

基于概率图模型的点集匹配方法研究

曲寒冰^{1,2,3} 王加强^{1,2} 李彬^{1,2} 王松涛^{1,2}

摘要 在概率图模型框架下提出了一种将回归分析和聚类分析相结合的贝叶斯点集匹配方法, 其中, 回归分析用来估计两个点集之间的映射函数, 而聚类分析用来建立两个点集中点与点之间的对应关系. 本文将点集匹配问题表示为一种多层的概率有向图, 并提出了一种由粗到精的变分逼近算法来估计点集匹配的不确定性; 此外, 还利用高斯混合模型估计映射函数回归中的异方差噪声和场景点密度估计中离群点的分布; 同时, 引入转移变量建立起模型点集与场景点集之间的关系, 并与离群点混合模型共同对场景点的分布进行估计. 实验结果表明, 该方法与其他点集匹配算法相比, 在鲁棒性和匹配精度方面均达到了较好的效果.

关键词 点集匹配, 图模型, 变分逼近, 高斯混合模型, 鲁棒估计

引用格式 曲寒冰, 王加强, 李彬, 王松涛. 基于概率图模型的点集匹配方法研究. 自动化学报, 2015, 41(4): 694–710

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140376

Probabilistic Graphical Model for Robust Point Set Matching

QU Han-Bing^{1,2,3} WANG Jia-Qiang^{1,2} LI Bin^{1,2} WANG Song-Tao^{1,2}

Abstract In this work, we propose a combinative strategy of regression and clustering for point set matching problems under Bayesian framework, with regression for estimation of transformation and clustering for establishment of correspondence. The structure of matching problem is represented by a hierarchical graph model and the matching uncertainty is approximated by a coarse-to-fine variational inference algorithm. Furthermore, Gaussian mixture models are proposed for the density estimation of heteroscedastic regression noise and spurious outliers in the scene, and the isotropic or anisotropic covariance is imposed on each individual mixture component in terms of the transformed model points. Experimental results show that the proposed approach achieves comparable performance to the state-of-the-art matching algorithms in both robustness and accuracy.

Key words Point set matching, graphical model, variational approximation, Gaussian mixture model, robust estimation

Citation Qu Han-Bing, Wang Jia-Qiang, Li Bin, Wang Song-Tao. Probabilistic graphical model for robust point set matching. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(4): 694–710

点集匹配 (Point set matching, PSM) 在形状匹配^[1–4]、图像检测^[5–6]与图像配准^[7–9]等计算机视觉领域中有广泛的应用, 对于如何能够在复杂的噪声形态和非线性形变的情况下, 高效、准确、鲁棒地对两个特征点集进行匹配, 一直以来都是一项极具挑战性的任务. 为此, 人们已经进行了大量的深

入研究^[2,10–12]. 一般来说, 可以将点集匹配问题划分为两个相互耦合的子过程: 1) 建立两个点集中点与点之间的对应关系; 2) 基于这些对应关系对映射函数进行估计.

基于不同的策略, 现有的点集匹配方法可以大致分为两类. 一类是利用某种可靠的特征提取方法, 例如 SIFT^[13]或 SURF^[14], 首先建立两个数据集之间的一对一 (One-to-one) 关系, 然后再利用这些对应点对映射函数进行逼近^[15–17]. 这类方法不存在点对之间对应关系的正确性进行迭代验证过程, 匹配的准确性完全依赖于特征提取算法. 一般来说, 在这样的点对 (Point pair) 中可能存在着大量的错配点 (Mismatch). 如何消除错配点对映射函数估计的影响是这类方法的研究重点. 最近提出的基于多幅图像和向量域的错配点消除方法均获得了比较好的匹配效果^[15,17]. 这类方法的主要优点是计算速度快, 不需要迭代过程建立点与点之间的对应关系, 而其存在的缺点主要是: 1) 要求两个点集中的特征点数目要相同; 2) 匹配结果的精度取决于 SIFT 等方

收稿日期 2014-06-03 录用日期 2014-09-27
Manuscript received June 3, 2014; accepted September 27, 2014
北京市科学技术研究院创新团队计划 (2015-20N), 北京市科学技术研究院青年骨干计划 (2014-30), 天津市科技计划 (14RCGFGX00846) 资助

Supported by Innovation Group Plan of Beijing Academy of Science and Technology (2015-20N), Youth Core Plan of Beijing Academy of Science and Technology (2014-30), and Tianjin Science and Technology Projects (14RCGFGX00846)

本文责任编辑 刘成林
Recommended by Associate Editor LIU Cheng-Lin
1. 北京市科学技术研究院模式识别重点实验室 北京 100094 2. 北京市新技术应用研究所 北京 100094 3. 河北工业大学计算机科学与软件学院 天津 300401

1. Key Laboratory of Pattern Recognition, Beijing Academy of Science and Technology, Beijing 100094 2. Beijing Institute of New Technology Applications, Beijing 100094 3. School of Computer Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401

法所提取的对应点中错配点所占的比例; 3) 不具有—般性, 在无法使用 SIFT、SURF 等方法建立对应点的情况下, 这类方法就会失去作用, 例如, 药物分子结构的匹配应用^[18-19].

另一类匹配方法则更具有—般性, 既不要求点与点之间的对应关系, 也不要求两个点集中特征点的数目相同, 同时对点与点的对应关系和两个特征点集之间的映射函数进行估计. 这类方法大致可以分为三种类型: 1) 迭代最近点 (Iterative closest point, ICP) 方法及其各种衍生算法^[12, 20]; 2) 柔性分配方法 (Soft assignment, SA)^[21-22]; 3) 概率方法 (Probabilistic methods, PM)^[23-25]. 本文提出的模型属于这一类匹配方法, 首先利用概率模型方法建立点与点之间的对应关系, 然后再利用这些对应关系对特征点集之间的映射函数进行估计, 下面首先对第二类方法所涉及的内容进行一些简要的回顾.

ICP 算法可以说是应用最广泛的点集匹配方法, 它主要是通过最小化均方差目标函数来获得刚体变换矩阵 T 以实现两个点集的匹配^[10, 12]. 虽然 ICP 算法因其执行效率和快速收敛特性获得了广泛的应用, 但是该方法对初始值比较敏感, 并且需要对点与点的选择进行严格的阈值限制, 比较容易收敛到局部最小值^[26]. 为了克服经典 ICP 算法的这些弱点, 人们提出了一系列的基于 ICP 的改进算法^[27-29] 以提高算法的匹配性能. 但是, 这些方法在实际应用中均有着明显的优缺点, 可能在一种应用中获得了良好的效果, 在另一种应用中性能会急剧退化. 因此, 研究一种通用的、稳健的 ICP 算法仍然需要进行很多的研究工作^[30].

核相关 (Kernel correlation, KC) 方法是一种典型的基于柔性分配的配准方法^[21], 它主要是通过核密度函数对两个点集进行密度估计, 然后再利用熵 (Entropy) 作为点集之间相似度的测度, 通过非线性优化的方法对两个特征点集之间的映射函数进行估计. 实际上, KC 方法主要利用高斯核函数对距离中心较远的点不敏感这一特性, 获得对离群点 (Outliers) 的鲁棒性. 但是, KC 方法未对离群点和噪声进行建模, 这使其无法在大噪声环境下获得较高的匹配精度. 另外一种柔性分配方法是鲁棒点匹配 (Robust point matching, RPM) 方法, RPM 利用薄板样条函数对点集进行建模, 然后对两个点集之间的仿射 (Affine) 和非刚体 (Non-rigid) 变换进行估计^[22]. 与 KC 方法和 ICP 方法相类似, RPM 方法没有对离群点和映射噪声提供数学模型, 因此该方法在异方差噪声和多簇离群点 (Multiple clusters of outliers) 环境下无法获得较好的匹配鲁棒性.

本文主要关注的是基于概率模型点集匹配方法, 特别是基于高斯混合模型 (Gaussian mixture models, GMM) 的点集匹配方法. 混合点匹配 (Mixture point matching, MPM) 是最早提出用高斯混合模型对两个特征点集进行匹配的概率方法, 建立了一个对噪声、离群点、映射函数和参数正则化的一般化概率模型, 然后利用期望最大化 (Expectation-maximization, EM) 迭代算法对模型中的参数进行估计^[31]. 应当指出的是, 该方法实际上属于一种简化的概率匹配方法, 为计算方便, 该方法假设所有的高斯混合分量均具有相同各向同性协方差矩阵 (Isotropic covariance), 并且只用一个均匀概率分布对离群点的分布进行估计. 连贯点漂移 (Coherent point drift, CPD) 是另一种广泛应用的基于 EM 迭代的点集匹配算法^[25]. 与 MPM 方法相同, CPD 同样假设各个混合分量具有相同的各向同性协方差矩阵. 近年来, 国内的点集匹配研究者中, 周志勇等^[9] 提出了一种含有局部空间约束的 t 分布混合模型点集匹配方法, 利用 t 分布对离群点的抗干扰性来实现两个点集匹配的鲁棒性, 克服离群点对匹配精度的影响. 但是, 该方法未对映射噪声和离群点进行建模, 其匹配精度完全依赖于 t 分布混合模型对噪声和离群点的抑制性能.

除了迭代方式以外, Jian 等以 L_2 距离作为目标函数, 利用非线性优化方法直接对两个特征点集合的高斯混合密度之间的映射参数进行估计, 也就是最小化两个特征点集合的概率分布的 KL-散度, 从而实现两个集合的匹配^[23]. Horaud 等提出了一种基于各向异性协方差矩阵的条件期望最大化点集配准方法, 但是该方法与 Jian 等^[23] 提出的方法一样, 都需要对映射函数进行非线性优化^[26]. 近年来, Ma 等提出了一种最小化两个特征点集合之间 L_2 测度的点集匹配算法, 该方法主要是迭代地使用向量场一致性 (Vector field consensus, VFC) 方法估计映射函数和利用匈牙利算法 (Hungarian method) 求解最优的点与点之间的对应关系. 该方法假设所有特征点分量具有一个共同的各向同性协方差矩阵, 利用由粗到精的模拟退火优化算法对向量场函数进行估计, 实现两个特征点集合的匹配. 该方法的主要缺点是匈牙利算法的计算量较大, 并且同样是仅利用均匀分布对离群点的分布进行估计^[24].

综上所述, 现有的点集匹配方法多使用简单的均匀分布对离散点的分布进行估计, 使得这些方法在多簇离群点的情况下难以实现两个特征点集合的稳定匹配, 而多簇离群点在实际应用中普遍存在. 此外, 上述方法通常未对映射过程中的异方差噪声进行建模, 通常隐含假设了映射噪声为高斯白噪声. 虽然, Hou 和 Galata 提出的方法中没有明确地对离群

点进行建模,但是该方法对点集中的每个点均使用了各向异性协方差高斯分布进行建模,而实验结果表明,在强噪声干扰下,额外的高斯混合分量可以显著地缓解噪声和离群点的影响^[32].因此,在点集匹配过程中应该采用更加复杂的数学模型对映射噪声和离群点的分布进行估计,以代替简单的均匀分布对离群点的分布情况进行估计.

此外,前述方法通常采用极大似然估计(Maximum-likelihood estimation, MLE)和最大后验估计(Maximum a posteriori, MAP)对模型参数和映射函数进行点估计,因此很难在一次匹配过程中获得参数的后验概率分布,而后验概率的估计对于模型以及参数的概率推理有着重要的作用.需要指出的是,与极大似然估计和最大后验估计相比,变分贝叶斯方法的计算复杂度比较大,涉及的模型参数也较多,如果先验参数设置不正确,可能导致逼近过程容易陷入局部最优.本文的研究内容主要以点集匹配的概率图模型建立为主,在模型的简化和计算的优化方面不作过多的涉及,这些方面将在下一步的工作中进行深入研究,以提升模型的实际应用能力.

1 问题描述

可以将两个点集的匹配问题描述如下:给定一个形状(model)的模型点集(*model*)和一组场景点集(*scene*),两个点集中的元素均以特征点的向量坐标表示.点集匹配的目的是在存在噪声和离群点的环境下,通过刚体和非刚体变换发现两个集合中特征点的对应关系,如图1所示.图1中,“o”和“+”分别表示两个点集中的内点(Outliers)和离群点(Inliers).可以令 $\mathcal{M} = \{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^K$ 表示模型点集的 K 个特征点, $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_n\}_{n=1}^N$ 表示场景点集中的 N 个特征点.模型点集和场景点集中的标识点的个数一般不相同,而模型点集和场景点集的特征点 \mathbf{m}_k 和 \mathbf{s}_n 具有相同的维数,均为 D 维坐标向量.



