带一步随机延迟量测非线性序列贝叶斯估计的条件后验克拉美罗下界

张勇刚 [1]　　黄玉龙 [1]　　李 宁 [1]　　赵 琳 [1]

摘 要 为了解决带一步随机延迟量测非线性状态估计器可获得最优性能的评价问题, 提出了一种适用于带一步随机延迟量测非线性系统的条件后验克拉美罗下界 (Conditional posterior Cramér-Rao lower bound, CPCRLB), 且现有的 CPCRLB 仅是所提出的 CPCRLB 在延迟概率为零时的一种特例. 为了递归地计算提出的 CPCRLB, 本文提出了一种带一步随机延迟量测的粒子滤波器 (Particle filter, PF), 继而推导了提出的 CPCRLB 一般近似解和在高斯噪声情况下的特殊近似解. 单变量非平稳增长模型、纯方位跟踪和频率调制信号模型的数值仿真证明了本文提出方法与现有方法相比的有效性和优越性.

关键词 条件克拉美罗下界, 一步随机延迟量测, 粒子滤波器, 非线性滤波, 贝叶斯估计

引用格式 张勇刚, 黄玉龙, 李宁, 赵琳. 带一步随机延迟量测非线性序列贝叶斯估计的条件后验克拉美罗下界. 自动化学报, 2015, **41**(3): 559−574

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140391

Conditional Posterior Cramér-Rao Lower Bound for Nonlinear Sequential Bayesian Estimation with One-step Randomly Delayed Measurements

ZHANG Yong-Gang[1]　　HUANG Yu-Long[1]　　LI Ning[1]　　ZHAO Lin[1]

Abstract In order to solve the problem of assessing the achievable optimal performance of nonlinear state estimator with one-step randomly delayed measurements, a new conditional posterior Cramér-Rao lower bound (CPCRLB) for nonlinear systems with one-step randomly delayed measurements is proposed. The existing CPCRLB is only a special case of the proposed CPCRLB when the latency probability is zero. In order to calculate the proposed CPCRLB recursively, a new particle filter (PF) with one-step randomly delayed measurements is proposed, based on which a general approximate formulation and a special approximate formulation for Gaussian noises case of the proposed CPCRLB are developed. The effectiveness and superiority of the proposed method as compared with the existing methods are illustrated in numerical examples concerning univariate non-stationary growth model, bearings-only tracking and frequency modulated signal model.

Key words Conditional posterior Cramér-Rao lower bound (CPCRLB), one-step randomly delayed measurements, particle filter (PF), nonlinear filtering, Bayesian estimation

Citation Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Li Ning, Zhao Lin. Conditional posterior Cramér-Rao lower bound for nonlinear sequential Bayesian estimation with one-step randomly delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(3): 559−574

非线性滤波已经被广泛地应用在自动控制、信号处理、目标跟踪和通信中. 通常可以利用贝叶斯估计理论来处理非线性滤波问题, 通过计算状态的后验概率密度函数, 贝叶斯估计理论为动态状态估计问题提供了一个最优解[1]. 但由于贝叶斯估计中包含的多维积分一般无法解析求解, 从而导致无法设计最优的非线性状态估计器. 为了完成非线性随机动态系统的状态估计任务, 必须使用近似的方法获得次优的非线性滤波器. 基于不同的数值近似方法, 目前已经提出了许多次优的非线性滤波器, 包括基于三阶球径容积准则的容积卡尔曼滤波器[1]、基于五阶球径容积准则的高阶容积卡尔曼滤波器[2]、基于高阶无迹准则的高阶无迹卡尔曼滤波器[3]、基

收稿日期 2014-05-29　录用日期 2014-09-27
Manuscript received May 29, 2014; accepted September 27, 2014
国家自然科学基金 (61001154, 61201409, 61371173), 中国博士后科学基金 (2013M530147, 2014T70309), 黑龙江省博士后基金 (LBH-Z13052, LBH-TZ0505), 哈尔滨工程大学中央高校基本科研业务费专项基金 (HEUCFX41307) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61001154, 61201409, 61371173), China Postdoctoral Science Foundation (2013M530147, 2014T70309), Heilongjiang Postdoctoral Fund (LBH-Z13052, LBH-TZ0505), and Fundamental Research Funds for the Central Universities of Harbin Engineering University (HEUCFX41307)
本文责任编委 夏元清
Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing
1. 哈尔滨工程大学自动化学院 哈尔滨 150001
1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001

于稀疏网格理论的稀疏网格求积滤波器[4]、基于随机积分准则的随机积分滤波器[5]、基于三阶嵌入式容积准则的嵌入式容积卡尔曼滤波器[6]、基于球面单径准则的球面单径容积卡尔曼滤波器[7]、基于极大似然准则和最大期望算法的自适应无迹卡尔曼滤波器[8]、基于变换的无迹准则的变换无迹卡尔曼滤波器[9]、基于随机采样方法的粒子滤波器[10].

为了从理论上评价非线性状态估计器可获得的最优性能, Tichavsky 等提出了后验克拉美罗下界 (Posterior Cramér-Rao lower bound, PCRLB)[11]. PCRLB 为非线性随机动态系统的状态估计问题提供了一个最优性能极限, 因此它可以用于确定性能需求是否能够实现[11]. 因为 Tichavsky 提出的 PCRLB 将所有的量测都当作随机量, 并且它独立于从初始时刻到当前时刻的所有量测, 所以它只是一个离线的性能边界[12−14]. 因此对于一个特定的非线性随机动态系统它不能如实地反映非线性滤波性能, 从而它不能用于非线性动态系统自适应资源管理[12−14]. 为了解决这个问题, Zuo 提出了条件后验克拉美罗下界 (Conditional posterior Cramér-Rao lower bound, CPCRLB), CPCRLB 为基于从初始时刻到当前时刻所有量测的状态估计的条件均方误差提供了一个下界, 即它为即将来临的量测提供了一个估计性能极限的预测, 因此它可以用于自适应管理非线性系统资源, 比如基于传感器网络的目标跟踪应用中的传感器管理问题[14]. 但是 Zuo 等提出的方法需要计算辅助的 Fisher 信息矩阵, 并且存在大的累积误差. 为了提高 CPCRLB 的计算效率和计算精度, Zheng 等提出了一种新的 CPCRLB[13].

以上这些非线性近似滤波器和 CPCRLB 的计算都假设量测能实时到达数据处理中心. 但是, 在很多工程应用中, 比如目标跟踪应用, 由于通信信道带宽有限, 它们的量测可能会发生随机延迟[15−16]. 为了解决带随机延迟量测非线性系统状态估计问题, Hermoso-Carazo 等提出了适用于带一步或两步随机延迟量测非线性系统的改进扩展卡尔曼滤波器和改进无迹卡尔曼滤波器[17−18]; Wang 等提出了一种适用于带一步随机延迟量测的非线性系统高斯近似滤波器和平滑器[19−20]. 但是带一步随机延迟量测非线性状态估计器可获得最优性能的评价问题还没有被解决. 为了解决这个问题, 本文提出了一种适用于带一步随机延迟量测非线性系统的条件后验克拉美罗下界 (CPCRLB), 并且文献 [12−13] 中提出的 CPCRLB 仅是本文提出的 CPCRLB 在延迟概率为零时的一种特例. 为了递归地计算提出的 CPCRLB, 本文提出了一种带一步随机延迟量测的粒子滤波器, 并基于提出的粒子滤波器推导了提出的 CPCRLB 一般近似解和在高斯噪声情况下的特殊近似解. 单变量非平稳增长模型、纯方位跟踪和频率调制信号模型的数值仿真证明了本文提出方法与现有方法相比的有效性和优越性.

1 带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB

考虑如下以状态空间模型形式给出的离散时间非线性随机系统[19]:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{w}_k \tag{1}$$

它的一步随机延迟量测模型:

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = \boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \boldsymbol{v}_{k+1} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = (1-\gamma_{k+1})\boldsymbol{z}_{k+1} + \gamma_{k+1}\boldsymbol{z}_k \tag{3}$$

其中, k 表示离散时间序列, $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\boldsymbol{z}_k \in \mathbf{R}^m$ 是理想的量测向量, $\boldsymbol{y}_k \in \mathbf{R}^m$ 是实际的量测输出向量 (或随机延迟量测向量), $\boldsymbol{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 是独立的白噪声过程, $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 具有任意的概率分布. γ_{k+1} 是以已知概率取 0 或 1 的 Bernoulli 随机变量, 其中 $p(\gamma_{k+1}=1)=\theta_{k+1}$ 被称为延迟概率, 它表示 $k+1$ 时刻的实际量测输出为一步延迟量测 $\boldsymbol{z}_k$ 的概率. 本文假设 $\boldsymbol{x}_0$, $\{\boldsymbol{w}_k\}$, $\{\boldsymbol{v}_k\}$, $\{\gamma_k\}$ 是相互独立的. 接下来本文将基于模型 (1) ∼ (3) 提出一种适用于带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB.

