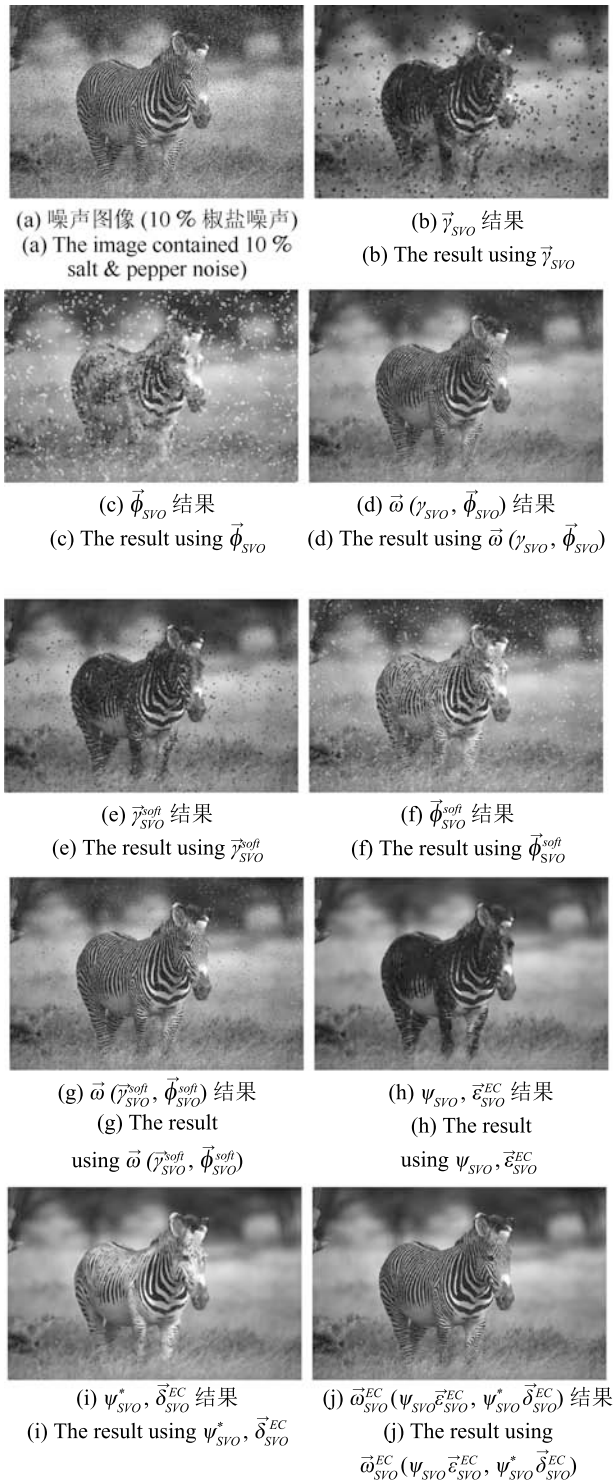


图 5 不同矢量对偶形态学算子以及矢量自对偶形态学滤波算子对图 5 (a) 的滤波结果

Fig. 5 The filtering results using different vector dual morphological operators and vector self-dual morphological filtering operators for Fig. 5 (a)

由图 5 和图 6 可以看出, 本文提出的 $\vec{\omega}_{SVO}^{EC}$ 不仅继承了传统自对偶形态学算子能保持图像亮度不发生偏移的优点, 而且保持了原图像的饱和度和色调不发生偏移, 如图 5 (d)、5 (g)、5 (j) 所示. 图 5 (e) ~ 5 (g) 表明, 矢量柔性形态学算子明显优于传统的矢量形态学算子 (见图 5 (b) ~ 5 (d)). 基于极值约束的矢量形态学算子具有较强的抗噪声性能, 如图 5 (h) ~ 5 (j) 所示. 由细节图像 (图 6) 可以看出, 本文提出的 $\vec{\omega}_{SVO}^{EC}$ 不仅能有效抑制图像中的噪声, 而且保留了图像的细节, 是一种性能较优的矢量自对偶形态学滤波算子.