图1 模型点集 *model* 和场景点集 *scene* 的匹配示意图
Fig. 1 Illustration of point set matching between *model* and *scene*

一般来说,点集匹配问题的难点主要体现在以下几个方面.1)在两个特征点集合之间,通常没有可以利用的关于点与点之间对应关系的先验信息,所以在估计映射函数之前需要通过某种方法首先建立起点与点之间的对应关系;2)由于两个集合中特征点数目的不平衡会造成一对多或多对一的冗余情况,因此需要采取合适的方法对这些对应冗余进行处理,保证映射函数估计的准确性;3)在实际应用中,两个点集中可能会存在大量的离群点和映射噪声,这些干扰因素同样会增加点集匹配的难度.

为了克服这些问题,本文提出了一种基于概率模型的将回归分析与聚类分析相结合的匹配策略.该方法引入一个中间变量在两个特征点集合之间建立联系,以充分利用回归和聚类这两种经典的统计分析方法来实现两个点集的匹配.一方面,该中间变量所代表的点集与模型点集中的点具有一对一的对应关系,可以利用回归方法估计其与模型点之间的映射函数;另一方面,以中间变量的均值作为高斯混合模型的中心,对场景点集中的点做聚类分析,这样每个场景点就获得了一个相对于该中间变量均值的概率.

由于场景点在其所在的空间中的坐标不变,因此中间变量的中心坐标会在聚类过程中根据场景点的位置进行坐标更新.当一次更新完成后,我们可以利用新的中间变量的均值坐标与模型点的坐标对映射函数重新进行回归.同样,在得到新的回归参数后,可以再利用新的变换参数将模型点映射到中间变量的空间,形成新的聚类中心.如此反复,直到中间变量的均值与场景点完全重合,从而实现两个特征点集合的匹配.此外,该模型还分别用两个高斯混合模型对回归过程的噪声和场景点集的离群点进行估计,以消除异方差噪声和多簇离群点对点集匹配的影响.

两个点集之间的匹配问题,可以用概率的形式表示为对场景点集 \mathcal{S} 与映射泛函 \mathcal{T} 的联合概率密度进行边缘积分^[33],如下式所示:

$$p(\mathcal{S}|\mathcal{M}) = \int p(\mathcal{S}, \mathcal{T}|\mathcal{M})p(\mathcal{T})d\mathcal{T} \quad (1)$$

泛函 \mathcal{T} 的主要功能是将模型点集中的点映射到场景点集的空间,它可以根据应用与精度的要求确定映射函数的具体形式.在本文中,映射泛函 \mathcal{T} 将采用下面的函数形式:

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = A\mathcal{M} + B\Phi(\mathcal{M}) \quad (2)$$

式中, A 是仿射变换矩阵, B 和 $\Phi(\mathcal{M})$ 分别是径向基函数(Radial basis function, RBF)的权重和基于 K_n 个径向基的变换矩阵.对于仿射变换矩阵

A , 偏移向量纳入 A 中统一表示以简化公式. 需要指出的是, 这一变换函数主要是基于广义加性模型 (Generalized additive models, GAM) 的思想得到的, 因为 GAM 模型已经被证明是一种有效的非线性回归分析工具, 广泛地应用于多维非线性逼近问题^[34-35]. 该加性映射函数可以解释为: 仿射变换用于逼近模型点集与场景点集之间的部分已知的线性关系, 而 RBF 函数用于逼近未知的 (也许是非线性的) 某种点集映射关系^[36-37]. 一旦该函数被指定, 那么寻找两个点集之间映射函数的问题就转化为基于某一目标函数的仿射矩阵 A 和权重矩阵 B 的参数估计过程.

2 点集匹配过程的图模型

2.1 基于高斯混合模型的回归分析

在给定 A, B 和 Φ 的情况下, 可以获得一个新的随机变量 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$. 在本文中, 我们称之为转移变量 (Transition variable, TV), 它的主要作用是通过对模型点的变换, 在场景点的空间中产生一个与模型点有关的、含有 K 个分量的混合模型. 转移变量 \mathcal{X} 在贝叶斯点集匹配中起着重要的作用, 它将模型点和场景点通过概率的形式联系在一起, 分别与模型点进行回归分析, 与场景点进行聚类分析. 在回归模型中, 转移变量 \mathcal{X} 的第 k 个元素可以表示如下:

$$\mathbf{x}_k = A\tilde{\mathbf{m}}_k + B\Phi(\mathbf{m}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (3)$$

式中, $\tilde{\mathbf{m}}_k = [1; \mathbf{m}_k]$, $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 通常是一个均值为零的高斯白噪声. 但是在本文提出的模型中, $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 是一个具有 J 个分量的 D 维高斯混合模型, 用来消除异方差噪声对参数估计的影响, 同时也使得模型具有一般性^[38].

假设噪声混合模型的每个分量都是具有均值 $\boldsymbol{\mu}_j$ 和各向异性精度矩阵 Δ_j 的高斯分布, 那么噪声高斯混合模型的均值和方差是 $\boldsymbol{\mu} = \{\boldsymbol{\mu}_j\}_{j=1}^J$, $\Delta = \{\Delta_j\}_{j=1}^J$, 并且假设 $\Gamma = \{\gamma_k, k = 1, \dots, K\}$ 为噪声点所有混合分量之间关系的指示变量 (Indicator variable); γ_k 是一个 1-of- J 的二值向量, 具有元素 $\{\gamma_{kj}, j = 1, \dots, J\}$. 令 $\Theta_r = \{A, B, \Gamma, \boldsymbol{\mu}, \Delta\}$, 那么在给定 Θ_r 和 \mathcal{M} 的情况下, 转移变量 \mathcal{X} 的条件概率可以表示为

$$p(\mathcal{X}|\Theta_r, \mathcal{M}) = \prod_{k=1}^K \prod_{j=1}^J \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | A\tilde{\mathbf{m}}_k + B\Phi(\mathbf{m}_k) + \boldsymbol{\mu}_j, \Delta_j^{-1})^{\gamma_{kj}} \quad (4)$$

通过变换, 模型在场景点空间中获得了具有 K 个

分量的高斯混合模型, 每个场景点都可以看作是由这个高斯混合模型随机生成的. 指示变量 Γ 的概率分布由混合比 $\boldsymbol{\omega}$ 控制, $\boldsymbol{\omega}$ 的概率分布是具有先验参数 $\boldsymbol{\kappa}_0$ 的狄利柯雷分布 (Dirichlet distribution, DD)^[39].

2.2 基于高斯混合模型的聚类分析

模型点经过映射后, 可以在场景点所在空间中获得 K 个高斯混合分量, 并且每个场景点可以基于后验概率聚类到某个分量中. 然而, 如图 1 所示, 在场景点集中除了兴趣点 (Shape of interest, SOI) 以外, 可能还存在多余的离群点. 本文提出的模型采用含有 K_o 个分量的高斯混合模型来代替简单的均匀分布对离群点进行估计, 以消除多簇离群点对匹配精度的影响^[25-26, 31].

离群点混合模型的分量个数可以预先设定或通过“产生-消亡” (“Birth-or-death, BOD”) 过程来确定^[40]. 对于每个场景点 \mathbf{s}_n 来说, 仍然在模型中引入一个对应的指示变量 $\mathcal{Z} = \{z_n, n = 1, \dots, N\}$. 其中, z_n 表示一个 1-of- $(K + K_o)$ 的二值向量, 向量中的元素为 $\{z_{nk}, k = 1, \dots, K + K_o\}$, K_o 表示离群点的分量个数. 令 $\Theta_c = \{\mathcal{X}, \Lambda, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \Upsilon\}$, 可以得到下面的条件概率分布:

$$p(\mathcal{S}|\Theta_c) = \prod_{n=1}^N \left\{ \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{s}_n | \mathbf{x}_k, \Lambda_k^{-1})^{z_{nk}} \times \prod_{k=K+1}^{K+K_o} \mathcal{N}(\mathbf{s}_n | \mathbf{y}_k, \Upsilon_k^{-1})^{z_{nk}} \right\} \quad (5)$$

式中, $\Lambda = \{\Lambda_k\}_{k=1}^K$ 是对应转移变量 \mathcal{X} 的各向异性精度矩阵; $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_k\}_{k=K+1}^{K+K_o}$ 和 $\Upsilon = \{\Upsilon_k\}_{k=K+1}^{K+K_o}$ 分别是离群点混合模型的均值和精度矩阵. 如果用 $\lambda_k I$ 代替 Λ_k , 那么可以获得转移变量的各向同性精度矩阵, 其中 I 是 D 维单位矩阵. 指示变量 \mathcal{Z} 的概率分布由混合比 $\boldsymbol{\pi}$ 控制, $\boldsymbol{\pi}$ 的概率分布仍然是具有先验参数 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 的狄利柯雷分布.

2.3 分层概率图模型

在概率模型中, 点集匹配问题被分为两个子过程: 回归过程与聚类过程, 并用高斯混合模型对回归噪声和场景离群点的分布进行估计. 两个过程通过转移变量 \mathcal{X} 联结在一起, 并且给出了转移变量的各向同性和各向异性高斯混合模型. 点集匹配过程的概率模型可以直观地表示为一个有向图, 如图 2 所示. 就变换参数 A 和 B 而言, 可以假设其每一列向量均为具有零均值的高斯先验分布, 这样就可以通过后验分布对变换参数进行基于主动相关决策 (Automatic relevance determination, ARD)^[40-41] 的方法移除不相关的径向基. 除此之外, 变换矩阵 A

和 B 的分布还含有服从 Gamma 分布的精度控制参数 ν 和 η .

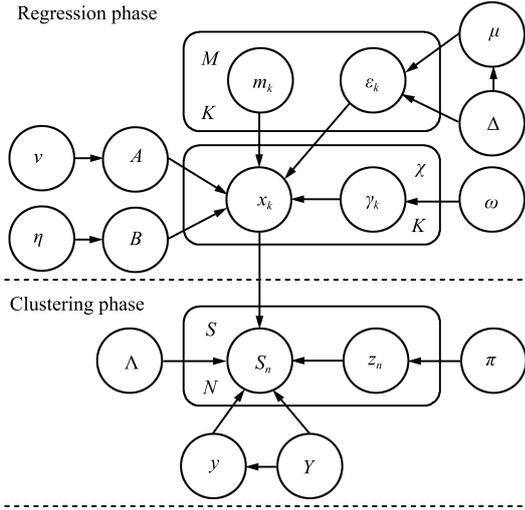


图 2 表示点集匹配的有向图 (其中上半部分是回归模型, 下半部分是聚类模型)

Fig. 2 Directed acyclic graph representing the probabilistic point set matching (The upper part is the subphase of regression and the bottom part is the subphase of clustering.)

需要指出的是, 本文提出的模型与其他基于高斯混合模型的点集匹配方法, 例如 MPM^[31]、CPD^[25] 和 GMM-L2^[23], 有着明显的区别, 主要体现在以下几点: 1) 针对点集匹配的不确定性给出了一个完整的概率模型, 并且为了能够进行统计推断, 所有的参数、变量均假设为随机变量, 具有先验和后验概率; 2) 利用两个高斯混合模型对回归噪声和聚类离散点进行估计, 并且假设每个高斯混合分量均具有各向同性或各向异性协方差矩阵; 3) 贝叶斯框架赋予该模型具有对变量、噪声和离散点进行统计推理的功能, 同时还能够避免在匹配过程中出现概率估计过程的“数据塌陷”(“Data collapses”)问题, 而这一现象经常出现在一对一的点集匹配过程中。

根据图 2 所示, 该点集匹配概率模型共有 8 组随机变量和参数, 可以分别表示为: 1) 转移变量 \mathcal{X} , 控制仿射和非刚体变换后的模型点集的中心; 2) 场景点空间的混合模型的服从 Wishart 分布的精度矩阵 Λ ; 3) 仿射变换矩阵 A 和服从 Gamma 分布的 $D+1$ 维精度参数向量 ν ; 4) 径向基权重矩阵 B 和服从 Gamma 分布的 K_n 维精度参数向量 η ; 5) 噪声混合模型均值 μ 和精度矩阵 Δ 服从 Gaussian-Wishart 联合概率分布; 6) 指示变量 Γ 和 J 维混合比例参数向量 ω , 其中, ω 服从狄利柯雷分布; 7) 离群值混合模型均值 \mathbf{y} 和精度矩阵 Υ 服从 Gaussian-

Wishart 联合概率分布; 8) 指示变量 \mathcal{Z} 和 $K+K_0$ 维混合比例参数向量 π , 其中, π 服从狄利柯雷分布。

此外, 该模型还有 6 组控制超先验分布 (Hyper-prior) 的先验参数: 1) a_0 和 b_0 分别是精度 ν 的先验形状 (Shape) 和先验逆尺度 (Inverse-scale) 参数; 2) c_0 和 d_0 分别是精度 η 的先验形状和先验逆尺度参数; 3) v_0 和 W_0 是精度矩阵 Λ 的先验自由度 (Degree of freedom) 和先验尺度 (Scale) 矩阵; 4) μ_0 , ξ_0 , r_0 , U_0 分别是噪声混合模型的先验均值 (Mean)、先验相对精度 (Relative precision, RP)、先验自由度和先验精度矩阵 (Precision matrix, PM); 5) \mathbf{y}_0 , β_0 , t_0 , L_0 分别是噪声混合模型的先验均值、先验相对精度、先验自由度和先验精度矩阵; 6) α_0 和 κ_0 分别是混合比例参数 π 和 ω 的先验样本大小。

如果假设场景点空间的转移变量 \mathcal{X} 具有各向同性协方差矩阵, 那么精度矩阵 Λ 可以表示为 $\Lambda = \{\lambda_k I\}_{k=1}^K$, 精度参数 λ_k 服从 Gamma 分布. 而且, Wishart 分布的先验尺度矩阵 W_0 将需要替换为标量的先验逆尺度参数 w_0 .