注 1. 式 (3) 表示一步随机延迟量测模型, 它与文献 [21−22] 中的随机丢包模型存在如下的区别. 一步随机延迟量测模型中的 Bernoulli 随机变量 γ_{k+1} 用于建模量测的一步随机延迟, 而随机丢包模型中的 Bernoulli 随机变量 γ_{k+1} 用于建模量测的随机丢失. 在文献 [21] 的随机丢包模型中, 当 $\gamma_{k+1}=0$ 时, 量测噪声的概率密度函数 $p(\boldsymbol{v}_{k+1}) = \mathrm{N}(\boldsymbol{v}_{k+1}; \mathbf{0}, R_{k+1})$, 并且 $R_{k+1} \to +\infty$, 这表示量测噪声无穷大, 即量测发生丢失; 反之, $\gamma_{k+1}=1$ 表示量测噪声有限, 即量测未发生丢失[21]. 在文献 [22] 的随机丢包模型 $\boldsymbol{z}_{k+1} = \gamma_{k+1}\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \boldsymbol{v}_{k+1}$ 中, 当 $\gamma_{k+1}=0$ 时, 实际的量测输出 $\boldsymbol{z}_{k+1}=\boldsymbol{v}_{k+1}$ 表示量测中只包含噪声而不包含待估计状态信息, 即量测发生丢失; 反之, $\gamma_{k+1}=1$ 表示量测中包含待估计状态信息, 即量测未发生丢失[22]. 在本文的一步随机延迟量测模型中, 当 $\gamma_{k+1}=1$ 时, 实际的量测输出 $\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{z}_k$ 表示量测 $\boldsymbol{z}_k$ 并未发生丢失, 而是由于网络传输原因, 在 $k+1$ 时刻才到达, 即量测发生一步延迟; 反之, $\gamma_{k+1}=0$ 意味着实际的量测输出 $\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{z}_{k+1}$, 即量测准时到达, 未发生延迟. 一步随机延迟量测模型 (3) 已经被广泛地应用于带一步随机延迟量测的工程应用中, 比如目标跟踪应

用[15−16], GPS/INS 组合导航应用[19]、未来一代飞机管理应用[23].

虽然 Zuo 等在文献 [12, 14] 中给出了标准的 CPCRLB 和条件 Fisher 信息矩阵的定义, 但是这些定义不适用于随机延迟量测情况. 为此, 本文将给出带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB 和条件 Fisher 信息矩阵的定义.

定义 1. 条件估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为在给定现有随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{1:k}$ 条件下当前时刻随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 的函数. 它的均方误差为

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) := \mathrm{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{y}_{1:k}\} = \int \tilde{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}^{\mathrm{T}} p_{k+1}^{c} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1} \tag{4}$$

其中, 估计误差 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{0:k+1} := \hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1} - \boldsymbol{x}_{0:k+1}$, $p_{k+1}^{c} := p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}, \boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$.

定义 2. 状态向量 $\boldsymbol{x}_{0:k+1}$ 的带一步随机延迟量测条件 Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为

$$I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) := \mathrm{E}\{-\left[\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}} \ln p_{k+1}^{c}\right]|\boldsymbol{y}_{1:k}\} = -\int \left[\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}} \ln p_{k+1}^{c}\right] p_{k+1}^{c} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1} \tag{5}$$

式中, Δ 表示二阶导数算子, 即 $\Delta_a^b = \nabla_a \nabla_b^{\mathrm{T}}$, 其中 ∇ 表示梯度算子.

与文献 [12, 14] 类似, 基于定义 1 和 2, 我们可以给出带一步随机延迟量测非线性系统的条件后验克拉美罗下界不等式, 即状态向量 $\boldsymbol{x}_{0:k+1}$ 的条件均方误差 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 不小于带一步随机延迟量测非线性系统的条件 Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 的逆, 表示如下[12, 14]:

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \geq I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \tag{6}$$

式 (6) 表示 $\{\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) - I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\}$ 是半正定的, 在附录中, 我们给出了该不等式的详细证明. 为了帮助读者更好地理解式 (6) 中定义的条件后验克拉美罗下界不等式, 我们给出如下的定性说明:

定义 1 中的 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 表征了对于任意一种带一步随机延迟量测的滤波估计算法, 其从 0 到 $k+1$ 时刻所有估计值与真实值之间的 $(k+2)n \times (k+2)n$ 阶条件均方误差矩阵. 定义 2 中的 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为条件 Fisher 信息矩阵, 是真实的状态后验概率密度的函数, 其逆表征了由真实的状态后验概率密度函数所获得的状态估计的条件均方误差矩阵. 对于带一步随机延迟量测的非线性系统, 由于它的滤波估计算法本质上是对真实的状态后验概率密度的估计和近似, 所以 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 总是大于 $I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$, 如式 (6) 所示.

定义 3. $L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为估计状态向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的带一步随机延迟量测条件 Fisher 信息矩阵, 它的逆 $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 等于 $I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 的右下 $n \times n$ 的分块矩阵.

注 2. 首先, 定义 3 中给出的 $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为在给定随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{1:k}$ 条件下, 状态向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 估计的 $n \times n$ 阶 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 矩阵的下界, 即 $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 为带一步随机延迟量测非线性系统在 $k+1$ 时刻的 CPCRLB. 其次, 从式 (4) 和 (5) 中可以知道, 定义 1～3 中定义的条件均方误差矩阵 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$、条件 Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 和 CPCRLB $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 都是从 1 到 k 时刻所有延迟量测 $\boldsymbol{y}_{1:k}$ 的函数, 但是与 $k+1$ 时刻的延迟量测 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 无关 (注意在积分 (4) 和 (5) 中, $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 为积分变量, 所以在最后的积分结果中不会含有 $\boldsymbol{y}_{k+1}$), 这意味着它们都是基于特定系统实现的在线性能指标, 一旦获得从 1 到 k 时刻所有延迟量测 $\boldsymbol{y}_{1:k}$, 它们将具有确定的数值. 因而当 k 时刻的滤波结束时, 基于已经获得的延迟量测 $\boldsymbol{y}_{1:k}$, 并利用方程 (4) 和 (5) 以及定义 3, 我们可以计算得到带一步随机延迟量测非线性系统的 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$、$I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 和在 $k+1$ 时刻的 CPCRLB. 最后, 我们可以利用得到的 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 和 $I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 对状态 $\boldsymbol{x}_{0:k+1}$ 的估计精度和可获得的最优估计性能做出评价, 同时 CPCRLB 可以用来对 $k+1$ 时刻系统可获得的最优估计性能做出预测和评价. 此外, 以上定义的 CPCRLB 性能指标可以用于自适应管理带一步随机延迟量测非线性系统资源, 比如在基于传感器网络的目标跟踪应用中, 我们可以利用获得的 CPCRLB 确定 k 时刻的传感器网络部署是否能够满足 $k+1$ 时刻的性能需求, 即确定是否需要重新对传感器网络进行部署, 从而实现传感器网络的自适应管理.

虽然基于定义 2 和 3 可以计算出 $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$, 但是它涉及到计算大矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$, 不利于在线计算, 因此本文将提出一种在线迭代的方法来近似计算 $L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$.

定理 1. 带一步随机延迟量测非线性系统的条件 Fisher 信息矩阵 $L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 可以近似计算如下:

$$L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \approx B_k^{22} - B_k^{21}[B_k^{11} + L(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})]^{-1} B_k^{12} \tag{7}$$

其中

$$B_k^{11}=\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k}[\ln p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)+\ln p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)]\}\tag{8}$$

$$B_k^{12}=\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_{k+1}}[\ln p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)+\ln p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)]\}=(B_k^{21})^{\mathrm{T}}\tag{9}$$

$$B_k^{22}=\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\boldsymbol{x}_{k+1}}[\ln p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)+\ln p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)]\}\tag{10}$$

证明. 根据定义 2, 带一步随机延迟量测非线性系统的条件 Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k-1})$ 可以分解为

$$I(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k-1})=\mathrm{E}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k}}^{\boldsymbol{x}_{0:k}}\ln p_k^c\}=\begin{bmatrix}\mathrm{E}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c\} & \mathrm{E}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c\}\\ \mathrm{E}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c\} & \mathrm{E}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c\}\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}O_k & P_k\\ P_k^{\mathrm{T}} & U_k\end{bmatrix}\tag{11}$$

其中, $p_k^c=p(\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})$. 利用矩阵逆公式[24], 可以得到 $I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k-1})$ 右下分块矩阵的逆, 即估计状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的带一步随机延迟量测条件 Fisher 信息矩阵:

$$L(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})=U_k-P_k^{\mathrm{T}}O_k^{-1}P_k\tag{12}$$

根据定义 2, 带一步随机延迟量测的条件 Fisher 信息矩阵 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 可以分解为

$$I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\mathrm{E}\left\{-\begin{bmatrix}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}} & \Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_k} & \Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{k+1}}\\ \Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}} & \Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} & \Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_{k+1}}\\ \Delta_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}} & \Delta_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\boldsymbol{x}_k} & \Delta_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\boldsymbol{x}_{k+1}}\end{bmatrix}\ln p_{k+1}^c\right\}\tag{13}$$

根据贝叶斯准则, 并利用一步随机延迟量测模型 (2) 和 (3), p_{k+1}^c 可以分解为

$$\begin{aligned}p_{k+1}^c&=p(\boldsymbol{y}_{k+1},\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\\ &p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k+1},\boldsymbol{y}_{1:k})p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\\ &p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\\ &p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\frac{p(\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})}\end{aligned}\tag{14}$$