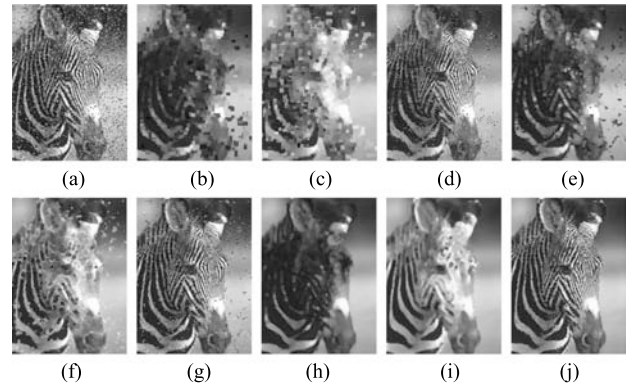


图 6 图 5 的细节图像

Fig. 6 The details of Fig. 5

4.3 VSDMO-EC 与相关方法的性能对比

为了进一步表明 $\vec{\omega}_{SVO}^{EC}$ 的优越性, 仿真实验选用了标准测试图像 Birds, 噪声选用椒盐噪声模型, 并给出了已有的 6 种主流的矢量形态学滤波算子作为对比方法 (MF-VSH^[9]、MF-DLSH^[11]、MF-TLO^[13]、MF-LOQD^[15]、MF-HD^[14] 和 MF-FEEA^[17]). 图 7 (a) 为原图, 图 7 (b) 为加入椒盐噪声的图像 (噪声强度为 25%), 应用本文方法与 6 种已有的矢量形态学滤波算子对彩色图像进行滤波, 结果如图 7 (c) ~ 7 (i) 所示 (所有滤波算子均为开闭算子, 结构元素统一选用 3×3 的方形结构, $\psi_{SVO} = \vec{\delta}_{SVO}^{soft} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft} \vec{\delta}_{SVO}^{soft}$, $\psi_{SVO}^* = \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft} \vec{\delta}_{SVO}^{soft} \vec{\varepsilon}_{SVO}^{soft}$, $r = 2$, $\alpha = 0.25$).

由图 7 可以看出, 各种矢量形态学滤波方法能不同程度地抑制图像中的噪声, 本文方法明显优于已有的矢量形态学方法. 图 7 (i) 的滤波效果明显优于图 7 (c) ~ 7 (h). 为了客观评价各种滤波方法的优劣性, 给出了三个常用的性能指标: 均方误差 (Mean squared error, MSE)、峰值信噪比 (Peak signal to noise ratio, PSNR) 和归一化色彩误差 (Normalized color difference, NCD). 设 \mathbf{f} , \mathbf{g} 分别为噪声图像和滤波后的图像, 图像尺寸为 $M \times N$, 则

$$MSE(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{3M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}(i, j) - \mathbf{g}(i, j)\|^2 \quad (22)$$

$$PSNR(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 10 \lg \frac{3 \times M \times N \times 255^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}(i, j) - \mathbf{g}(i, j)\|^2} \quad (23)$$

$$NCD(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}_{L*a*b*}(i, j) - \mathbf{g}_{L*a*b*}(i, j)\|^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\mathbf{f}_{L*a*b*}(i, j)\|^2} \quad (24)$$

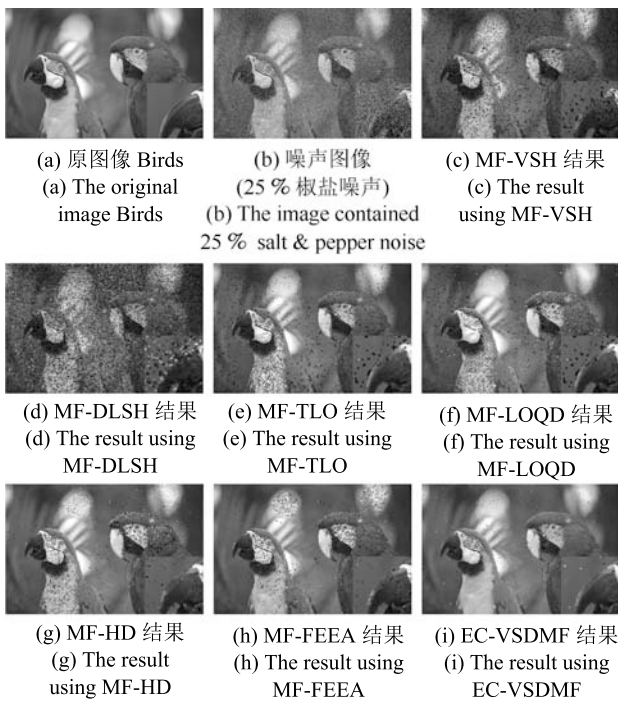


图 7 不同矢量形态学滤波方法对彩色噪声图像的滤波结果对比

Fig. 7 The filtering results using different vector morphological filtering methods