3 变分贝叶斯逼近

3.1 边缘概率函数

令 Θ 表示模型中所有参数和变量的集合, 即 $\Theta = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \Gamma, \Lambda, \Upsilon, \Delta, A, B, \eta, \nu, \mu, \pi, \omega\}$. 那么, 点集匹配的条件概率 $p(\mathcal{S}|\mathcal{M})$ 可以表示为对 Θ 的边缘概率 (这里变换函数 \mathcal{T} 已经由 A 和 B 确定). 给定模型点集后, 积分符号内 \mathcal{S} 与 Θ 的条件联合概率可以根据图 2 分解为一系列条件概率的乘积, 可以表示为

$$p(\mathcal{S}|\mathcal{M}) = \int p(\mathcal{S}|\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \Lambda, \Upsilon) p(\mathcal{Z}|\pi) p(\Gamma|\omega) \times p(\mathcal{X}|A, B, \mu, \Delta, \Gamma, \mathcal{M}) p(\pi|\alpha_0) p(\omega|\kappa_0) \times p(A|\nu) p(B|\eta) p(\nu|a_0, b_0) p(\eta|c_0, d_0) \times p(\Lambda|v_0, W_0) p(\mu, \Delta|\mu_0, \xi_0, r_0, U_0) \times p(\mathcal{Y}, \Upsilon|\mathbf{y}_0, \beta_0, t_0, L_0) d\Theta \quad (6)$$

在变分贝叶斯框架下, 边缘条件概率似然函数 $\ln p(\mathcal{S}|\mathcal{M})$ 是变分逼近的目标函数, 它可以进一步分解为变分自由能量 (Variational free energy, VFE) \mathcal{F} 与参数的真实后验概率和逼近后验概率的 KL 散度之和. 其中, 变分自由能量 \mathcal{F} 是 $\ln p(\mathcal{S}|\mathcal{M})$ 的一个逼近下界^[39]. 经过一系列的 EM 迭代过程, \mathcal{F} 会逼近边缘条件概率似然函数, 并且, 真实后验概率 $p(\Theta|\mathcal{S}, \mathcal{M})$ 和逼近后验概率 $q(\Theta)$ 之间的 KL 散度也会通过这一逼近过程达到最小化^[42]. 变分自由能量 \mathcal{F} 可以表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = & \langle \ln p(\mathcal{S}|\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \Lambda, \Upsilon) \rangle_{q(\mathcal{X})q(\mathcal{Z})q(\Lambda)q(\mathcal{Y}, \Upsilon)} + \\
& \langle \ln p(\mathcal{X}|A, B, \boldsymbol{\mu}, \Delta, \Gamma, \mathcal{M}) \rangle_{q(\mathcal{X})q(A)q(B)q(\boldsymbol{\mu}, \Delta)q(\Gamma)} + \\
& \langle \ln p(\boldsymbol{\mu}, \Delta|\boldsymbol{\mu}_0, \xi_0, r_0, U_0) \rangle_{q(\boldsymbol{\mu}, \Delta)} + \mathcal{H}[q(\boldsymbol{\mu}, \Delta)] + \\
& \langle \ln p(\mathcal{Y}, \Upsilon|\mathbf{y}_0, \beta_0, t_0, L_0) \rangle_{q(\mathcal{Y}, \Upsilon)} + \mathcal{H}[q(\mathcal{Y}, \Upsilon)] + \\
& \langle \ln p(\mathcal{Z}|\boldsymbol{\pi}) \rangle_{q(\mathcal{Z})q(\boldsymbol{\pi})} + \mathcal{H}[q(\mathcal{Z})] + \mathcal{H}[q(\mathcal{X})] + \\
& \langle \ln p(\Gamma|\boldsymbol{\omega}) \rangle_{q(\Gamma)q(\boldsymbol{\omega})} + \mathcal{H}[q(\Gamma)] + \\
& \langle \ln p(\boldsymbol{\pi}|\boldsymbol{\alpha}_0) \rangle_{q(\boldsymbol{\pi})} + \mathcal{H}[q(\boldsymbol{\pi})] + \\
& \langle \ln p(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\kappa}_0) \rangle_{q(\boldsymbol{\omega})} + \mathcal{H}[q(\boldsymbol{\omega})] + \\
& \langle \ln p(\Lambda|v_0, W_0) \rangle_{q(\Lambda)} + \mathcal{H}[q(\Lambda)] + \\
& \langle \ln p(A|\boldsymbol{\nu}) \rangle_{q(A)q(\boldsymbol{\nu})} + \mathcal{H}[q(A)] + \\
& \langle \ln p(\boldsymbol{\nu}|a_0, b_0) \rangle_{q(\boldsymbol{\nu})} + \mathcal{H}[q(\boldsymbol{\nu})] + \\
& \langle \ln p(B|\boldsymbol{\eta}) \rangle_{q(B)q(\boldsymbol{\eta})} + \mathcal{H}[q(B)] + \\
& \langle \ln p(\boldsymbol{\eta}|c_0, d_0) \rangle_{q(\boldsymbol{\eta})} + \mathcal{H}[q(\boldsymbol{\eta})] \quad (7)
\end{aligned}$$

式中, $\mathcal{H}[p(x)] = -\int p(x) \ln p(x) dx$ 是随机变量 x 的熵 (Entropy), $q(x)$ 是随机变量 x 的变分逼近后验概率, $\langle \cdot \rangle$ 是期望算子 (Expectation operator). 通过依次对 \mathcal{F} 中的 $q(x)$ 取变分, 可以获得变换参数、转移变量和各个隐藏变量的变分逼近后验概率 (Variational approximate posteriors, VAP).

3.2 变分逼近后验概率

变分逼近的一个重要思想是利用共轭指数族概率分布的先验概率和后验分布可以保持相同函数形式的特性^[43], 从而可以根据式 (7) 推导出模型中的参数和变量的变分逼近后验概率.

3.2.1 转移变量 \mathcal{X}

转移变量 \mathcal{X} 的变分后验概率仍然是高斯分布, 假设 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}_k}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x}_k}$ 是变换后的转移变量中第 k 个点的均值与协方差, 那么有

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x}_k}^{-1} &= \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \Lambda_k \rangle + \sum_{j=1}^J \langle \gamma_{kj} \Delta_j \rangle \\
\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{x}_k} &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{x}_k} \left[\sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \Lambda_k \rangle \mathbf{s}_n + \right. \\
& \quad \left. \sum_{j=1}^J \langle \gamma_{kj} \Delta_j (A \tilde{\mathbf{m}}_k + B \Phi(\mathbf{m}_k) + \boldsymbol{\mu}_j) \rangle \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

转移变量 \mathcal{X} 的协方差矩阵不但含有回归噪声的不确定性, 而且包含了场景点集的信息. \mathbf{x}_k 的均值是其与全部场景点之间相对位置的加权平均, 并含有经过变换的相应的模型点信息. 从式 (8) 可以

看出, 转移变量 \mathcal{X} 是由模型点集与场景点集共同作用产生的, 同时还包含了两个点集之间映射函数的不确定性.

3.2.2 仿射变换矩阵 A

基于 Beal 的思想^[40], 仿射变换矩阵 A 的概率可以按行进行分解, 然后再在每一列上赋予精度参数 $\boldsymbol{\nu}$. 令 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_q$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q$ 表示 A 的 q 行元素的逼近后验均值与协方差, 那么仿射变换矩阵 A 的变分后验概率可以表示为

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q^{-1} &= \text{diag}(\boldsymbol{\nu}) + \sum_{j=1}^J \langle \Delta_j(q) \rangle \tilde{\mathcal{M}} \Xi_j \tilde{\mathcal{M}}^T \\
\hat{\boldsymbol{\mu}}_q &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q \left[\sum_{j=1}^J \langle \Delta_j(q) (\mathcal{X} - B \Phi(\mathcal{M}) - \boldsymbol{\mu}_j) \rangle \Xi_j \tilde{\mathcal{M}}^T \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

式中, $\Xi_j = \text{diag}([\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{Kj}])$, \mathcal{X} 的第 k 列元素是 \mathbf{x}_k , $\tilde{\mathcal{M}}$ 的第 k 列元素是 $\tilde{\mathbf{m}}_k$, $\Phi(\mathcal{M})$ 的第 k 列包含 $\Phi(\mathbf{m}_k)$. 仿射矩阵 A 的后验概率的协方差是一个 $D(D+1)(D+1)$ 维的对角矩阵.

3.2.3 仿射变换参数的精度 $\boldsymbol{\nu}$

关于仿射变换矩阵 A 的精度参数 $\boldsymbol{\nu}$, 其变分逼近后验概率仍然是 Gamma 分布, $\boldsymbol{\nu}$ 的第 l 个元素的后验形状参数与后验逆尺度参数为

$$\begin{aligned}
a_l &= a_0 + \frac{D}{2} \\
b_l &= b_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^D \langle A_{ql}^2 \rangle \quad (10)
\end{aligned}$$

式中, a_0 和 b_0 分别是 Gamma 分布函数的先验形状与先验逆尺度参数.

3.2.4 径向基函数的权重矩阵 B

与仿射变换矩阵 A 类似, 权重矩阵 B 的概率分布依然按行划分均值, 然后再对其按列赋予精度参数 $\boldsymbol{\eta}$. 因此, 权重矩阵 B 第 q 行元素的后验均值 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_q$ 和后验协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q$ 可以表示为

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q^{-1} &= \text{diag}(\boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^J \langle \Delta_j(q) \rangle \Phi(\mathcal{M}) \Xi_j \Phi(\mathcal{M})^T \\
\hat{\boldsymbol{\mu}}_q &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q \left[\sum_{j=1}^J \langle \Delta_j(q) (\mathcal{X} - A \tilde{\mathcal{M}} - \boldsymbol{\mu}_j) \rangle \Xi_j \Phi(\mathcal{M})^T \right] \quad (11)
\end{aligned}$$

式中, B 的协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_q$ 是一个 $D \times K_n \times K_n$ 的对角矩阵, 其中 K_n 是径向基的个数.

3.2.5 权重矩阵参数的精度 η

仿射变换矩阵 B 的精度 η 的变分后验概率仍然是 Gamma 分布, η 的第 l 个元素的后验形状参数与后验逆尺度参数为

$$\begin{aligned} c_l &= c_0 + \frac{D}{2} \\ d_l &= d_0 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^D \langle B_{ql}^2 \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

式中, c_0 和 d_0 分别是 Gamma 分布函数的先验形状与逆尺度参数.

3.2.6 变换后模型点集的精度矩阵 Λ

变换后的模型点, 其精度矩阵 Λ_k 的变分后验概率仍然是 Wishart 分布. 第 k 个点的精度矩阵 Λ_k 的后验自由度和后验尺度矩阵为

$$\begin{aligned} v_k &= v_0 + \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \rangle \\ W_k^{-1} &= W_0^{-1} + \left\langle (\mathcal{S} - \mathbf{x}_k) \Psi_k (\mathcal{S} - \mathbf{x}_k)^T \right\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\Psi_k = \text{diag}\{[z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{Nk}]\}$, $1 \leq k \leq K$. 模型点集 \mathcal{S} 的第 n 列元素是 \mathbf{s}_n . 如果假设映射后的模型点具有各向同性协方差矩阵, 那么可以用 Gamma 分布代替 Wishart 来表示精度矩阵 Λ 的概率分布形式, 这样就可以避免矩阵操作, 提高执行效率.