从而

$$\ln p_{k+1}^c=\ln p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)+\ln p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)+\ln p_k^c-\ln p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})\tag{15}$$

将式 (15) 代入到式 (13), 可以得到:

$$I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\begin{bmatrix}-\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c & -\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c & 0\\ -\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c & -\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c+B_k^{11} & B_k^{12}\\ 0 & B_k^{21} & B_k^{22}\end{bmatrix}\tag{16}$$

其中, B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22} 已经在式 (8) ∼ (10) 中定义. 因为 $I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 的左上分块矩阵是随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_k$ 的函数, 所以我们可以利用关于 $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})$ 的期望来近似它[12−13], 即

$$\begin{aligned}&-\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c\approx\\ &\quad-\mathrm{E}_{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})}\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c=\\ &\quad-\mathrm{E}_{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})}\mathrm{E}_{p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c=\\ &\quad-\mathrm{E}_{p_k^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}\ln p_k^c=O_k\end{aligned}\tag{17}$$

同理, 可以得到:

$$-\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_{0:k-1}}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c\approx P_k-\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k}\ln p_k^c\approx U_k\tag{18}$$

将式 (17) 和 (18) 代入到式 (16), 得到:

$$I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\approx\begin{bmatrix}O_k & P_k & 0\\ P_k^{\mathrm{T}} & U_k+B_k^{11} & B_k^{12}\\ 0 & B_k^{21} & B_k^{22}\end{bmatrix}$$

利用矩阵逆公式[24], 可以得到 $I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k-1})$ 右下分块矩阵的逆, 即估计状态向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的带一步随机延迟量测的条件 Fisher 信息矩阵

$$\begin{aligned}&L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\approx\\ &B_k^{22}-[0\ B_k^{21}]\begin{bmatrix}O_k & P_k\\ P_k^T & U_k+B_k^{11}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ B_k^{12}\end{bmatrix}=\\ &B_k^{22}-B_k^{21}[B_k^{11}+(U_k-P_k^TO_k^{-1}P_k)]^{-1}B_k^{12}=\\ &B_k^{22}-B_k^{21}[B_k^{11}+L(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k-1})]^{-1}B_k^{12}\end{aligned}\tag{19}$$

□

为了推导 $L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 的递归计算式, 本文采用与文献 [12−14] 相同的近似方法给出了式 (17) 和 (18) 中的三个近似. 虽然这些近似可能会导致累积误差, 并且从理论上很难对这些累积的近似误差进行分析, 但是这些近似对于完成 $L(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 的解析计算是必须的, 且文献 [12 − 14] 的数值仿真表明这种近似方法是合理的.

注 3. 当延迟概率 $\theta_{k+1}=0$ 时, 即 $p(\gamma_{k+1}=0)\equiv 1$, 此时从式 (3) 中可以知道 $\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{z}_{k+1}$, 并且

有 $p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)=p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1})$, 从而定理 1 中的 CPCRLB 与文献 [12−14] 中的 CPCRLB 等价. 因此文献 [12 − 14] 中提出的标准 CPCRLB 仅是本文提出的 CPCRLB 在延迟概率 $\theta_{k+1}=0$ 时的一种特例.

2 带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB 粒子滤波器解

在第 1 节中, 我们提出了一种递归计算带一步随机延迟量测条件 Fisher 信息矩阵的近似方法, 它的递归实施需要实时计算 B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22}. 直接计算这些矩阵需要计算多个高维积分, 并且在一般情况下, 不能解析地求解这些高维积分. 因此, 接下来本文将首先提出一种适用于带一步随机延迟量测非线性系统的粒子滤波器, 然后基于提出的粒子滤波器提出一种带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB 粒子滤波器解.

2.1 带一步随机延迟量测的粒子滤波器

通过使用重要性采样方法和选择建议密度函数 $q(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})$, 后验概率密度函数可以近似为[10]

$$p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})\approx\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_{k+1}^i\delta[\boldsymbol{x}_{0:k+1}-\boldsymbol{x}_{0:k+1}^i] \tag{20}$$

其中, $\delta(\cdot)$ 表示 Kronecker$-\delta$ 函数, 独立同分布的样本 $\boldsymbol{x}_{0:k+1}^i$ 是从建议密度函数 $q(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})$ 中随机抽取的, 其相应的重要性权值和归一化的重要性权值表示如下[10]:

$$w_{k+1}^i=\frac{p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}^i,\boldsymbol{y}_{1:k+1})}{q(\boldsymbol{x}_{0:k+1}^i|\boldsymbol{y}_{1:k+1})},\qquad \bar{w}_{k+1}^i=\frac{w_{k+1}^i}{\sum\limits_{i=1}^{N}w_{k+1}^i} \tag{21}$$

为了减少计算负担, 我们将使用序列重要性采样方法来在线计算后验概率密度函数. 根据贝叶斯准则, 可以得到:

$$\begin{aligned}&q(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})=\\&\quad q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})\approx\\&\quad q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})\end{aligned} \tag{22}$$

这里我们假设 $q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})\approx q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})$. 因此, 样本 $\boldsymbol{x}_{k+1}^i$,$\boldsymbol{x}_{0:k}^i$ 可以分别地从 $q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})$, $q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 中随机抽取. 根据贝叶斯准则和状态的一阶马尔科夫性质, 可以得到:

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{x}_{0:k+1},\boldsymbol{y}_{1:k+1})=\\&\quad p(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{k+1},\boldsymbol{y}_{1:k})=\\&\quad p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k})p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k})\\&\quad p(\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k})=\\&\quad p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k})\end{aligned} \tag{23}$$

将式 (22) ∼ (23) 代入到式 (21), 重要性权值可以重新表示为

$$\begin{aligned}&w_{k+1}=\frac{p(\boldsymbol{x}_{0:k+1},\boldsymbol{y}_{1:k+1})}{q(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})}=\\&\quad\frac{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})}\frac{p(\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k})}{q(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})}=\\&\quad\frac{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})}w_k\end{aligned} \tag{24}$$

注意式 (24) 中的重要性权值更新与传统粒子滤波器的权值更新不同, 因为当延迟发生时实际的量测输出 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 可能为 $\boldsymbol{z}_k$, 因此它可能与 k 时刻的状态向量相关. 考虑到 γ_{k+1} 独立于状态向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$, $\boldsymbol{x}_k$, 并利用一步随机延迟量测方程 (2) 和 (3), 可以计算似然密度函数如下:

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)=\\&\quad\int p(\boldsymbol{y}_{k+1},\gamma_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\gamma_{k+1}=\\&\quad\int p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\gamma_{k+1},\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)p(\gamma_{k+1})\mathrm{d}\gamma_{k+1}=\\&\quad(1-\theta_{k+1})p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\gamma_{k+1}=0,\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)+\\&\quad\theta_{k+1}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\gamma_{k+1}=1,\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)=\\&\quad(1-\theta_{k+1})p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}))+\\&\quad\theta_{k+1}p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))\end{aligned} \tag{25}$$

其中, $p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\cdot)$ 和 $p_{\boldsymbol{v}_k}(\cdot)$ 分别表示量测噪声 $\boldsymbol{v}_{k+1}$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 的概率密度函数. 因此, 重要性权值 w_{k+1}^i 的递归计算式可以表示为

$$w_{k+1}^i=\frac{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i,\boldsymbol{x}_k^i)p(\boldsymbol{x}_{k+1}^i|\boldsymbol{x}_k^i)}{q(\boldsymbol{x}_{k+1}^i|\boldsymbol{x}_{0:k}^i,\boldsymbol{y}_{1:k+1})}w_k^i \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i,\boldsymbol{x}_k^i)=(1-\theta_{k+1})p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\\&\quad\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}^i))+\theta_{k+1}p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k^i))\end{aligned} \tag{27}$$

为了实施提出的粒子滤波方法, 状态转移密度被选作为建议密度函数, 即

$$q(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{0:k},\boldsymbol{y}_{1:k+1})=p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k) \tag{28}$$

使用采样重要性重采样方法来避免粒子退化, 即 $w_k^i = 1/N$, 进而重要性权值 w_{k+1}^i 的递归表达式可以重新写为

$$w_{k+1}^i = \frac{1}{N}[(1-\theta_{k+1})p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1} - \boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}^i)) + \theta_{k+1}p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1} - \boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k^i))] \tag{29}$$

从而, 基于式 (20) 和 (21), 式 (28) 和 (29), 可以得到带一步随机延迟量测的粒子滤波器.