根据式 (22) ~ (24), 采用不同矢量形态学滤波算子对加入不同强度椒盐噪声的图像 Birds 进行滤波, 实验数据如图 8 所示。

从图 8 可以看出, 针对受椒盐噪声污染的图像, 利用现有的多种不同矢量滤波器抑制图像中的噪声, 结果表明, 在不同噪声等级下, 本文提出的 EC-VSDMF 具有较高的 PSNR, 且具有较低 MSE 和 NCD. 经过本文方法滤波后的图像保持了原图像

的亮度、饱和度和色调, 且有效抑制了图像中的噪声, 保留了目标细节不被平滑. 从实验数据还可以看出, 对多种不同的矢量中值滤波方法而言, 当噪声等级较低时, 各种方法的性能较为接近, 当噪声等级逐渐增大时, MF-VSH、MF-DLSH、MF-TLO、MF-QPEPA 和 MF-HD 的性能迅速降低, MF-FEEA 和本文提出的 EC-VSDMF 具有较强的抗噪

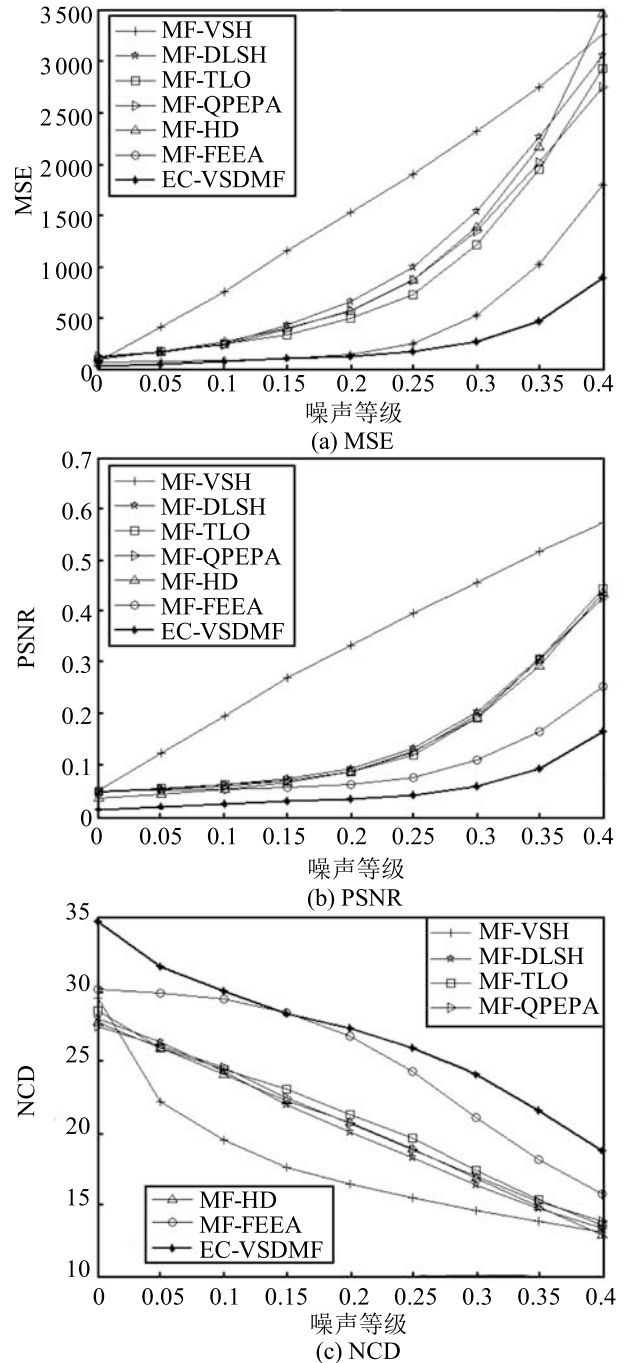


图 8 不同滤波器性能对比

Fig. 8 The performance comparison of different vector filters

声性能, 而 EC-VSDMF 显然更优于 MF-FEEA. 由此表明, 本文提出的矢量自对偶形态学滤波算子不仅解决了传统矢量形态学滤波算子对图像滤波后难以保持图像的亮度、饱和度和色调不变, 而且在抑制噪声和保留图像细节方面较已有的多种矢量中值滤波方法具有明显的优势.