3.2.7 噪声混合模型的均值 μ 与精度矩阵 Δ

噪声混合模型的均值与精度矩阵 $\{\mu, \Delta\}$ 的变分逼近后验概率仍然是 Gaussian-Wishart 分布, 变分后验概率有关参数的迭代公式为

$$\begin{aligned} r_j &= r_0 + \sum_{k=1}^K \langle \gamma_{kj} \rangle \\ \xi_j &= \xi_0 + \sum_{k=1}^K \langle \gamma_{kj} \rangle \\ \mu_j &= \frac{1}{\xi_j} \left[\xi_0 \mu_0 + \sum_{k=1}^K \langle \gamma_{kj} \mathcal{E} \rangle \right] \\ U_j^{-1} &= U_0^{-1} + \frac{1}{\xi_j} \left[\xi_0 \mu_0 \mu_0^T + \langle \mathcal{E} \Xi_j \mathcal{E}^T \rangle \right] \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $\mathcal{E} = \mathcal{X} - A\tilde{\mathcal{M}} - B\Phi(\mathcal{M})$. \mathcal{E} 的第 k 列元素是转移变量 \mathcal{X} 与模型点集对应点的回归噪声. 利用高斯混合模型来估计回归噪声 \mathcal{E} 可以提高模型对异方差噪声的鲁棒性.

3.2.8 噪声混合模型的指示变量 Γ

令 $\langle \gamma_{kj} \rangle$ 代表响应矩阵的第 (k, j) 个元素, 表示

噪声混合模型中第 j 个分量对第 k 个噪声的响应, 那么有:

$$\langle \gamma_{kj} \rangle = \frac{1}{\Gamma_{kj}} \left\{ \langle \log \omega_j \rangle + \frac{1}{2} \langle \log |\Delta_j| \rangle - \frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mu_j)^T \Delta_j (\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mu_j) \rangle \right\} \quad (15)$$

式中, Γ_{kj} 是归一化因子, $|\cdot|$ 表示行列式算子 (Determinant operator), $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{x}_k - A\tilde{\mathbf{m}}_k - B\Phi(\mathbf{m}_k)$ 是转移变量 \mathcal{X} 与模型点集之间的第 k 个回归噪声.

3.2.9 噪声混合模型的混合比例 ω

噪声混合模型的混合比例参数 ω 的变分后验概率仍然是狄利克雷分布, 第 j 个分量的后验样本大小 κ_j 是

$$\kappa_j = \kappa_0 + \sum_{k=1}^K \langle \gamma_{kj} \rangle \quad (16)$$

式中, κ_0^j 是第 j 个混合分量的先验样本大小.

3.2.10 离群点混合模型的均值 \mathcal{Y} 和精度矩阵 Υ

噪声混合模型的均值与精度矩阵 $\{\mathcal{Y}, \Upsilon\}$ 的变分后验概率仍然是 Gaussian-Wishart 分布, 变分后验概率有关参数的迭代公式为

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \rangle \\ \beta_k &= \beta_0 + \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \rangle \\ \mathbf{y}_k &= \frac{1}{\beta_k} \left[\beta_0 \mathbf{y}_0 + \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \rangle \mathbf{s}_n \right] \\ L_k^{-1} &= L_0^{-1} + \frac{1}{\beta_k} \left[\beta_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0^T + \mathcal{S} \langle \Psi_k \rangle \mathcal{S}^T \right] \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $\Psi_k = \text{diag}\{[z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{Nk}]\}$, $K+1 \leq k \leq K+K_o$.

3.2.11 场景点混合模型的指示变量 \mathcal{Z}

指示变量 \mathcal{Z} 的期望值包含两个部分, 分别是转移变量 \mathcal{X} 对场景点的响应和离群点混合模型对场景点的响应, 可以分别用两个 $N \times K$ 和 $N \times K_o$ 的子矩阵表示. 令 $\langle z_{nk} \rangle$ 代表响应矩阵的第 (n, k) 个元素, 表示混合模型中第 k 个分量对第 n 个场景点的响应, 那么当 $1 \leq k \leq K$ 时, 有:

$$\langle z_{nk} \rangle = \frac{1}{Z_{nk}} \exp \left\{ \langle \log \pi_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \log |\Lambda_k| \rangle - \frac{1}{2} \langle (\mathbf{s}_n - \mathbf{x}_k)^T \Lambda_k (\mathbf{s}_n - \mathbf{x}_k) \rangle \right\} \quad (18)$$

对于离群点混合模型的指示变量 $K + 1 \leq k \leq K + K_o$, 有:

$$\langle z_{nk} \rangle = \frac{1}{Z_{nk}} \exp \left\{ \langle \log \pi_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \log |\Upsilon| \rangle - \frac{D}{2\beta_k} - \frac{t_k}{2} (\mathbf{s}_n - \mathbf{y}_k)^T L_k (\mathbf{s}_n - \mathbf{y}_k) \right\} \quad (19)$$

式中, Z_{nk} 是归一化因子, $|\cdot|$ 表示行列式算子.

3.2.12 转移变量和离群点混合模型的混合比例 π

场景点混合模型的混合比例参数 π 的变分后验概率仍然是狄利克雷分布, 第 k 个分量的后验样本大小 α_k 是:

$$\alpha_k = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N \langle z_{nk} \rangle \quad (20)$$

式中, α_0^k 是第 k 个混合分量的先验样本大小.

显而易见, 这些公式之间是相互耦合的, 必须通过迭代的方式逐次求解. 算法 1 给出了变分贝叶斯点集匹配算法的伪代码, 人们可以依照算法的迭代步骤非常方便地实现该点集匹配程序代码.

算法 1. 变分贝叶斯点集匹配 (Variational Bayesian point set matching, VBPSM)

输入. $\mathcal{M} = \{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^K$, $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_n\}_{n=1}^N$, $\varepsilon_{\mathcal{F}}$

1) 初始化:

先验参数: $a_0, b_0, c_0, d_0, \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\kappa}_0, v_0, W_0$

噪声混合模型: $\boldsymbol{\mu}_0, \xi_0, r_0, U_0$

离群点混合模型: $\mathbf{y}_0, \beta_0, t_0, L_0$

映射参数: A, B

2) 重构: $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$

3) for 基于 W_0 的由粗到精匹配 do

4) repeat

5) 根据式 (15) 计算指示变量 Γ ;

6) 根据式 (14) 计算噪声混合模型的后验参数 $\boldsymbol{\mu}, \xi, \mathbf{r}, U$;

7) 根据式 (16) 计算混合比例参数 $\boldsymbol{\omega}$ 的后验参数 $\boldsymbol{\kappa}$;

8) 根据式 (18) 和式 (19) 计算指示变量 \mathcal{Z} ;

9) 根据式 (17) 计算离群点混合模型的后验参数 \mathbf{y}, β, t, L ;

10) 根据式 (20) 计算转移变量和离群点模型的混合比例参数 π 的后验参数 $\boldsymbol{\alpha}$;

11) 根据式 (9) 计算仿射变换参数 A ;

12) 根据式 (10) 计算精度参数 ν 的后验参数 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ;

13) 根据式 (11) 计算权重矩阵 B ;

14) 根据式 (12) 计算精度参数 η 的后验参数 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} ;

15) 根据式 (8) 计算转移变量 \mathcal{X} ;

16) 根据式 (13) 计算场景点混合模型精度 Λ 的后验参数 \mathbf{v} 和 W ;

17) 计算逼近下限 \mathcal{F}

18) until $|\mathcal{F}(t+1) - \mathcal{F}(t)| < \varepsilon_{\mathcal{F}}$

19) end for

3.3 基于先验尺度的由粗到精点集匹配

对于变分贝叶斯方法来说, 先验概率的参数初始化对于后验概率的变分逼近有着很大的影响^[44]. 而对于变分贝叶斯点集匹配而言, 场景点混合模型的精度矩阵 Λ 对于匹配结果有着重要的影响, 它的先验尺度矩阵 W_0 对于算法是否能够克服局部最小点, 达到一定的匹配精度有着重要的意义. 例如, 较小的 W_0 会导致较低的后验精度 Λ , 也就是更加扁平的混合分量后验概率. 虽然扁平的混合分量会导致不精确的点对点匹配精度, 但是这种较大的不确定性有助于提升算法克服局部最小点的能力. 与此相反, 较高的点对点匹配精度是以算法易于陷入局部最小点为代价的.

在图 3 所示的实验中, 场景点是由模型点分别旋转 40° 和 20° 得到的, 而先验尺度矩阵分别设定为 $W_0 = 1 \times I$ 和 $W_0 = 20 \times I$. 在旋转 20° 的时候, 两个先验尺度矩阵均可以正确地估计出点集之间的旋转角度. 但是, 大先验尺度矩阵比小先验尺度矩阵获得了更高的点对点匹配精度, 匹配结果的不确定性小. 相反, 在旋转角度为 40° 的时候, 大先验尺度矩阵 W_0 却陷入了局部最小点, 而小先验尺度矩阵依然可以捕捉到目标点集的主要趋势. 图 3 中, 模型点集和场景点集分别用 “+” 和 “o” 表示. 椭圆表示转移变量的变分逼近概率分布 $q(\mathcal{X})$.

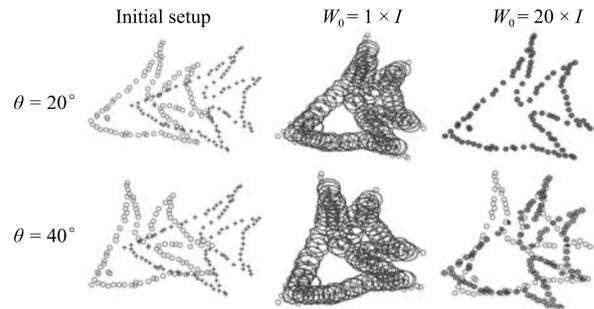


图 3 转移变量精度的先验尺度矩阵对匹配结果的影响

Fig. 3 The influence of priors on the matching results

转移变量精度的先验尺度矩阵 W_0 对匹配精度影响的定量分析如图 4 所示. 图 4(a) 给出了一个针对先验尺度矩阵对匹配结果影响的定量实验结果. 在这一实验中, 场景点由模型点在 $-40^\circ \sim 40^\circ$ 范围内随机旋转产生, 同时在场景点集中加入一个附加的离群点集. 先验尺度 W_0 从 $0.5 \times I$ 增加到 $10 \times I$, 对每一个 W_0 进行 50 次实验, 记录下仿射变换矩阵真实值与估计值的误差. 从图 4(a) 给出的实验结果可以看出, 当 W_0 从 $0.5 \times I$ 增加到 $4 \times I$ 时, 匹配

误差逐步变小, 匹配不确定性也逐步变小. 然而, 随着先验尺度矩阵 W_0 超过 $4 \times I$ 后, 匹配误差逐步增大, 并且不确定性也同时增加, 这是由于算法在旋转角度较大的情况下陷入局部最小点的次数增多所致. 但是, 对于正确匹配的情况, 随着先验尺度矩阵 W_0 的增加, 匹配误差单调减少, 也就是说 W_0 越大, 在正确匹配的前提下, 模型可以获得更高的点对点匹配精度.

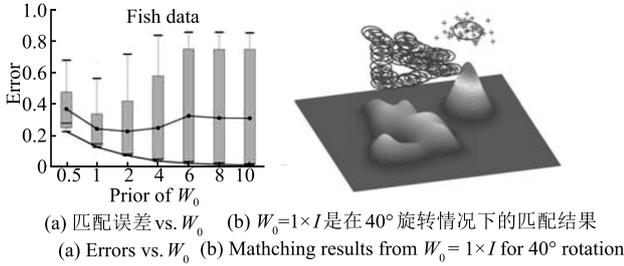


图 4 转移变量精度的先验尺度矩阵 W_0 对匹配精度影响的定量分析

Fig. 4 The quantitative analysis of the matching precision with respect to the prior scale matrix W_0 of the transition variable

基于以上分析, 本文提出了一种贝叶斯概率模型框架下的由粗到精 (Coarse-to-fine, CTF) 的点集匹配策略. 首先利用小的先验尺度矩阵 W_0 来获得模型点与场景点的粗匹配, 避免算法陷入局部最小点, 然后再利用大的先验尺度矩阵来获得点与点的精匹配结果. 这一策略与 VFC-L2E^[24] 和 MPM^[31] 调节退火温度 T , 以及由粗到精的相关匹配方法^[11] 等方法相类似. 在本文中, 先验尺度矩阵 W_0 在逼近过程中由 $1 \times I$ 增加到 $10 \times I$. 图 4 (b) 给出了先验尺度矩阵 $W_0 = 1 \times I$ 情况下 $p(S|\mathcal{M})$ 的变分逼近后验概率, 从图中可以清楚地看出不同尺度 W_0 对后验概率产生的影响.