2.2 近似计算带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB

从式 (8) ~ (10) 中不难发现 B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22} 都是关于密度函数 p_{k+1}^c 的多维积分, 因此必须先基于第 2.1 节提出的带一步随机延迟量测粒子滤波器推导出 p_{k+1}^c 的近似值. 根据贝叶斯准则, 并利用式 (20), (21), (26), (28), 可以将 p_{k+1}^c 分解为

$$p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}, \boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) = p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k+1})p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i, \boldsymbol{x}_k^i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i, \boldsymbol{x}_k^i)} \delta[\boldsymbol{x}_{0:k+1} - \boldsymbol{x}_{0:k+1}^i] \times p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \tag{30}$$

从式 (30) 中可以看到, 为了近似计算密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}, \boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$, 必须先计算随机延迟量测的一步预测密度 $p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$. 根据贝叶斯准则, 可得:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) &= \iint p(\boldsymbol{y}_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k = \\ &\iint p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_{1:k}) p(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k = \\ &\iint p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k) p(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k \end{aligned} \tag{31}$$

根据贝叶斯准则和状态的一阶马尔科夫性质, 可以得到:

$$p(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) = p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) \tag{32}$$

从而可以将 $p(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 近似为

$$p(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k}) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta[\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_{k+1}^i]\delta[\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^i] \tag{33}$$

其中, $\boldsymbol{x}_k^i \sim p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_{1:k})$, $\boldsymbol{x}_{k+1}^i \sim p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k^i)$. 将式 (33) 代入式 (31), 可以得到:

$$p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i, \boldsymbol{x}_k^i) \tag{34}$$

将式 (34) 代入式 (30), 可以得到:

$$p_{k+1}^c \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1}^i, \boldsymbol{x}_k^i)\delta[\boldsymbol{x}_{0:k+1} - \boldsymbol{x}_{0:k+1}^i] \tag{35}$$

接下来我们将推导带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB 的一般近似解和在高斯噪声情况下的特殊近似解.

2.2.1 带一步随机延迟量测非线性系统 CPCRLB 的一般近似解

对于任意的非线性非高斯系统, B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22} 可以近似计算如下.

1) $B_k^{11} = B_k^{11,a} + B_k^{11,b}$. 从式 (8) 中可以得到:

$$\begin{aligned} B_k^{11,a} &= \mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\{-\Delta_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} \ln p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\} = \\ &\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\left\{\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p^2(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)} - \frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}\right\} \end{aligned} \tag{36}$$

考虑到 $\frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}$ 与随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 无关, 并利用贝叶斯准则, 可以得到:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\left\{\frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}\right\} = \\ &\mathrm{E}_{p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})}\left\{\frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}\right\} = \\ &\iint p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1} = \\ &\int \left[\int \triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\right] p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k} = \\ &\int \triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} \left[\int p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\right] p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k} \end{aligned} \tag{37}$$

利用概率密度函数的性质, 可以得到:

$$\int p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1} = 1 \tag{38}$$

将式 (38) 代入式 (37) 得到:

$$\mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\left\{\frac{\triangle_{\boldsymbol{x}_k}^{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}\right\} = 0 \tag{39}$$

将式 (39) 代入式 (36), 并利用式 (35), 可以得到:

$$B_k^{11,a} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_{1,a}(\boldsymbol{x}_k^i, \boldsymbol{x}_{k+1}^i) \tag{40}$$

其中

$$g_{1,a}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})=\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p^2(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)} \tag{41}$$

接下来, 我们计算 $B_k^{11,b}$, 从式 (8) 可以得到:

$$B_k^{11,b}=\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}\{-\Delta^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}\ln p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\}= \mathrm{E}_{p^c_{k+1}}\Big\{\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p^2(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}- \frac{\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\Big\} \tag{42}$$

根据贝叶斯准则, 可以得到:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}\Big\{\frac{\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\Big\}=\\ &\iint p^c_{k+1}\frac{\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}=\\ &\iint p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}=\\ &\int\Big[\int\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}\Big]\times\\ &p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}=\\ &\int\triangle^{\boldsymbol{x}_k}_{\boldsymbol{x}_k}\Big[\int p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}\Big]\times\\ &p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}=0\end{aligned} \tag{43}$$

将式 (43) 代入式 (42), 并利用式 (35), 可以得到:

$$B_k^{11,b}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_{1,b}(\boldsymbol{x}^i_k,\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \tag{44}$$

其中

$$g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})= \int\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1} \tag{45}$$

同理可以近似计算 B_k^{12}, B_k^{22} 如下:

2) $B_k^{12}=B_k^{12,a}+B_k^{12,b}$

$$B_k^{12,a}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_{2,a}(\boldsymbol{x}^i_k,\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \tag{46}$$

$$B_k^{12,b}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_{2,b}(\boldsymbol{x}^i_k,\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \tag{47}$$

其中

$$g_{2,a}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})=\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p^2(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)} \tag{48}$$

$$g_{2,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})= \int\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_k}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1} \tag{49}$$

3) $B_k^{22}=B_k^{22,a}+B_k^{22,b}$

$$B_k^{22,a}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_{3,a}(\boldsymbol{x}^i_k,\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \tag{50}$$

$$B_k^{22,b}\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_{3,b}(\boldsymbol{x}^i_k,\boldsymbol{x}^i_{k+1}) \tag{51}$$

其中

$$g_{3,a}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})=\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)}{p^2(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)} \tag{52}$$

$$g_{3,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})= \int\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{k+1}}p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1} \tag{53}$$

结合式 (40)、(41), (44) ∼ (53) 可以近似计算出 B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22}. 当式 (45), (49), (53) 中的积分无法解析求解时, 我们可以采用数值积分方法来近似它们, 比如随机蒙特卡罗方法. 考虑到在大部分工程应用中, 模型 (1) 和 (2) 中的系统噪声和量测噪声都为高斯噪声, 因此接下来本文将推导带一步随机延迟量测非线性系统 CPCRLB 在高斯噪声情况下的特殊近似解.

2.2.2　带一步随机延迟量测非线性系统 CPCRLB 在高斯噪声情况下的特殊近似解

当系统噪声 $\boldsymbol{w}_k\sim\mathrm{N}(0,Q_k)$ 时, 状态一步转移密度 $p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)$ 可以表示为

$$p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)=\frac{1}{\sqrt{|2\pi Q_k|}}\times \exp\Big\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]\Big\} \tag{54}$$

其中, $|\cdot|$ 表示矩阵的行列式. 从而可以得到

$p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)$ 关于 $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的偏导数:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k) = p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)] \tag{55}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}} p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k) = -p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)Q_k^{-1}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)] \tag{56}$$

将式 (39), (55) 代入式 (36), 并利用贝叶斯准则, 可以得到:

$$\begin{aligned}B_k^{11,a} = {} & \mathrm{E}_{p_{k+1}^c}\{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]\times\\ & [\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}\} = \\ & \mathrm{E}_{p(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})}\{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]\times\\ & [\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}Q_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}\} = \\ & \int[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}\{\int[\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)][\boldsymbol{x}_{k+1}-\\ & \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}p(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{x}_k)\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k+1}\}Q_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}\times\\ & p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k} = \\ & \int[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k}\approx\\ & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}\}|_{\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_k^i}\end{aligned} \tag{57}$$

同理可以得到 $B_k^{12,a}$,$B_k^{22,a}$,

$$B_k^{12,a} \approx -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k)]Q_k^{-1}\}|_{\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_k^i} \tag{58}$$

$$B_k^{22,a} = Q_k^{-1} \tag{59}$$

当量测噪声 $\boldsymbol{v}_k \sim \mathrm{N}(0,R_k)$ 时, 可以得到:

$$\begin{aligned}& p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})) = \\ & \quad \frac{1}{\sqrt{|2\pi R_{k+1}|}}\exp\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]^{\mathrm{T}}\times\\ & \quad R_{k+1}^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]\}\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}& p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi R_k|}}\times\\ & \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}R_k^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]\right\}\end{aligned} \tag{61}$$

利用式 (25), (60), (61) 可以得到 $p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)$ 关于 $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的偏导数如下:

$$\begin{aligned}& \nabla_{\boldsymbol{x}_k} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k) = \theta_{k+1}p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))\times\\ & \quad [\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]R_k^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}& \nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}} p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k) = (1-\theta_{k+1})p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\\ & \quad \boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}))[\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]R_{k+1}^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\\ & \quad \boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]\end{aligned} \tag{63}$$

将式 (62) 代入式 (45), 可以得到:

$$\begin{aligned}& g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) = \theta_{k+1}^2\int p_{\boldsymbol{v}_k}^2(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))\times\\ & \frac{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]R_k^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}\times\\ & R_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}\end{aligned} \tag{64}$$

因为式 (64) 可以看作为一个关于密度 $p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))$ 的多维高斯加权积分, 所以可以采用数值方法来近似计算 $g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$, 比如随机蒙特卡罗方法. 利用随机蒙特卡罗方法, 可以近似计算 $g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$ 如下:

$$g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) \approx \theta_{k+1}^2\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}s_1(\boldsymbol{y}_{k+1}^l,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) \tag{65}$$

其中, $\boldsymbol{y}_{k+1}^l \sim p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))$.

$$\begin{aligned}& s_1(\boldsymbol{y}_{k+1},\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) = p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))\times\\ & \frac{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]R_k^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)][\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]^{\mathrm{T}}}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\times\\ & R_k^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]\end{aligned} \tag{66}$$

同理可以得到 $g_{2,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$ 和 $g_{3,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$:

$$\begin{aligned}& g_{2,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) \approx \\ & \quad \theta_{k+1}(1-\theta_{k+1})\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}s_2(\boldsymbol{y}_{k+1}^l,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}& g_{3,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) \approx \\ & \quad (1-\theta_{k+1})^2\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}s_3(\boldsymbol{y}_{k+1}^l,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})\end{aligned} \tag{68}$$

其中, $\boldsymbol{y}_{k+1}^l \sim p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}))$.

$$\begin{aligned}& s_2(\boldsymbol{y}_{k+1},\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) = p_{\boldsymbol{v}_k}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k))\times\\ & \quad \frac{[\nabla_{\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]R_k^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_k(\boldsymbol{x}_k)]}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\\ & \quad \boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]\end{aligned} \tag{69}$$

$$s_3(\boldsymbol{y}_{k+1},\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1}) = p_{\boldsymbol{v}_{k+1}}(\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1}))\times$$

$$\frac{[\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]R_{k+1}^{-1}[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]}{p(\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_k)}\times$$
$$[\boldsymbol{y}_{k+1}-\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})]^{\mathrm{T}}R_{k+1}^{-1}[\nabla_{\boldsymbol{x}_{k+1}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_{k+1}(\boldsymbol{x}_{k+1})] \tag{70}$$

通过结合式 (44), (47), (51), (57) ~ (59), (65) ~ (70) 可以获得 B_k^{11}, B_k^{12}, B_k^{22} 在高斯噪声情况下基于随机蒙特卡罗方法的近似计算值.