5 结论

本文针对传统的形态学自对偶滤波器难以拓展到多变量图像处理中的问题, 分析了现有的矢量形态学算子难以满足对偶性的原因, 并给出了满足对偶性的矢量形态学算子, 从而为矢量自对偶形态学算子的构建奠定了基础. 然而传统的形态学自对偶算子性能较低, 本文结合脉冲噪声特性, 提出了带有极值约束性能的矢量自对偶形态学滤波算子. 该算子利用形态学算子取极值的原理, 通过抑制包含相反极值的输出结果, 从而达到优化输出结果的目的. 实验结果表明, 经过本文提出的矢量自对偶形态学滤波算子滤波后的噪声图像具有较小的 MSE、NCD 和较高的 PSNR.

References

- Najman L, Talbot H. *Mathematical Morphology*. New York: John Wiley and Sons, USA, 2013.
- Aptoula E, Lefèvre S. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition*, 2007, **40**(11): 2914–2929
- Velasco-Forero S, Angulo J. Classification of hyperspectral images by tensor modeling and additive morphological decomposition. *Pattern Recognition*, 2013, **46**(2): 566–577
- Valle M E, Vicente D M G. Sparsely connected autoassociative lattice memories with an application for the reconstruction of color images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2012, **44**(3): 195–222
- Morales S, Naranjo V, Angulo J, Raya M A. Automatic detection of optic disc based on PCA and mathematical morphology. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2013, **32**(4): 786–796
- Velasco-Forero S, Angulo J, Chanussot J. Morphological image distances for hyperspectral dimensionality exploration using Kernel-PCA and ISOMAP. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Cape Town: IEEE, 2009. III-109–III-112
- Velasco-Forero S, Angulo J. Morphological scale-space for hyperspectral images and dimensionality exploration using tensor modeling. In: Proceedings of the 1st Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing: Evolution in Remote Sensing. Grenoble: IEEE, 2009. 1–4
- Tsalides P, Vardavoulia M I, Andreadis I. Vector ordering and morphological operations for colour image processing: fundamentals and applications. *Pattern Analysis and Applications*, 2002, **5**(3): 271–287
- Louwerdis G, Vardavoulia M I, Andreadis I, Tsalides P. A new approach to morphological color image processing. *Pattern Recognition*, 2002, **35**(8): 1733–1741
- De Witte V, Schulte S, Nachtegaal M, van der Weken D, Kerre E E. Vector morphological operators for colour images. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Image Analysis and Recognition, Lecture Notes in Computer Science. Toronto, Canada: Springer, 2005, **3656**: 667–675
- Angulo J. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 2007, **107**(1–2): 56–73
- Aptoula E, Lefèvre S. On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition Letters*, 2008, **29**(2): 109–118
- Aptoula E, Lefèvre S. α -Trimmed lexicographical extrema for pseudo-morphological image analysis. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2008, **19**(3): 165–174
- Lei T, Wang Y, Fan Y Y, Zhao J. Vector morphological operators in HSV color space. *Science China Information Sciences*, 2013, **56**(1): 1–12
- Angulo J. Geometric algebra colour image representations and derived total orderings for morphological operators — Part I: colour quaternions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2010, **21**(1): 33–48
- Angulo J. Hypercomplex mathematical morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, **41**(1–2): 86–108
- Lei T, Fan Y Y, Zhang C R, Wang X P. Vector mathematical morphological operators based on fuzzy extremum estimation. In: Proceedings of the 20th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Melbourne, VIC: IEEE, 2013. 3031–3034
- Lezoray O, Elmoataz A. Nonlocal and multivariate mathematical morphology. In: Proceedings of the 19th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). Orlando, FL: IEEE, 2012. 129–132
- Velasco-Forero S, Angulo J. Random projection depth for multivariate mathematical morphology. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2012, **6**(7): 753–763
- Velasco-Forero S, Angulo J. Morphological processing of hyperspectral images using kriging-based supervised ordering. In: Proceedings of the 17th IEEE ICIP on Image Processing. Hong Kong, China: IEEE, 2010. 1409–1412
- Velasco-Forero S, Angulo J. Supervised ordering in \mathbf{R}^F : application to morphological processing of hyperspectral images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, **20**(11): 3301–3308
- Heijmans H J A M. Self-dual morphological operators and filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1996, **6**(1): 15–36
- Ray N, Acton S T. Inclusion filters: a class of self-dual connected operators. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(11): 1736–1746