本文涉及的其他先验概率超参数按照下面的规则进行设定: 1) a_0 , b_0 , c_0 和 d_0 分别设定为 0.001, 代表 A 和 B 具有无先验信息的先验分布 (Noninformative priors, NP); 2) v_0 设定为 $D + 1$; 3) α_0 中的元素设定为 1; 4) κ_0 中的元素设定为 1; 5) 离群点混合模型的先验参数设定为: \mathbf{y}_0 按照均匀分布随机产生, L_0 设定为 $1 \times I$, t_0 设定为 $D + 1$, β_0 设定为 0.001; 6) 噪声混合模型的先验参数为: μ_0 设定为 D 维零向量, U_0 设定为 $1 \times I$, r_0 设定为 $D + 1$, ξ_0 设定为 0.001.

应当指出的是, 离群点的先验信息已经全部显示包含在高斯混合模型的先验参数中, 这些参数的后验信息会在变分逼近过程中自动地更新. 因此, 该方法不需要像 CPD 和 GMM-L2 等方法那样对离群数据比 (Outlier-to-data) 作出强假设. 事实上,

在实际应用中通常很难获得关于离群点在数据中所占比例的准确信息. 因此, 基于贝叶斯的高斯混合模型为估计数据集中离群点的分布提供了一种非常有效的分析工具.

3.4 计算复杂度分析

通过观察式 (11)、(13) 和 (18) 可以看出, 在一次迭代过程中, 参数后验概率变分逼近过程的计算复杂度分别为 $O(DKK_n^2)$ 、 $O(D^2(N + D)K)$ 和 $O(D^3KN)$. 这里为了表示方便, 将 K_0 纳入 K 中统一表示, 其中 K_n 代表非刚体变换的径向基个数. 与点估计方法相比较, 如 CPD 和 VFC-L2E, 变分贝叶斯框架下的后验概率逼近会明显地增加计算复杂度, 特别是在求取协方差矩阵的过程中需要进行矩阵求逆运算. 对于大规模点集的匹配问题, 不建议利用变分贝叶斯方法直接进行匹配, 可以通过对模型点的降采样 (Down-sampling, DS) 来构建稀疏化中心, 然后再利用协方差矩阵的灵活性对场景点进行粗匹配, 这样会大大降低计算的复杂程度.

表 1 给出了本文方法与 GMM-L2、CPD、VFC-L2E 三种方法在小样本集上的匹配速度的对比. 可以看出, 本文提出的方法的计算速度在小样本集上是可以接受的. 对于贝叶斯框架下的点集匹配问题, 未来仍有大量工作需要, 主要包括先验参数的在线估计, 大规模点集匹配问题的算法优化^[45], 以及逼近过程中的变量推理问题.

表 1 计算时间比较

Table 1 The comparison of computational time

数据集	点数	GMM-L2 (s)	CPD (s)	VFC-L2E (s)	VBPSM (s)
Chinese	105	1.48	1.13	8.49	3.75
road	277	10.11	19.03	5.61	10.32

图 5 给出了一个由粗到精 VBPSM 算法逼近过程的示例. 在粗匹配过程中, $p(S|\mathcal{M})$ 的变分逼近后验概率在小尺度 W_0 的控制下有着比较平坦的概率分布. 当进入到精匹配阶段, 每个混合分量的不确定性开始减少, 转移变量 \mathcal{X} 的均值落入到场景点集中目标点附近一个非常小的邻域内, 从而达到对特征点的匹配目的. 从结果可以看出, 变分贝叶斯点集匹配方法可以利用高斯混合模型对多簇离群点的分布进行估计. 需要指出的是, 对离群点簇数量的不准确假设可能会导致变分贝叶斯点集匹配算法性能的下降.

4 实验结果

本文提出的方法被应用于各种仿真和真实数据

以验证该方法的鲁棒性和可靠性. 同时, 还与当前几种比较常用的点集匹配算法进行了各种定量对比实验. 在下文中, 本文提出的方法均以 VBPSM 简称, 采用 Matlab 7.12 实现算法, 并在 Intel Core 2 (CPU 2.67 GHz, 4 G RAM) PC 机上完成所有实验.

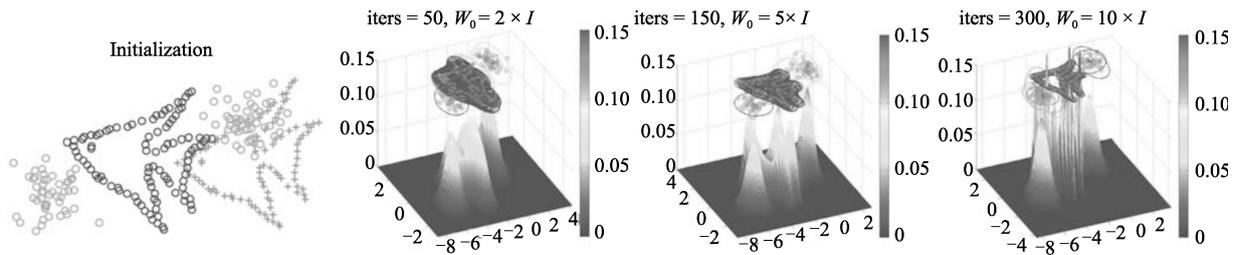
4.1 针对不同情况的点集匹配实验

首先, VBPSM 方法应用于各种不同情况下的点集匹配实验, 包括仿射变换、非刚体变换、三维点集匹配等. 实验中所用数据均为常用的点集匹配公开数据^[21-22, 25]. 在非刚体匹配实验中, 高斯径向基函数用来逼近非刚体变换, 高斯函数的尺度参数设定为 0.8. 图 6 给出了这几种情况的点集匹配结果,

从中可以看出, VBPSM 算法在各种情况下均很好地完成了两个点集的匹配. 图 6 (b) 给出了点集匹配的变分逼近后验概率表示, 这与基于点估计的点集匹配算法有很大的区别^[22-25].

4.2 含有缺失数据的点集匹配实验

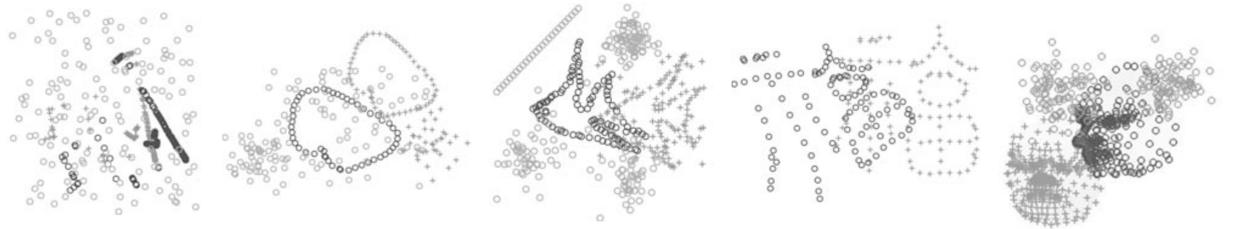
在本节中, VBPSM、GMM-L2 和 CPD 三种方法应用于含有缺失点的 Fish 点集匹配实验. Fish 数据共含有 $N = 98$ 个数据点, 按照 Jian 和 Vemuri 的实验设计^[23], 含有缺失点的二维 Fish 数据通过下面的步骤生成: 去除模型点集中鱼头部的点, 同时去除场景点集中尾部的点, 缺失点的个数从 0 增加到 22. 图 7 给出了两个点集分别缺失 $n = 5$ 、 $n = 20$ 、 $n = 22$ 个点时的匹配结果.



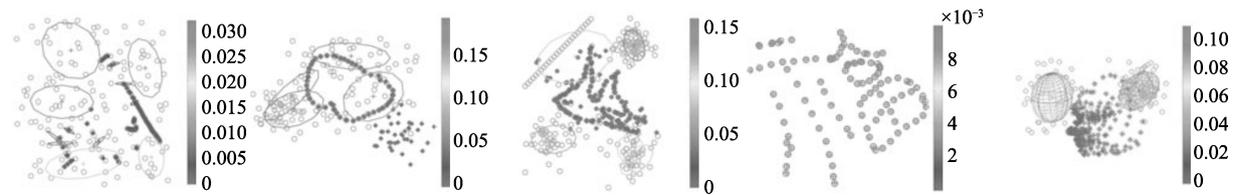
(a) 初始点集, 模型点由 “+” 表示, 目标点和离群点分别由深浅不同的 “o” 表示
 (a) Initialization, the model points are “+” s
 The true shape and outliers in scene are represented by “o” s with different color, respectively
 (b) 对 $p(S|M)$ 由粗到精的逼近过程, 椭圆表示转移变量 χ 和离群点混合模型 y 的 95% 后验概率分布范围
 (b) The coarse-to-fine approximations of $p(S|M)$ in terms of different iterations

图 5 由粗到精的变分贝叶斯点集匹配过程示意图

Fig. 5 The evolution of VBPSM in terms of point set matching



(a) 模型点集 (“+”) 与场景点集 (“o”) 的初始化
 (a) Initialization with model (“+”), scene and outliers (“o”)



(b) $p(S|M)$ 的变分后验概率, 混合模型各个分量根据混合比例 $q(\pi)$ 用不同灰度级表示
 (b) Approximate posteriors of $p(S|M)$ with mean and covariance

图 6 不同情况下的变分贝叶斯点集匹配结果

Fig. 6 The matching results from VBPSM on various data sets

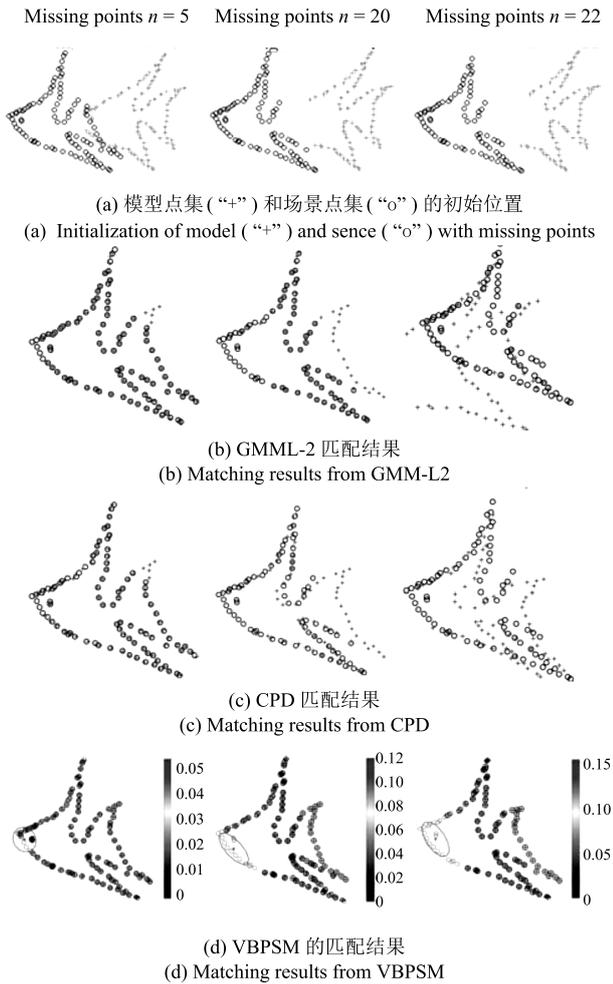


图7 GMM-L2、CPD 和 VBPSM 在含有缺失点数据集上的匹配性能对比

Fig. 7 Performance comparison of GMM-L2, CPD and VBPSM on data with missing points

GMM-L2 和 CPD 两种方法在缺失数据点不超过 20 个时可以正确地两个点集的匹配^[23]。从图 7 中给出的结果可以看出, 本文提出的方法在存在 22 个缺失数据点时, 仍然能够成功地完成对两个数据集的正确匹配。如前所述, VBPSM 方法不易陷入局部最小点的特点主要来自于变分贝叶斯框架下参数的不确定假设和高斯混合模型所具有的灵活性, 从而在缺失数据比较严重的情况下仍然可以达到较好的匹配效果。