注 4. 因为在高斯噪声情况下, 式 (45), (49), (53) 都可以看作是多维高斯加权积分, 所以除了随机蒙特卡罗方法我们也可以采用高斯积分准则来计算这些积分, 比如高斯埃尔米特求积准则[25]、容积准则[1−2, 4, 6−7]、变换的无迹准则[9]、随机积分准则[5] 来近似计算 $g_{1,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$, $g_{2,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$, $g_{3,b}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k+1})$. 随机蒙特卡罗方法可以处理任意非线性积分, 但是它需要大量的随机样本点, 计算效率低; 高斯积分准则不能处理强非线性积分, 但是它需要的样本点小于随机蒙特卡罗方法, 计算效率高. 因此当用户要求高的计算效率, 并且量测函数非线性度低时, 此时高斯准则比随机蒙特卡罗方法更适合用于计算这些高斯加权积分; 反之, 随机蒙特卡罗方法更合适.

3 仿真

本节将通过单变量非平稳增长模型、纯方位跟踪和频率调制信号模型的数值仿真来验证所提出方法的有效性和优越性. 与文献 [12−13] 一样, 在本节的数值仿真中, 我们将选择条件均方误差作为性能参照来比较本文提出方法与现有方法, 仿真的条件均方误差按照如下方式进行计算. 首先在 k 时刻, 使用本文提出的带一步随机延迟量测粒子滤波器来计算后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:k}|\boldsymbol{y}_{1:k})$; 然后根据式 (2) 和 (3) 产生 1 000 个独立的随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{k+1}$ 实现; 最后基于 k 时刻计算的后验概率密度函数和 1 000 个独立的随机延迟量测实现得到需要的条件均方误差 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$[12−13].

3.1 单变量非平稳增长模型

单变量非平稳增长模型具有强非线性和双峰性, 并且它已经被广泛地用作一个标准问题来验证滤波器的性能, 它的系统方程和量测方程可以表示如下[12−13]:

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_{k-1}+0.1\frac{\boldsymbol{x}_{k-1}}{1+\boldsymbol{x}_{k-1}^2}+8\cos(1.2k)+\boldsymbol{w}_{k-1} \tag{71}$$

$$\boldsymbol{z}_k=\frac{\boldsymbol{x}_k^2}{20}+\boldsymbol{v}_k \tag{72}$$

其中, 初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 是均值为 0、方差为 100 的高斯随机变量, 加性噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是独立的白噪声过程. 仿真时间为 20 s, 现有方法和本文提出方法使用的粒子数 $N=100$. 我们采用随机蒙特卡罗方法来计算式 (45), (49), (53) 中的非线性积分, 其中使用的样本点数为 100. 在本节中, 我们将通过如下 3 种仿真来验证本文提出方法的有效性和优越性.

仿真 1. 在仿真 1 中, 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 都是均值为 0、方差为 1 的高斯噪声. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1}=0$, $\theta_{k+1}=0.5$, $\theta_{k+1}=1$ 情况下的仿真结果如图 1 ~ 3 所示.

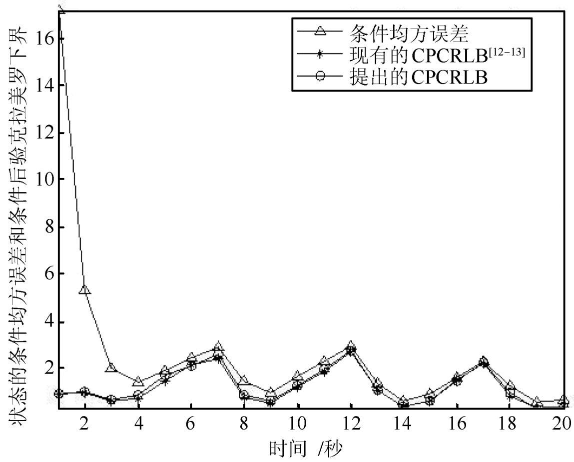


图 1 对于高斯的系统噪声和高斯的量测噪声, 当延迟概率为 0 时, 条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 1 Simulation results of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0 for Gaussian process and measurement noises

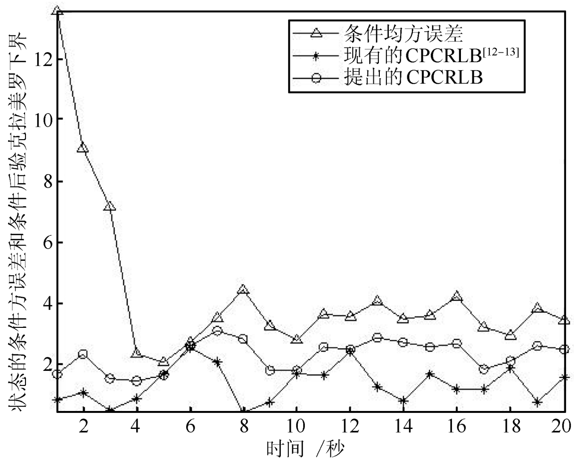


图 2 对于高斯的系统噪声和高斯的量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 2 Simulation results of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process and measurement noises

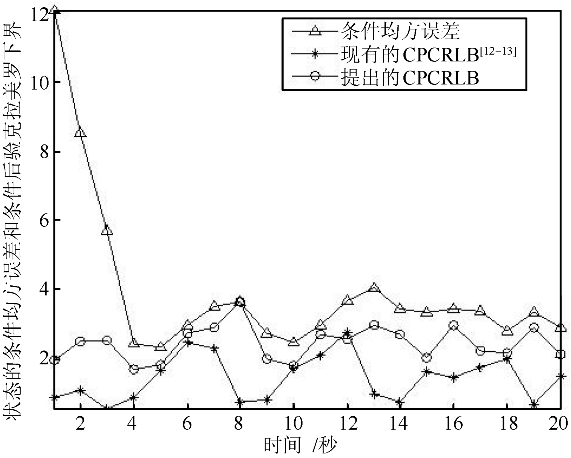


图 3 对于高斯的系统噪声和高斯的量测噪声, 当延迟概率为 1 时, 条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 3 Simulation results of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 1 for Gaussian process and measurement noises

仿真 2. 在仿真 2 中, 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 是均值为 0、方差为 1 的高斯噪声, 量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 服从指数分布, 其分布参数 $\lambda_v = 1$. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 4 所示.

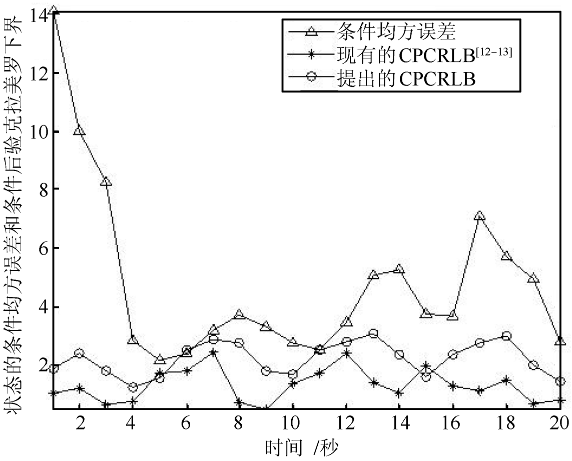


图 4 对于高斯的系统噪声和具有指数分布的量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 4 Simulation results of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process noise and measurement noise with exponential distribution

仿真 3. 在仿真 3 中, 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 都服从指数分布, 它们的分布参数都是 $\lambda_w = \lambda_v = 1$. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 5 所示.