- 24 Bouaynaya N, Charif-Chefchaoui M, Schonfeld D. M-Idempotent and self-dual morphological filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2012, **34**(4): 805–813
- 25 Lei T, Fan Y Y. Noise gradient reduction based on morphological dual operators. *IET Image Processing*, 2011, **5**(1): 1–17
- 26 Soille P. Beyond self-duality in morphological image analysis. *Image and Vision Computing*, 2005, **23**(2): 249–257
- 27 Lei Tao, Fan Yang-Yu, Mao Li. Generalized self-dual morphological filters and the applications in image-denoising. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2011, **21**(1): 7215–7218 (雷涛, 樊养余, 毛力. 广义自对偶形态学滤波器及其在图像去噪中的应用. *光电子·激光*, 2011, **21**(1): 7215–7218)
- 28 Astola J, Haavisto P, Neuvo Y. Vector median filters. *Proceedings of the IEEE*, 1990, **78**(4): 678–689
- 29 Lukac R. Adaptive vector median filtering. *Pattern Recognition Letters*, 2003, **24**(12): 1889–1899
- 30 Smolka B, Chydzinski A. Fast detection and impulsive noise removal in color images. *Real-Time Imaging*, 2005, **11**(5–6): 389–402
- 31 Jin L H, Li D H. A switching vector median filter based on the CIELAB color space for color image restoration. *Signal Processing*, 2007, **87**(6): 1345–1354
- 32 Celebi M E, Aslandogan Y A. Robust switching vector median filter for impulsive noise removal. *Journal of Electronic Imaging*, 2008, **17**(4): 043006 (1–9)
- 33 Camarena J G, Gregori V, Morillas S, Sapena A. Two-step fuzzy logic-based method for impulse noise detection in colour images. *Pattern Recognition Letters*, 2010, **31**(13): 1842–1849
- 34 Geng X, Hu X G, Xiao J. Quaternion switching filter for impulse noise reduction in color image. *Signal Processing*, 2012, **92**(1): 150–162



雷涛 兰州交通大学电子与信息工程学院副教授, 西北工业大学电子科学与技术博士后流动站在站博士后. 2011 年获得西北工业大学信息与通信工程专业博士学位. 主要研究方向为图像处理, 人工智能. 本文通信作者.
E-mail: leitaoly@163.com

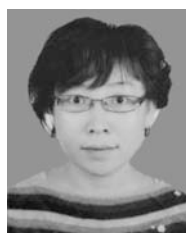
(**LEI Tao** Associate professor at the School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, and also a postdoctor at the Postdoctoral Station of Electronics Science and Technology, Northwestern Polytechnical University. He received his Ph.D.

degree in information and communication engineering from Northwestern Polytechnical University in 2011. His research interest covers image processing and artificial intelligence. Corresponding author of this paper.)



樊养余 西北工业大学电子信息学院教授. 1999 年获得西北工业大学水下声学信号处理博士学位. 主要研究方向为图像处理, 虚拟现实, 信号与信息处理, 人工智能. E-mail: fan_yangyu@sina.com (FAN Yang-Yu Professor at the School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University.

He received his Ph.D. degree in underwater acoustic signal processing from Northwestern Polytechnical University in 1999. His research interest covers image processing, virtual reality, signal and information processing, and artificial intelligence.)



罗维薇 兰州交通大学电子与信息工程学院讲师. 2005 年获得兰州交通大学通信与信息系统专业硕士学位. 主要研究方向为图像处理, 模式识别.
E-mail: luoweimei@mail.lzjtu.cn

(LUO Wei-Wei Lecturer at the School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University. She received her master degree in communication and information system from Lanzhou Jiaotong University in 2005. Her research interest covers image processing and pattern recognition.)



王履程 兰州交通大学电子与信息工程学院讲师. 2005 年获得兰州交通大学通信与信息系统专业硕士学位. 主要研究方向为信号处理, 模式识别.
E-mail: wanglc@mail.lzjtu.cn

(WANG Lv-Cheng Lecturer at the School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University. He received his master degree in communication and information system from Lanzhou Jiaotong University in 2005. His research interest covers signal processing and pattern recognition.)