4.3 仿射变换对比实验

在本实验中, KC^[21]、GMM-L2^[23]、CPD^[25] 和 VBPSM 四种方法在存在多簇离群点环境下估计 Contour、Fish、Chinese 点集之间的仿射变换。对于每个数据集, 在模型点和场景点中均分别加入了若干离群点簇, 以测试各种方法对多簇离群点数据的鲁棒性。测试数据按照下面的步骤生成: 1) 对

SOI (Shape of interest) 进行随机平移 (Translation)、缩放 (Scaling) 和切变 (Shearing) 变换, 并在 $-30^\circ \sim 30^\circ$ 范围内随机旋转产生场景点目标集; 2) 在场景点中, 以该 SOI 分布的两倍标准差 (Standard deviation, STD) 为半径的圆上随机产生 c 个正态分布的中心, 然后以这些中心为均值按照不同的方差 STD 和离群数据比 (Outlier-to-data ratio) w_2 生成多簇离群点; 3) 在模型点中, 按照离群数据比 w_1 生成分布范围能够覆盖 SOI 的均匀离群点, 以增加点集匹配的难度。

场景点集中离群点的簇数分别是 $c = 3$ 和 $c = 4$, 离群数据比分别是 $w_1 = 0.5$ 和 $w_2 = 1.0$ 。场景点集中, 离群点的 STD 从 0.2 增加到 1.2。每次实验记录真实的变换参数与估计的仿射参数的误差用于性能对比, 对每个 STD 进行 50 次实验, 图 8 给出了四种算法在仿射点集匹配实验中误差的箱型图。从图中可以看出, 本文提出的方法在各个实验中均表现出了良好鲁棒性, 这主要是因为该方法提供了高斯混合模型来估计场景点集中的多簇离群点, 匹配效果要好于简单的均匀分布假设。

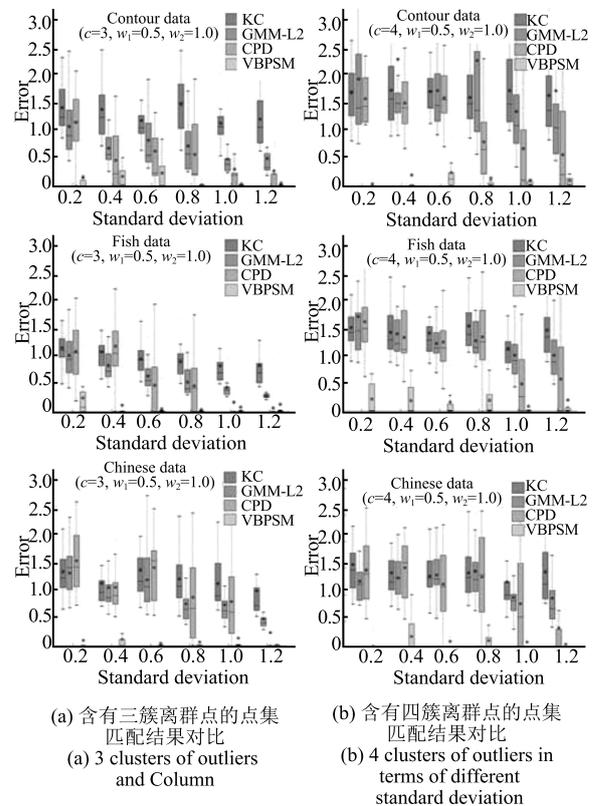


图 8 含有多簇离群点集的仿射变换点集匹配性能对比

Fig. 8 Performance comparison of KC, GMM-L2, CPD and VBPSM on datasets with multiple clusters of outliers

当离群点的标准差逐渐增大后, CPD 算法与 KC 和 GMM-L2 相比较也获得了良好的匹配效果。

这是因为当混合高斯分布的协方差矩阵逐渐增大后, 在离群点比较稀疏的情况下可以近似地看作是均匀分布. 但是, 简单的均匀分布模型无法处理多簇离群点情况, 匹配性能也弱于高斯混合模型.

4.4 非刚体点集匹配实验

在本实验中, GMM-L2^[23]、CPD^[25]、VFC-L2E^[24] 和 VBPSM 四种方法在带有均匀分布和多簇离群点的 Fish 和 Chinese 数据上进行匹配性能对比. 场景点集中的正态分布离群点仍然按照第 4.3 节中的步骤进行设置. 除此之外, 场景点集中还加入了一个可以覆盖 SOI 区域的均匀分布离群点集. 离群数据比从 0.0 增加到 2.0, 并且对每个噪声水平进行 50 次匹配实验.

精度的度量采用的是真阳性对应点占真实对应点的比例. 对于 CPD、GMM-L2 和 VFC-L2E 而言, 如果模型点经过变换后, 与其对应的场景点仍然是最近邻关系, 那么这一对应点就认为是真阳性对应点. 对于 VBPSM 而言, 真阳性对应点可以从指示变量 \mathcal{Z} 直接得到. 非刚体匹配算法性能对比结果如图 9 所示. 在图 9 中, 模型点集和场景点集分别用 “+” 和 “o” 表示. 每个高斯混合分量根据后验混合比例 $q(\pi)$ 的大小用不同灰度级表示. 图 9 表明, 本文提出的方法在几种离群点干扰情况下均获得了比较好的匹配结果.

应该指出的是, CPD、GMM-L2 和 VFC-L2E

三种方法都要求提前对离群数据比有一个比较准确的估计, 否则, 这些方法可能无法达到良好的匹配效果. 一般来说, 在实际应用中很难获得准确的离群数据比, 与此相反, VBPSM 通常只需要对离群点的簇数进行一个大致的估计, 而不需要准确的比例. 本例中, 我们根据经验设定离群点的混合模型分量数为 $K_o = \log(N - K)$, 该假设基本可以满足这些实验的精度需要.

4.5 CMU house 数据匹配

在真实数据匹配实验中, 利用 CMU house¹ 数据集作为评测数据, 进行非刚体点集匹配算法的性能对比. 这一数据集共有 111 张从不同角度拍摄的 CMU house 图像. 每幅图像在房子上的 30 个不同位置进行标识作为已知的对应点. 然后, 分别在模型点集和场景点集中加入均匀分布的离群点, w_1 和 w_2 为两个点集的离群数据比, 它们的值分别设为 0.0、0.2 和 0.5. 实验中, 分别按照 80 和 100 帧间隔 (Frames) 选取图像进行匹配. 匹配性能由 ROC 曲线来度量, 其中真阳性是指模型点经过变换后, 与其对应的最近邻场景点是真实对应点, 那么这一对应点就认为是真阳性对应点. 假阳性对应点是指模型点经过变换后, 与其最近邻的场景点不是与其对应的真实对应点. 利用 GMM-L2、CPD、VFC-L2E 和 VBPSM 四种方法对两个点集进行非刚体匹配, 然后对比匹配性能.

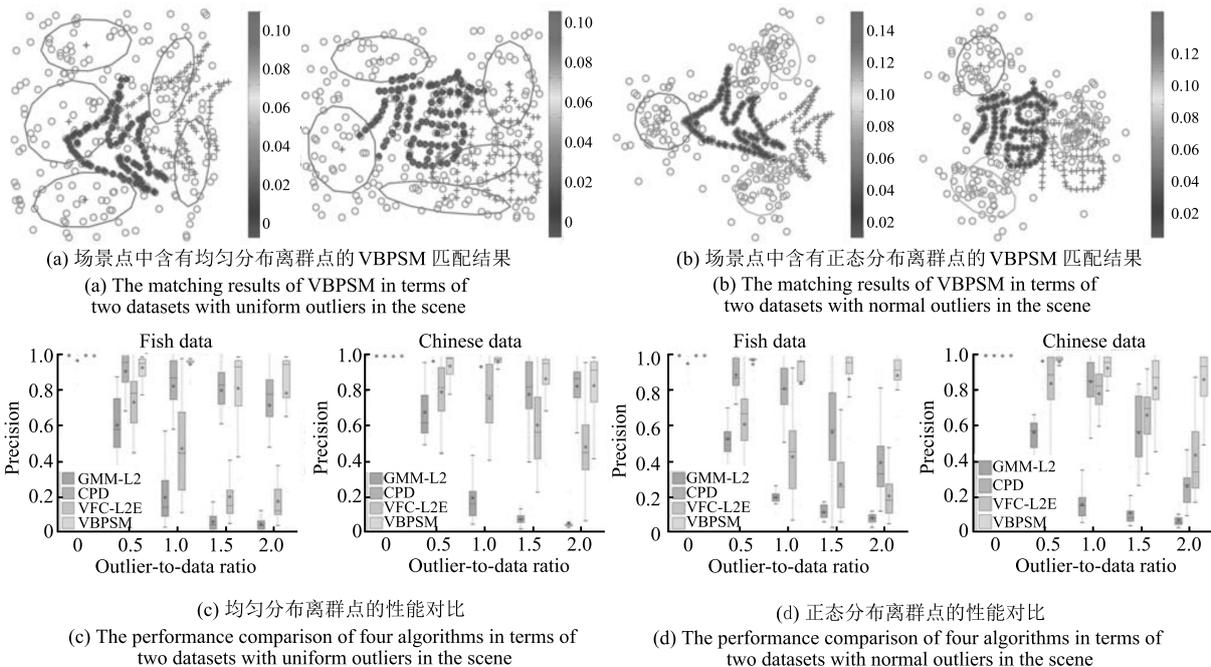


图 9 非刚体匹配算法性能对比结果

Fig. 9 Performance comparison on non-rigid matching problems in terms of different outlier levels

¹<http://vasc.ri.cmu.edu/idb/html/motion/house/index.html>

VBPSM 中的离群点混合模型的分量个数设定为 $\log(N)$, 而其他三种方法中的离群数值比均设定为真实数值. 为公平起见, 四种方法的其他参数均设定为在无离群点环境下能够达到最佳匹配时的参数值. 从图 10 可以看出, 虽然四种方法均可以在无离群点情况下达到很好的匹配精度, 但是当存在离群点干扰时, VBPSM 获得了比其他三种方法更好的匹配结果. 特别是在离群数据比较大时, 这种差异更加明显. 这一实验结果再次表明, 在存在离群点干扰的情况下, 混合模型能够提供比均匀分布更加鲁棒的匹配性能.

图 11 给出了 VBPSM 在 CMU house 数据中的第 2 帧和第 82 帧两幅图像上的匹配示意图. 我们在模型点集和场景点集上分别加入了 50% 的均匀分布离群点, 并且两个点集中的点不存在先验的对应关系. 图 11 (a) 为估计的场景点集相对于转移变量 \mathcal{X} 和离群点混合模型 \mathcal{Y} 的响应矩阵 r_{nk} . 从结果可以看出, 在所有的真实对应点中存在着一个错配情况.

从图 11 (b) 可以看出, 场景点集的离群点会导致转移变量的均值产生偏移, 这也可以从一些转移变量 \mathcal{X} 的各向异性协方差中看出来. 模型点集的离群点经过变换后, 也会在 \mathcal{X} 中得到对应的混合分量. 但是, 这些混合分量的均值将主要由先验均值决定,

并且由于在场景点集中没有对应的点落入到这些分量中, 所以这些分量的后验混合也由先验决定. 图 11 (c) 在两个图上画出了根据转移变量 \mathcal{X} 的变分后验概率得到的真阳性和假阳性对应点. VBPSM 的一个优点就是可以为点与点之间的匹配提供概率模型解释, 而非简单地利用距离阈值来判断两点是否为对应点.

4.6 运动姿态配准

在本节中, 我们在 Swaggar 运动姿态数据集上进行三维空间的点集配准对比实验. Swaggar 数据是由 Ohio 州立大学的设计与艺术计算中心对人体运动姿态采集的三维立体数据². 该实验在人体的不同部位安放了 42 个标识, 共采集了 518 帧人体的 Swaggar 运动姿态, 每一帧数据中记录了这些标识的 XYZ 坐标.

需要指出的是, 在一些相邻的帧中, 因为遮挡的原因存在着标识点缺失的情况, 如图 12 所示. 为了进行点集配准, 分别以 100、150 和 250 帧为间隔, 从数据集中抽取两帧图像的标识点坐标作为模型点集和场景点集. 与第 4.4 节中的实验设计相同, 对四种点集匹配方法进行非刚体点集配准对比实验. 图 12 给出了四个算法的 ROC 曲线.