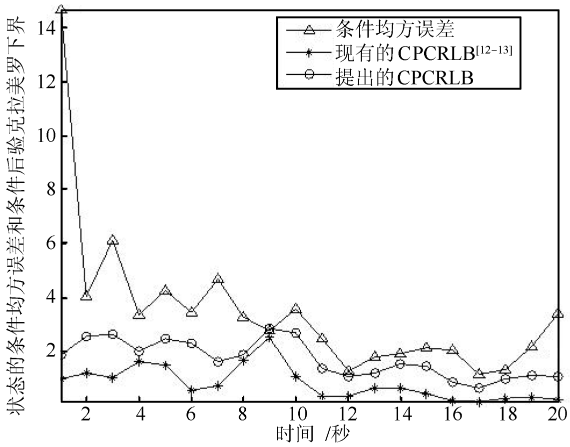


图 5 对于具有指数分布的系统噪声和量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 5 Simulation results of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for process and measurement noises with exponential distributions

从图 1 中可以看到当延迟概率为 0 时, 本文提出的 CPCRLB 与现有的 CPCRLB 都能准确地跟踪条件均方误差, 并且它们具有一样的性能. 此外从图 2～5 中可以看到, 无论噪声是高斯的还是非高斯的, 本文提出的 CPCRLB 都比现有的 CPCRLB 能更好地跟踪条件均方误差. 因此现有的 CPCRLB 仅是本文提出的 CPCRLB 在延迟概率为 0 时的一种特例, 并且提出的 CPCRLB 比现有的 CPCRLB 更适合用于对带一步随机延迟量测非线性滤波器可获得最优性能的评价.

3.2 纯方位跟踪

纯方位跟踪模型为二维非线性模型, 其离散模型如下[26−27]:

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{w}_{k-1} \tag{73}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \tan^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{2,k} - 5\sin(k)}{\boldsymbol{x}_{1,k} - 5\cos(k)}\right) + \boldsymbol{v}_k \tag{74}$$

其中, 状态 $\boldsymbol{x}_k = [\boldsymbol{x}_{1,k} \quad \boldsymbol{x}_{2,k}]^{\mathrm{T}} = [s \quad t]^{\mathrm{T}}$, 表示 s-t 平面内 (笛卡尔坐标系) 的位置, 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是独立的白噪声过程. 初始状态真实值 $\boldsymbol{x}_0 = [20 \quad 5]^{\mathrm{T}}$, 初始协方差阵 $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 仿真时间为 20 s, 现有方法和本文提出方法使用的粒子数 $N = 100$. 我们采用随机蒙特卡罗方法来计算式 (45), (49), (53) 中的非线性积分, 其中使用的样本点数为 500. 考虑到在多维情况下条件均方误

差 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$ 和 CPCRLB 都将是多维矩阵, 因此我们将通过比较条件均方误差和 CPCRLB 的对角元素来比较现有方法和本文提出的方法的性能. 状态向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 的第 i 个元素 $\boldsymbol{x}_{k+1}(i)$ 的条件均方误差和 CPCRLB 分别定义为 $\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})(i,i)$ 和 $L^{-1}(\boldsymbol{x}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})(i,i)$. 在本节中, 我们将通过如下 2 种仿真来验证本文提出方法的有效性和优越性.

仿真 4. 在仿真 4 中, 我们将在高斯噪声和小系统不确定性情况下比较现有方法和本文提出的方法. 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 是均值为 0、方差为 $Q_k = 10^{-3}\begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$ 的高斯噪声, 量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是均值为 0 方差为 $R_k = 0.001$ 的高斯噪声. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 6 和 7 所示.

仿真 5. 在仿真 5 中, 我们将在非高斯量测噪声和大系统不确定性情况下比较现有方法和本文提出的方法. 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 是均值为 0、方差为 $Q_k = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.15 \\ 0.15 & 0.3 \end{pmatrix}$ 的高斯噪声, 量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 服从指数分布, 其分布参数 $\lambda_v = 10\sqrt{10}$. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 8 和 9 所示.

从图 6～7 中可以看到, 在高斯噪声和小系统不确定性情况下, 现有的 CPCRLB 在某些时刻大于条件均方误差, 因此它不再能作为滤波极限性能的

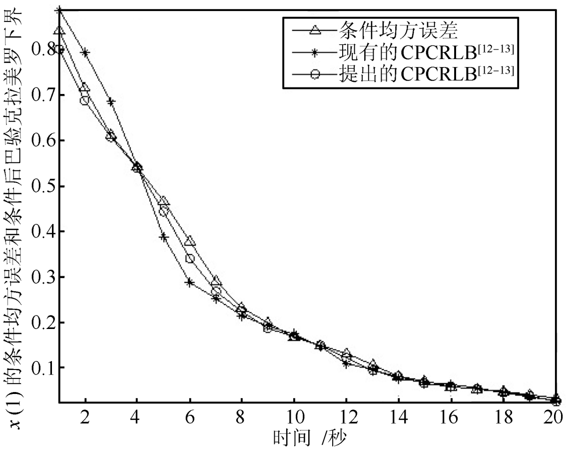


图 6　对于高斯的系统噪声和量测噪声和小系统不确定性, 当延迟概率为 0.5 时, 状态 $x(1)$ 的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 6　Simulation results of $x(1)$ of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process and measurement noises and small process uncertainty

评价标准, 而本文提出的 CPCRLB 一直小于条件均方误差, 并且能准确地跟踪条件均方误差; 从图 8 和 9 中可以看到, 在非高斯量测噪声和大系统不确定性情况下, 本文提出的 CPCRLB 都比现有的 CPCRLB 能更好地跟踪条件均方误差. 因此本文提出的 CPCRLB 比现有的 CPCRLB 更适合用于对带一步随机延迟量测非线性滤波器可获得的最优性能的评价.

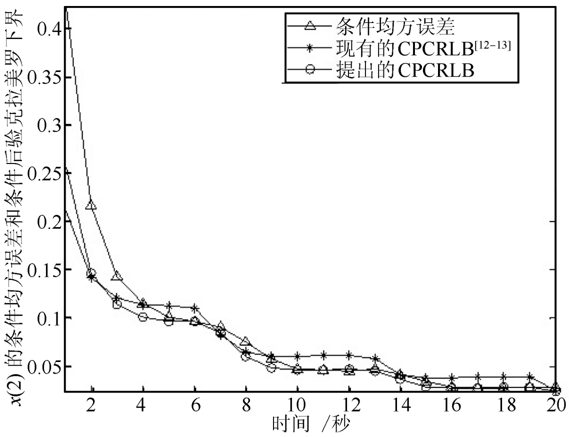


图 7　对于高斯的系统噪声和量测噪声和小系统不确定性, 当延迟概率为 0.5 时, 状态 $x(2)$ 的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 7　Simulation results of $x(2)$ of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process and measurement noises and small process uncertainty

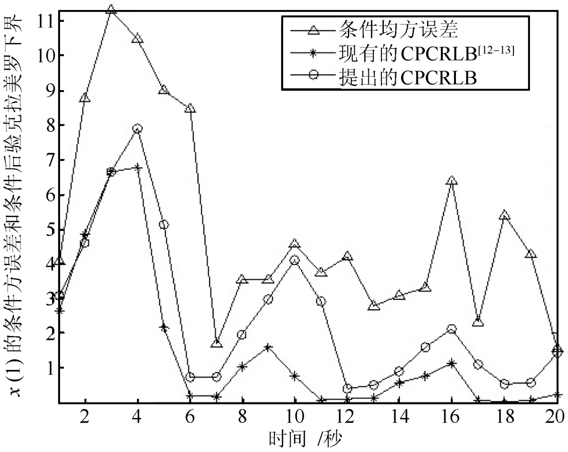


图 8　对于高斯的系统噪声和具有指数分布的量测噪声和大系统不确定性, 当延迟概率为 0.5 时, 状态 $x(1)$ 的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 8　Simulation results of $x(1)$ of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process noise and measurement noise with exponential distribution and large process uncertainty

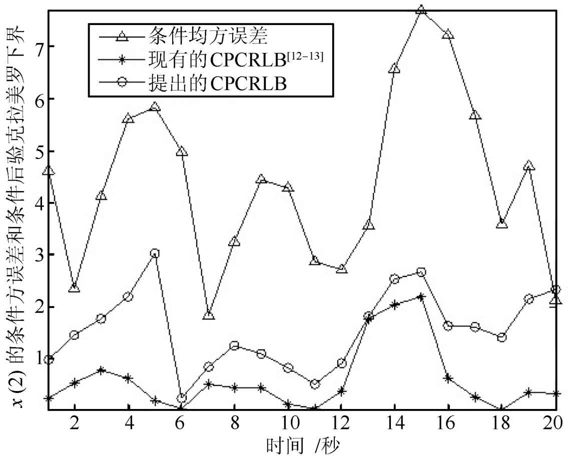


图 9 对于高斯的系统噪声和具有指数分布的量测噪声和大系统不确定性, 当延迟概率为 0.5 时, 状态 $x(2)$ 的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 9 Simulation results of $x(2)$ of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process noise and measurement noise with exponential distribution and large process uncertainty

3.3 频率调制信号模型

频率调制信号模型已经在非线性状态估计中被广泛地研究, 它的离散模型如下[28−29]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{k+1} \\ \boldsymbol{\varphi}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\boldsymbol{\omega}_k \\ \arctan(\lambda\boldsymbol{\varphi}_{k+1} + \boldsymbol{\omega}_k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{w}_k \quad (75)$$

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\varphi}_k \\ \sin\boldsymbol{\varphi}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{v}_k \quad (76)$$

其中, 参数 $\mu = 0.9$, $\lambda = 0.99$, 状态向量 $\boldsymbol{x}_k := [\boldsymbol{\omega}_k \quad \boldsymbol{\varphi}_k]^{\rm T}$, $\boldsymbol{\omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_k$ 分别表示信号的频率和相位, 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是独立的白噪声过程. 初始状态真实值 $\boldsymbol{x}_0 = [0.1 \quad 0.1]^{\rm T}$, 初始协方差阵 $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. 仿真时间为 20 s, 现有方法和本文提出方法使用的粒子数 $N = 200$. 我们采用随机蒙特卡罗方法来计算式 (45), (49), (53) 中的非线性积分, 其中使用的样本点数为 500. 在本节仿真中, 我们采用与第 3.2 节纯方位跟踪仿真相同的方法来比较现有方法和本文提出的方法的性能. 在本节仿真中, 我们将通过如下 3 种仿真来验证本文提出方法的有效性和优越性.

仿真 6. 在仿真 6 中, 我们将在高斯噪声情况下比较现有方法和本文提出的方法. 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 是均值为 0、方差为 $Q_k = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的高斯噪声, 量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 是均值为 0、方差为 $R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的高斯噪声. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 10 和 11 所示.

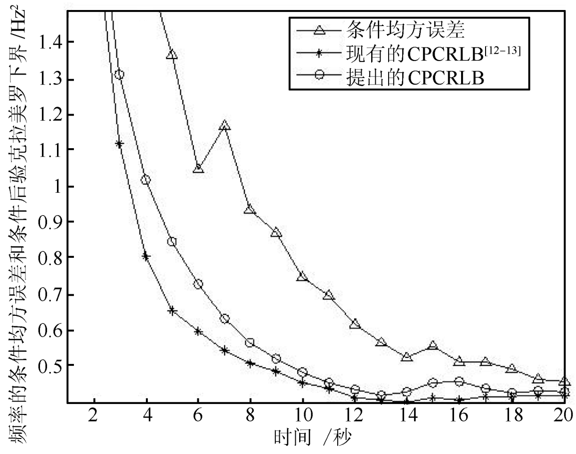


图 10 对于高斯的系统噪声和量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 频率的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 10 Simulation results of frequency of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process and measurement noises

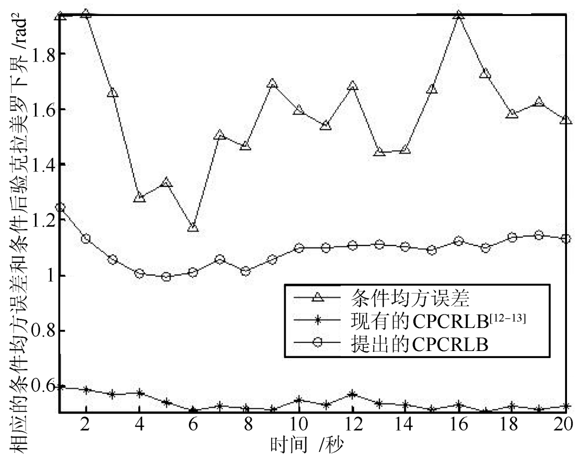


图 11 对于高斯的系统噪声和量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 相位的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 11 Simulation results of phase of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process and measurement noises

仿真 7. 在仿真 7 中, 我们将在非高斯量测噪声情况下比较现有方法和本文提出的方法. 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 是均值为 0、方差为 $Q_k = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的高

斯噪声, 量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 服从指数分布, 其分布参数 $\lambda_v = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 12 和 13 所示.

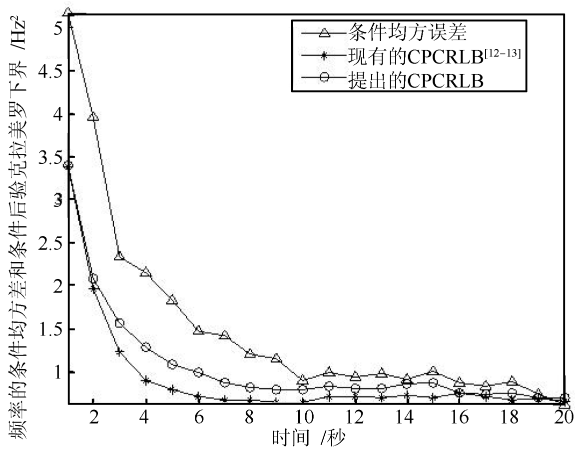


图 12 对于高斯的系统噪声和具有指数分布的量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 频率的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 12 Simulation results of frequency of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process noise and measurement noise with exponential distribution

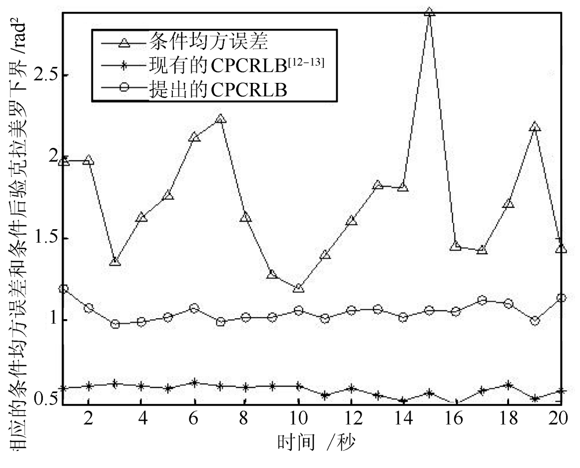


图 13 对于高斯的系统噪声和具有指数分布的量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 相位的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 13 Simulation results of phase of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for Gaussian process noise and measurement noise with exponential distribution

仿真 8. 在仿真 8 中, 我们将在非高斯系统和量测噪声情况下比较现有方法和本文提出的方法. 系统噪声 $\{\boldsymbol{w}_k\}$ 和量测噪声 $\{\boldsymbol{v}_k\}$ 都服从指数分布, 它们的分布参数分别为 $\lambda_w = [100 \quad 0.2]^{\mathrm{T}}$ 和 $\lambda_v = [0.5 \quad 0.8]^{\mathrm{T}}$. 现有方法与本文提出方法在延迟概率 $\theta_{k+1} = 0.5$ 情况下的仿真结果如图 14 和 15 所示.

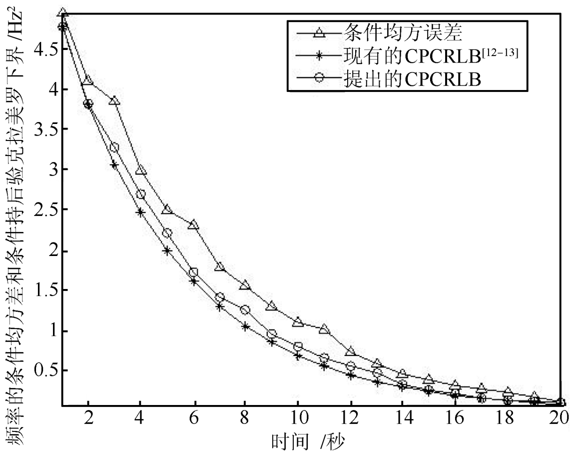


图 14 对于具有指数分布的系统噪声和量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 频率的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 14 Simulation results of frequency of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for process and measurement noises with exponential distributions

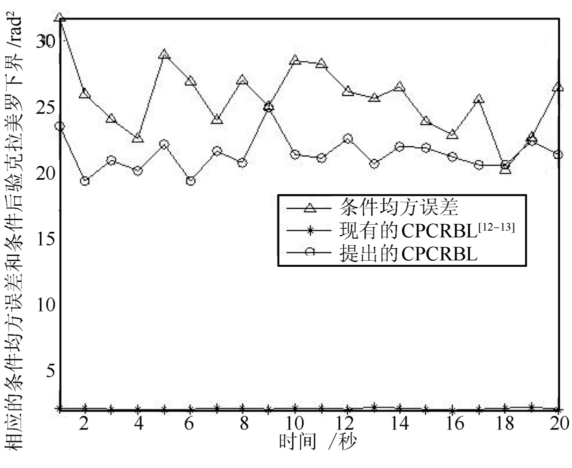


图 15 对于具有指数分布的系统噪声和量测噪声, 当延迟概率为 0.5 时, 相位的条件均方误差和条件后验克拉美罗下界仿真结果

Fig. 15 Simulation results of phase of conditional mean-squared error and CPCRLB when latency probability is 0.5 for process and measurement noises with exponential distributions

从图 10～15 中可以看到, 无论噪声是高斯的还是非高斯的, 本文提出的 CPCRLB 都比现有的 CPCRLB 能更好地跟踪条件均方误差. 因此本文提

出的 CPCRLB 比现有的 CPCRLB 更适合用于对带一步随机延迟量测非线性滤波器可获得的最优性能的进行评价.