在 Swaggar 数据集中, 非线性运动姿态主要发

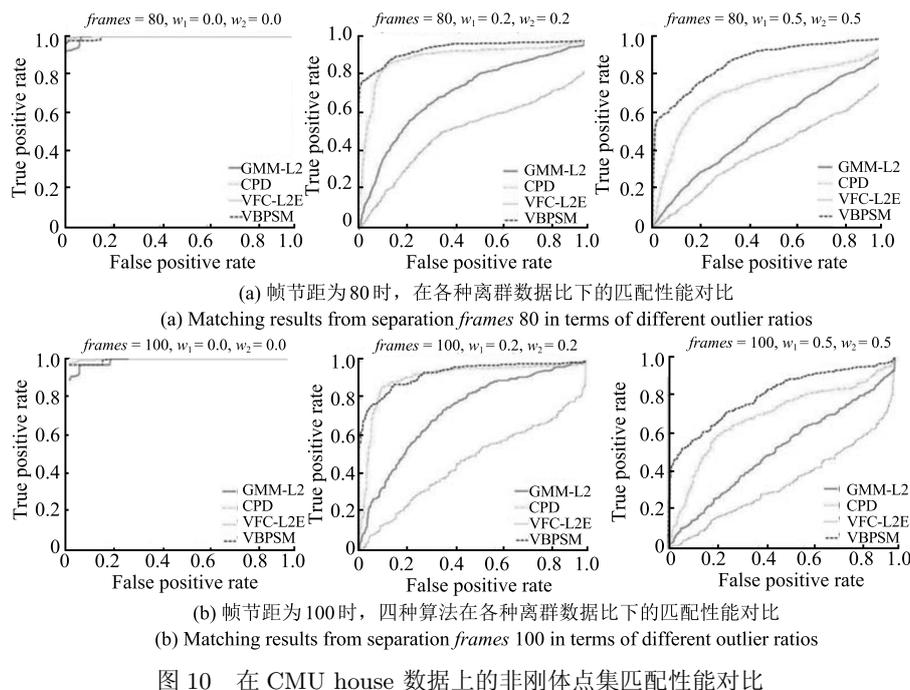


图 10 在 CMU house 数据上的非刚体点集匹配性能对比

Fig. 10 Performance of the non-rigid matching algorithm on the CMU house data

²http://accad.osu.edu/researchmain/research/motion_capture_lab/system_data.html

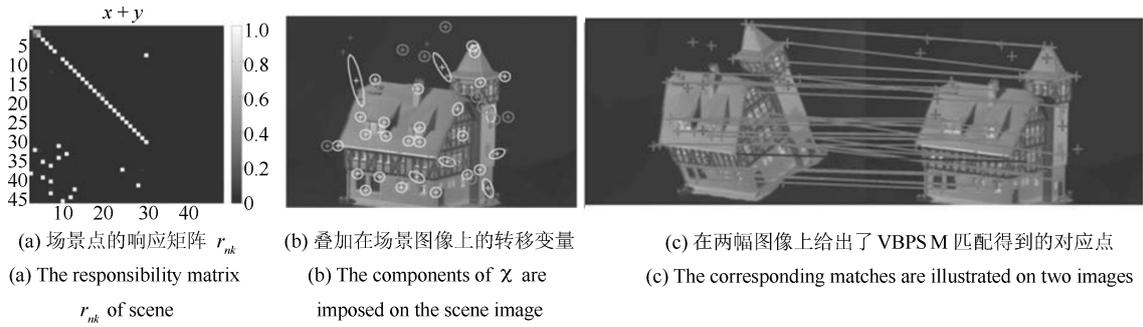


图 11 CMU house 数据中第 2 帧和第 82 帧图像的匹配, 两个点集分别含有 50% 的离群点

Fig. 11 The point set matching between Frames 2 and 82 with 50% outliers in both sets of CMU house sequence data

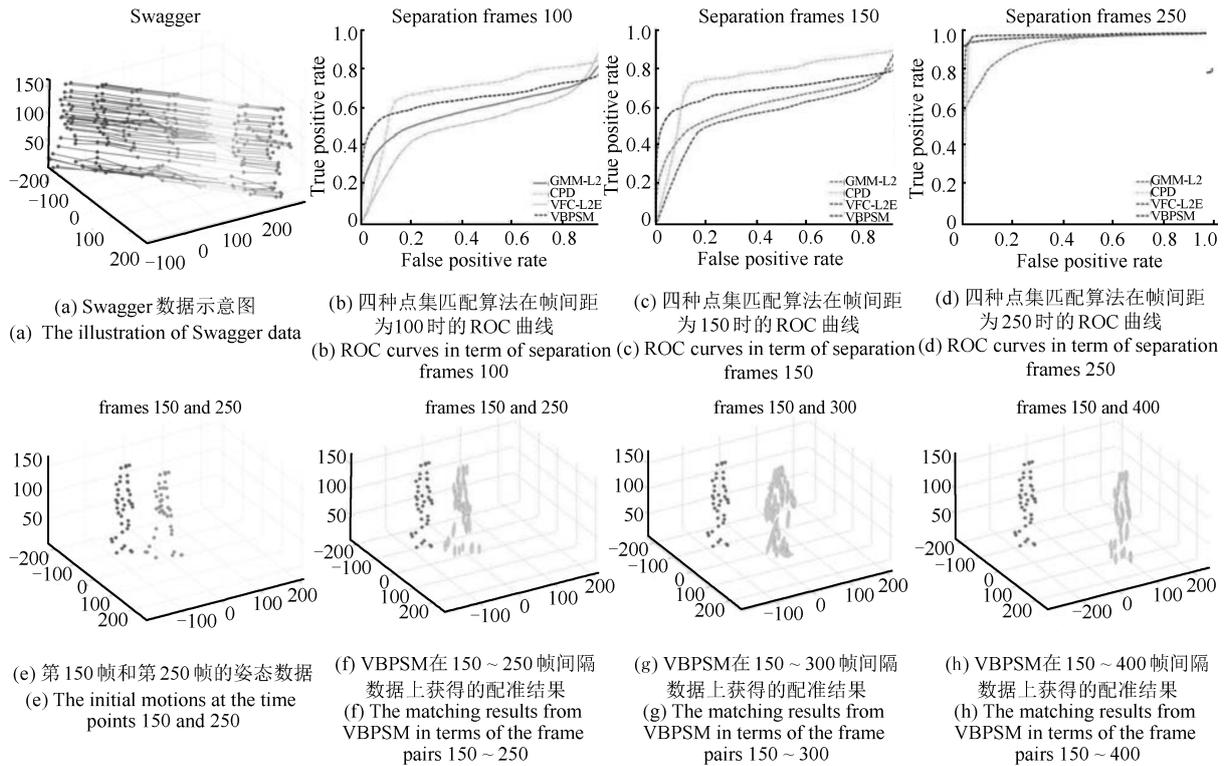


图 12 Swagger 运动姿态数据集上的非刚体配准性能对比实验

Fig. 12 Performance comparison on non-rigid registration in terms of Swagger motion capture data

生在腿部和手臂部位的标识点, 并且捕获的姿态数据中存在着运动周期. 因此, 我们选择三种帧间间隔: 100、150 和 250 来构建模型点集和场景点集. 通过观察图中的 ROC 曲线可以看出, VBPSM 在帧间隔为 250 的实验中获得了最好的配准精度. 而在帧间隔为 100 和 150 的情况下, CPD 和 VBPSM 均获得了较好的配准性能.

表 2 分别给出了四种方法在不同帧间隔情况下 ROC 曲线下的面积 (Area under ROC curve, AUC). 在帧间隔为 100 和 150 时, CPD 的 ROC 曲线下的面积分别是 0.6786 和 0.7460, 而 VBPSM 的

表 2 GMM-L2、CPD、VFC-L2E 和 VBPSM 四种方法在不同帧间间隔下的 ROC 曲线下面积

Table 2 The area under ROC curve (AUC) obtained from GMM-L2, CPD, VFC-L2E and VBPSM in terms of different separation frames

帧间隔	GMM-L2	CPD	VFC-L2E	VBPSM
100	0.5854	0.6786	0.5190	0.6427
150	0.6162	0.7460	0.5678	0.6872
250	0.9131	0.9449	0.9518	0.9672

ROC 曲线下的面积分别是 0.6472 和 0.6872. 虽然 VBPSM 在这两种情况下性能弱于 CPD, 但是 VBPSM 可以提供混合概率分布来描述身体的运动姿态. 图 12 的第 2 行给出了不同帧间间隔的模型点集、场景点集和逼近的后验概率. 可以看出, 几乎所有的场景点都落入到了变分逼近得到的后验概率的 95% 置信区间内.

4.7 空间图像对准

最后, 本文提出的方法应用于 NASA-Johnson 空间中心图像科学与分析实验室所拍摄的两幅地球表面图像的对准. 这两幅图像的内容是从国际空间站上, 在不同的时间点拍摄的圣地亚哥湾的图像, 图像编号分别为 ISS006-E-51977 和 ISS006-E-51981, 这些图像可以从 NASA 的网站公开下载. 首先, 我们利用 SIFT 检测方法从两幅图像中提取出 487 个备选对应点, 在图 13(a) 的图像上叠加了随机选取的一半备选对应点. 在备选对应点中, 大约有 40% 的对应点是噪声. 该例中, 我们利用一个带有 3 个高斯分量的混合模型对回归过程的异方差噪声进行估计.

在变分逼近噪声混合模型的同时, 两幅图像之间的仿射变换参数也可以通过两个特征点集的对应关系估计出来, 并直接应用于两幅图像的对齐. 图 13(b) 和 13(c) 给出了 VBPSM 所估计出的噪声混合模型和两幅照片的配准结果. 从图中可以看出, 高斯混合模型可以很好地估计出对应点中的异方差噪声, 大约有 67.19% 的对应点落入了混合模型中真阳性分量 (No.3) 中. 如前所述, 由 SIFT 建立的先验对应关系将点集匹配过程简化为回归分析问题, 而高斯混合模型则为 VBPSM 在异方差噪声环境中提供了较好的鲁棒性能. 基于以上因素, 本文提出方法在两幅地球空间图像的匹配问题中获得了良好的匹配结果.

5 结论

本文提出的点集匹配概率模型框架的核心是通

过引入转移变量 \mathcal{X} , 将模型点和场景点联系在一起. 如第 4.7 节所分析的那样, 在消除了对应关系不确定性之后, 两个点集之间的匹配问题简化为含有异方差噪声的回归问题. 在这种情况下, 转移变量可以看作是场景点, 并与模型点集中的点之间存在着的一对一的对应关系. 与此相反, 如果不存在模型点集这样的中心先验信息时, 那么点集匹配问题就退化为典型的聚类分析问题. 因此, 本文提出的概率图模型可以看作是一种将点集匹配问题纳入到贝叶斯框架的一种通用的统计模型方法.

应该指出的是, 本文虽然建立了点集匹配的概率模型框架, 但是仍然有几个关键问题需要在未来的工作中进行深入研究. 首先是匹配过程中的超参数 (Hyperparameters) 优化问题. 目前, 这些参数在由粗到精匹配模型中均被假设为固定值. 人们已经针对超参数优化问题作出了一些理论分析工作, 例如基于第二类极大似然估计的先验参数收敛定点迭代优化方法. 这种方法在变分贝叶斯框架下以边缘似然函数为目标函数对先验参数进行优化^[40, 46]. 根据式 (6), 变分自由能量项可以作为目标函数逐个优化边缘似然函数中的超参数. 但是总体来说, 还没有一种方法可以系统性地解决超参数优化问题^[47], 仍然以网格搜索和手动优化方法为主^[48], 还难以满足点集匹配问题的实际需要.

其次是如何在变分贝叶斯模型框架下研究向量场图像的配准问题. 向量场一致性学习方法在图像配准的错配点消除方面体现出了良好的鲁棒性能^[17, 24], 我们可以根据式 (2) 将概率模型中的变换方程重新改写为

$$S - IM = A'M + B\Phi(M) \quad (21)$$

式中, $A = I + A'$. 可以看出, 等式左边正好是模型点集和场景点集对应点之间的向量场. 利用这一公式可以将向量场匹配的参数学习问题纳入变分贝叶斯概率模型框架之下.