4 结论

本文提出了一种适用于带一步随机延迟量测非线性系统的 CPCRLB, 且证明了现有的 CPCRLB 仅是提出的 CPCRLB 在延迟概率为零时的一种特例. 同时通过本文所提出的带一步随机延迟量测的粒子滤波器推导了提出的 CPCRLB 一般近似解和在高斯噪声情况下的特殊近似解. 仿真结果表明, 本文提出的 CPCRLB 比现有的 CPCRLB 更适合用于对带一步随机延迟量测非线性滤波器可获得的最优性能的评价.

附录

注意与文献 [14] 不同, 本文在证明式 (6) 中定义的条件后验克拉美罗下界不等式时是基于一步随机延迟量测 $\boldsymbol{y}_{k+1}$, 而不是基于理想的量测 $\boldsymbol{z}_{k+1}$.

证明. 对于任意的 $(k+2)n$ 维列向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 利用文献 [14] 在 112 页中的结论, 可以得到[14]:

$$\iint \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}-\boldsymbol{x}_{0:k+1})\times \left[\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}\right]p^c_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{A1}$$

其中, $p^c_{k+1}=p(\boldsymbol{x}_{0:k+1},\boldsymbol{y}_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})$. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 并利用方程 (A1), 可以得到:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}[(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}-\boldsymbol{x}_{0:k+1})(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}-\boldsymbol{x}_{0:k+1})^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{y}_{1:k}]\times\\&\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}[\nabla_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}]\boldsymbol{b}\geq\\&\quad\Big(\iint \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}-\boldsymbol{x}_{0:k+1})\times\\&\quad\left[\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}\right]p^c_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}\boldsymbol{b}\Big)^2=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^2\end{aligned} \tag{A2}$$

根据二阶导数的定义, 可以得到:

$$\begin{aligned}&-\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}=\frac{\nabla_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}}{(p^c_{k+1})^2}-\\&\frac{\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}}{p^c_{k+1}}=\nabla_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}-\\&\frac{\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}}{p^c_{k+1}}\end{aligned} \tag{A3}$$

此外, 根据条件期望的定义, 有:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}\left[\frac{\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}}{p^c_{k+1}}\right]=\iint\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}p^c_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}=\\&\Delta^{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\iint p^c_{k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{0:k+1}\mathrm{d}\boldsymbol{y}_{k+1}=0\end{aligned} \tag{A4}$$

在方程 (A3) 的两边同时取条件期望, 并利用式 (5) 和 (A4), 可以得到:

$$\begin{aligned}&I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})=\\&\quad\mathrm{E}_{p^c_{k+1}}[\nabla_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}\nabla^{\mathrm{T}}_{\boldsymbol{x}_{0:k+1}}\ln p^c_{k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}]\end{aligned} \tag{A5}$$

将方程 (4) 和 (A5) 代入方程 (A2) 中, 可以得到:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\boldsymbol{b}\geq(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^2 \tag{A6}$$

考虑到 $\boldsymbol{b}$ 为任意的列向量, 取

$$\boldsymbol{b}=I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\boldsymbol{a} \tag{A7}$$

将方程 (A7) 代入方程 (A6) 中, 可以得到:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})-I(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\right]\boldsymbol{a}\geq 0 \tag{A8}$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 为任意的列向量, 从而可以得到:

$$\mathrm{MSE}(\hat{\boldsymbol{x}}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k})\geq I^{-1}(\boldsymbol{x}_{0:k+1}|\boldsymbol{y}_{1:k}) \tag{A9}$$

□

References

1 Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254−1269

2 Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, **49**(2): 510−518

3 Zhang Yong-Gang, Huang Yu-Long, Wu Zhe-Min, Li Ning. A high order unscented Kalman filtering method. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(5): 838−848
(张勇刚, 黄玉龙, 武哲民, 李宁. 一种高阶无迹卡尔曼滤波方法. 自动化学报, 2014, **40**(5): 838−848)

4 Jia B, Xin M, Cheng Y. Sparse-grid quadrature nonlinear filtering. *Automatica*, 2012, **48**(2): 327−341

5 Duník J, Straka O, Šimandl M. Stochastic integration filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(6): 1561−1566

6 Zhang X C. A novel cubature Kalman filter for nonlinear state estimation. In: Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy: IEEE, 2013. 7797−7802

7 Wang S Y, Feng J C, Tse C K. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, **21**(1): 43−46

8 Wang Lu, Li Guang-Chun, Qiao Xiang-Wei, Wang Zhao-Long, Ma Tao. An adaptive UKF algorithm based on maximum likelihood principle and expectation maximization algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1200−1210 (王璐, 李光春, 乔相伟, 王兆龙, 马涛. 基于极大似然准则和最大期望算法的自适应 UKF 算法. 自动化学报, 2012, **38**(7): 1200−1210)

9 Chang L B, Hu B Q, Li A, Qin F J. Transformed unscented Kalman Filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 252−257

10 Schön T B, Wills A, Ninness B. System identification of nonlinear state-space models. *Automatica*, 2011, **47**(1): 39−49

11 Tichavsky P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cram'er-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(5): 1386−1396

12 Zuo L, Niu R X, Varshney P K. Conditional posterior Cramér-Rao lower bounds for nonlinear sequential Bayesian estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(1): 1−14

13 Zheng Y J, Ozdemir O, Niu R X, Varshney P K. New conditional posterior Cramér-Rao lower bounds for nonlinear sequential Bayesian estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(10): 5549−5556

14 Zuo L. Conditional Posterior Cramér-Rao Lower Bound and Distributed Target Tracking in Sensor Networks [Ph. D. dissertation], Syracuse University, Syracuse, USA, 2011.

15 Yang F W, Wang Z D, Feng G, Liu X H. Robust filtering with randomly varying sensor delay: the finite-horizon case. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — I*, 2009, **56**(3): 664−672

16 Chen S J, Li Y Y, Qi G Q, Sheng A D. Adaptive Kalman estimation in target tracking mixed with random one-step delays, stochastic-bias measurements, and missing measurements. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, **2013**: Article ID 716915

17 Hermoso-Carazo A, Linares-Pérez J. Extended and unscented filtering algorithms using one-step randomly delayed observations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **190**(2): 1375−1393

18 Hermoso-Carazo A, Linares-Pérez J. Unscented filtering algorithm using two-step randomly delayed observations in nonlinear systems. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(9): 3705−3717

19 Wang X X, Liang Y, Pan Q, Zhao C H. Gaussian filter for nonlinear systems with one-step randomly delayed measurements. *Automatica*, 2013, **49**(4): 976−986

20 Wang X X, Pan Q, Liang Y, Yang F. Gaussian smoothers for nonlinear systems with one-step randomly delayed measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(7): 1828−1835

21 Sinopoli B, Schenato L, Franceschetti M, Poolla K, Jordan M I, Sastry S S. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1453−1461

22 Zhou T. Robust recursive state estimation with random measurements droppings. *available at arXiv: 1401.4020v1 [cs.SY]*, 2014.

23 Ray A. Output feedback control under randomly varying distributed delays. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, **17**(4): 701−711

24 Horn R, Johnson C R. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 1985.

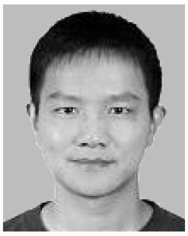
25 Ito K, Xiong K Q. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(5): 910−927

26 Bucy R S, Senne K D. Digital synthesis of non-linear filters. *Automatica*, 1971, **7**(3): 287−298

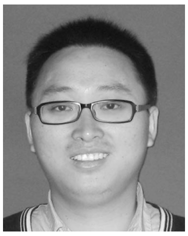
27 Dunik J, Simandl M, Straka O. Unscented Kalman filter: aspects and adaptive setting of scaling parameter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(9): 2411−2416

28 Li W L, Jia Y M. H_∞ filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform. *Signal Processing*, 2010, **90**(12): 3301−3307

29 Jia B, Xin M. Sparse-grid quadrature H_∞ filter for discrete-time systems with uncertain noise statistics. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, **49**(3): 1626−1636



张勇刚 哈尔滨工程大学自动化学院研究员. 2007 年获得英国 Cardiff 大学博士学位. 主要研究方向为光纤陀螺, 惯性导航, 滤波算法, 组合导航.
E-mail: zhangyg@hrbeu.edu.cn
(**ZHANG Yong-Gang** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. He received his Ph. D. degree from Cardiff University, UK in 2007. His research interest covers fiber-optic gyroscope, inertial navigation, filtering algorithms and integrated navigation.)



黄玉龙 哈尔滨工程大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为惯性导航, 滤波算法, 组合导航. 本文通信作者.
E-mail: heuedu@163.com
(**HUANG Yu-Long** Ph. D. candidate at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, filtering algorithm, and integrated navigation. Corresponding author of this paper.)

李 宁 哈尔滨工程大学自动化学院副教授. 主要研究方向为自适应滤波, 组合导航. E-mail: ningli@hrbeu.edu.cn
(**LI Ning** Associate professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. Her research interest covers adaptive filtering and integrated navigation.)

赵 琳 哈尔滨工程大学自动化学院教授. 主要研究方向为惯性导航, 卫星导航, 组合导航.
E-mail: zhaolin@hrbeu.edu.cn
(**ZHAO Lin** Professor at the College of Automation, Harbin Engineering University. His research interest covers inertial navigation, satellite navigation, and integrated navigation.)