在本文中, 我们针对仿射和非刚体匹配问题, 提

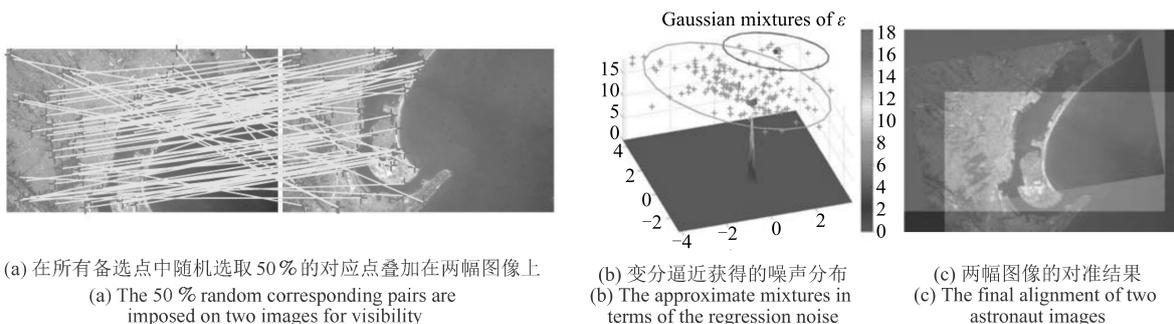


图 13 两幅空间图像配准实验

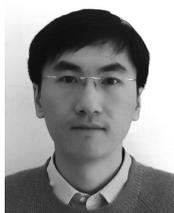
Fig. 13 The illustration of VBPSM in terms of the alignment of two astronaut images

出了一种基于概率图模型的变分贝叶斯点集匹配方法, 将点集匹配问题划分为回归和聚类两个子过程. 该方法还利用高斯混合模型对回归过程中的异方差噪声和聚类过程中的多簇离群点进行建模, 以提升匹配算法的精度和鲁棒性. 除此之外, 还分别给出了转移变量精度矩阵的各向同性和各向异性协方差混合模型, 使得该方法更具有一般性. 在该概率模型框架下, 我们提出了一种基于转移变量精度的先验尺度矩阵的由粗到精变分逼近算法, 以估计映射函数和高斯混合模型的参数. 在仿真数据和真实数据实验中, 该方法与其他点集匹配方法相比, 无论是在匹配精度方面还是在匹配鲁棒性方面均体现了良好的性能.

References

- Caetano T S, Caelli T, Schuurmans D, Barone D. Graphical models and point pattern matching. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, **28**(10): 1646–1663
- Cootes T F, Taylor C J, Cooper D H, Graham J. Active shape models — their training and applications. *Computer Vision and Image Understanding*, 1995, **61**(1): 38–59
- Czogiel I, Dryden I, Brignell C. Bayesian matching of unlabeled marked point sets using random fields with application to molecular alignment. *Annals of Applied Statistics*, 2011, **5**(4): 2603–2629
- Schmidler S C. Fast Bayesian shape matching using geometric algorithms. *Bayesian Statistics*, 2007, **8**: 471–490
- Pilet J, Lepetit V, Fua P. Real-time non-rigid surface detection. In: Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Diego, USA: IEEE, 2005. 822–828
- Simpson I J A, Schnabel J A, Groves A R, Andersson J L R, Woolrich M W. Probabilistic inference of regularisation in non-rigid registration. *NeuroImage*, 2012, **59**(3): 2438–2451
- Gu L, Kanade T. A generative shape regularization model for robust face alignment. In: Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision. Marseille, France: Springer, 2008. 413–426
- Wamelen P B V, Li Z, Iyengar S. A fast expected time algorithm for the 2-D point pattern matching problem. *Pattern Recognition*, 2004, **37**(8): 1699–1711
- Zhou Zhi-Yong, Li Li-Hua, Zheng Jian, Kuai Duo-Jie, Hu Su, Zhang Tao. Point sets non-rigid registration using student's-t mixture model with spatial constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(4): 683–696
(周志勇, 李莉华, 郑健, 蒯多杰, 胡粟, 张涛. 含局部空间约束的 t 分布混合模型点集配准. *自动化学报*, 2014, **40**(4): 683–696)
- Besl P J, McKay N D. A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, **14**(2): 239–256
- Lu C P, Mjolsness E. Two-dimensional object localization by coarse-to-fine correlation matching. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1994, **6**: 985–992
- Zhang Z. Iterative point matching for registration of freeform curves and surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 1994, **13**(2): 119–152
- Lowe D G. Object recognition from local scale-invariant features. In: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision. Kerkyra, Greece: IEEE, 1999, **2**: 1150–1157
- Bay H, Tuytelaars T, van Gool L. SURF: speeded up robust features. In: Proceedings of the 9th European Conference on Computer Vision. Graz, Austria: Springer, 2006. 404–417
- Pachauri D, Kondor R, Singh V. Solving the multiway matching problem by permutation synchronization. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2013, **26**: 1860–1868
- Pizarro D, Bartoli A. Feature-based deformable surface detection with self-occlusion reasoning. *International Journal of Computer Vision*, 2012, **97**(1): 54–70
- Zhao J, Ma J Y, Tian J W, Ma J, Zhang D Z. A robust method for vector field learning with application to mismatch removing. In: Proceedings of the 2011 Computer Vision and Pattern Recognition. Colorado Springs, USA: IEEE, 2011. 2977–2984
- Mardia K V, Nyirongo V B, Fallaize C J, Barber S, Jackson R M. Hierarchical Bayesian modelling of pharmacophores in Bioinformatics. *Biometrics*, 2011, **67**(2): 617–619
- Mardia K V, Fallaize C J, Barber S, Jackson R M, Theobald D L. Bayesian alignment of similarity shapes. *Annals of Applied Statistics*, 2013, **7**(2): 989–1009
- Liu Y. Automatic 3D free form shape matching using the graduated assignment algorithm. *Pattern Recognition*, 2005, **38**(10): 1615–1631
- Tsin T, Kanade T. A correlation-based approach to robust point set registration. In: Proceedings of the 8th European Conference on Computer Vision. Prague, Czech: Springer, 2004. 558–569
- Chui H, Rangarajan A. A new point matching algorithm for non-rigid registration. *Computer Vision and Image Understanding*, 2003, **89**(2–3): 114–141
- Jian B, Vemuri C C. Robust point set registration using Gaussian mixture models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(8): 1633–1645
- Ma J Y, Zhao J, Tian J W, Tu Z W, Yuille A. Robust estimation of nonrigid transformation for point set registration. In: Proceedings of the 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, Ohio, USA: IEEE, 2013. 2147–2154
- Myronenko A, Song X. Point set registration: coherent point drift. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2010, **32**(12): 2262–2275
- Horaur R P, Forbes F, Yguel M, Dewaele G D, Zhang J. Rigid and articulated point registration with expectation conditional maximization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, **33**(3): 587–602
- Almhdie A, Léger C, Deriche M, Lédée R. 3D registration using a new implementation of the ICP algorithm based on a comprehensive lookup matrix: application to medical imaging. *Pattern Recognition Letters*, 2007, **28**(12): 1523–1533
- Dorai C, Wang G, Jain A, Mercer C. From images to models: automatic 3D object model construction from multiple views. In: Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition. Vienna, Austria: IEEE, 1996. 770–774
- Hahnel D, Thrun S, Burgard W. An extension of the ICP algorithm for modelling nonrigid objects with mobile robots. In: Proceedings of the 18th International Conference on Artificial Intelligence. Acapulco, Mexico: Morgan Kaufmann, 2003. 915–920
- Liu Y. Automatic registration of overlapping 3D point clouds using closest points. *Image and Vision Computing*, 2006, **24**(7): 762–781
- Chui H, Rangarajan A. A feature registration framework using mixture models. In: Proceedings of the 2000 IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis. Hilton Head Island, USA: IEEE, 2000. 190–197

- 32 Hou S, Galata A. Robust estimation of Gaussian mixtures from noisy input data. In: Proceedings of the 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2008. 1–8
- 33 Govindu V M, Werman M. On using priors in affine matching. *Image and Vision Computing*, 2004, **22**(14): 1157–1164
- 34 Hastie T J, Tibshirani R J. *Generalized Additive Models*. London, UK: Chapman and Hall, 1990.
- 35 D'Souza A, Vijayakumar S, Schaal S. The Bayesian backfitting relevance vector machine. In: Proceedings of the 21st International Conference on Machine Learning. Banff, Alberta, Canada: ACM, 2004. 31
- 36 Hu B G, Qu H B, Wang Y, Yang S H. A generalized-constraint neural network model: associating partially known relationships for nonlinear regression. *Information Sciences*, 2009, **179**(12): 1929–1943
- 37 Qu H B, Hu B G. Variational Bayes inference for generalized associative functional networks. In: Proceedings of the 2007 International Joint Conference on Neural Networks. Orlando, FL, USA: IEEE, 2007. 184–189
- 38 Roberts S J, Penny W D. Variational Bayes for generalized autoregressive models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(9): 2245–2257
- 39 Bishop C M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Spring Street, NY: Springer, 2006.
- 40 Beal M J. Variational Algorithms for Approximate Bayesian Inference [Ph.D. dissertation], University of Cambridge, UK, 2003.
- 41 MacKay D J C. Bayesian non-linear modeling for the prediction competition. *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, 1996, **62**: 221–234
- 42 Lawrence N D, Bishop C M. Variational Bayesian Independent Component Analysis. Technical Report, Computer Laboratory, University of Cambridge, UK, 2000.
- 43 Beal M, Ghahramani Z. The variational Bayesian EM algorithm for incomplete data: with application to scoring graphical model structures. *Bayesian Statistics*, 2003, **7**: 453–464
- 44 Choudrey R A. Variational Methods for Bayesian Independent Component Analysis [Ph.D. dissertation], University of Oxford, UK, 2002.
- 45 Hensman J, Rattray M, Lawrence N. Fast variational inference in the conjugate exponential family. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2012, **25**: 2897–2905
- 46 Valpola H, Honkela A. Hyperparameter Adaptation in Variational Bayes for the Gamma Distribution. Technical Report, Laboratory of Computer and Information Science, Helsinki University of Technology, FI, 2006.
- 47 Kaji D, Watanabe S. Two design methods of hyperparameters in variational Bayes learning for Bernoulli mixtures. *Neuralcomputing*, 2011, **74**(11): 2002–2007
- 48 Bergstra J B, Bengio Y. Random search for hyperparameter optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 2012, **13**(1): 281–305



曲寒冰 北京市新技术应用研究所副研究员。2003 年于哈尔滨工业大学获得硕士学位, 2007 年于中国科学院自动化研究所获得博士学位。中国自动化学会智能自动化专业委员会委员, IEEE 会员。主要研究方向为机器学习, 计算机视觉, 生物特征识别。本文通信作者。
E-mail: quhanbing@gmail.com

(**QU Han-Bing** Ph.D., associate professor at Beijing Institute of New Technology Applications. He received his master and Ph.D. degrees from Harbin Institute of Technology (HIT) and Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences (CASIA) in 2003 and 2007, respectively. He is also a committee member of Intelligent Automation Committee of Chinese Association of Automation (IACAA), member of IEEE. His research interest covers machine learning, computer vision, pattern recognition, and biometrics. Corresponding author of this paper.)



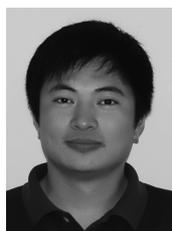
王加强 北京市科学技术研究院模式识别重点实验室助理研究员, 河北工业大学微电子学与固体电子学专业博士研究生。2005 年和 2008 年分别获得山东理工大学学士和工学硕士。主要研究方向为图像处理, 计算机视觉, 模式识别和生物识别。
E-mail: wangjq.bj@gmail.com

(**WANG Jia-Qiang** Research assistant at the Key Laboratory of Pattern Recognition, Beijing Academy of Science and Technology (BJAST), and Ph.D. candidate at the School of Electronic and Information Engineering, Hebei University of Technology. He received his bachelor and master degrees from Shandong University of Technology (SDUT) in 2005 and 2008, respectively. His research interest covers image processing, computer vision, pattern recognition, and biometrics.)



李彬 博士, 北京市新技术应用研究所副研究员。2000 年获得哈尔滨工业大学学士学位, 2006 年获得哈尔滨工业大学工学博士学位。主要研究方向为信号处理, 模式识别, 生物识别。
E-mail: lbn@hit.edu.cn

(**LI Bin** Ph.D., associate professor at Beijing Institute of New Technology Applications. He received his master and Ph.D. degrees in computer science from Harbin Institute of Technology (HIT) in 2000 and 2006, respectively. His research interest covers signal processing, pattern recognition, and biometrics.)



王松涛 哈尔滨理工大学博士研究生, 北京市新技术应用研究所助理研究员。2009 年获得哈尔滨理工大学硕士学位。主要研究方向为模式识别, 计算机视觉, 显著性检测在监控场景的应用。
E-mail: wangsongtao1983@163.com

(**WANG Song-Tao** Ph.D. candidate at Harbin University of Science and Technology, research assistant at the Key Laboratory of Pattern Recognition, Beijing Academy of Science and Technology. He received his master degree from Harbin University Of Science and Technology (HUST) in 2009. His research interest covers pattern recognition and computer vision, especially the visual saliency detection in surveillance scenarios.)