# 基于非线性反馈的镇定和输出调节: 简要综述

姜钟平[1] 黄 捷[2]

**摘 要** 简要回顾了非线性系统的镇定和输出调节的最新进展, 概述了这两类表面上独立的课题之间的内在联系. 同时也讨论了部分未解决的问题和未来的研究工作.

**关键词** 非线性系统, 镇定, 输出调节, 非线性控制, Lyapunov 函数

**引用格式** 姜钟平, 黄捷. 基于非线性反馈的镇定和输出调节: 简要综述. 自动化学报, 2013, **39**(9): 1389−1401

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.01389

## Stabilization and Output Regulation by Nonlinear Feedback: a Brief Overview

JIANG Zhong-Ping[1] HUANG Jie[2]

**Abstract** This paper presents a brief overview of the recent progress on the stabilization and output regulation of nonlinear systems and outlines the relationships between these two apparently separate topics of nonlinear control. Some unanswered problems and future research work are also discussed.

**Key words** Nonlinear systems, stabilization, output regulation, nonlinear control, Lyapunov functions

**Citation** Jiang Zhong-Ping, Huang Jie. Stabilization and output regulation by nonlinear feedback: a brief overview. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(9): 1389−1401

非线性系统的镇定问题是控制理论中的一个至关重要的问题. 在上世纪 80 年代晚期, 一些学者指出, 非线性反馈镇定仍然是一个重要的开放性研究课题[1]. 相关研究自此开始, 经过近三十年, 众多学者提出了大量创新构想和方法, 去解决非线性系统的局部镇定、半全局镇定和全局镇定等问题. 与此同时, 非线性系统输出调节的研究也展开了. 然而早期研究重点大多在于局部输出调节. 直到本世纪初期, 研究重点才转移到非线性系统的全局输出调节. 之后, 它与非线性系统的全局镇定之间的紧密联系很快便得到了广泛认同. 针对这两个看似独立的领域, 本文梳理了近年来的研究成果, 指出二者之联系, 并列出若干未解决之问题, 以俟来者.

收稿日期 2013-08-02 录用日期 2013-08-13
Manuscript received August 2, 2013; accepted August 13, 2013
香港特别行政区研究资助局 (412810), 中国国家自然科学基金 (61004010, 61074026), 美国国家科学基金 (ECCS-1230040) 资助
Supported by the Research Grants Council of the Hong Kong Special Administration Region (412810), National Natural Science Foundation of China (61004010, 61074026), and National Science Foundation of USA (ECCS-1230040)
本文为黄琳院士约稿
Recommended by Academician HUANG Lin
1. 纽约大学理工学院电气与计算机工程系 纽约 11201 美国 2. 香港中文大学机械与自动工程学系 香港 中国
1. Department of Electrical and Computer Engineering, Polytechnic Institute of New York University, New York 11201, USA 2. Department of Mechanical and Automation Engineering, the Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China

## 1 镇定

### 1.1 问题描述

所谓镇定问题指的是如何通过反馈律使得闭环系统在所需平衡点渐近稳定. 如果闭环系统在平衡点处是 Lyapunov 意义下的全局渐近稳定, 此时镇定问题被称为全局镇定. 简单起见, 我们首先研究单输入单输出 (Single-input single-output, SISO) 的非线性控制仿射系统, 其描述如以下常微分方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{1}$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $u \in \mathbf{R}$ 是控制输入, $y \in \mathbf{R}$ 是系统输出. 值得注意的是, 在本文 (及引文中) 中出现的很多镇定结果都可以推广到多输入多输出 (Multiple-input multiple-output, MIMO) 系统.

在方程 (1) 中, 我们假设函数 $f$, $g$, $h$ 充分光滑并且满足 $f(0) = 0$, $h(0) = 0$. 于是镇定问题可以阐述为: 何时可以找到使系统 (1) 在原点 $x = 0$ 处渐近镇定的反馈控制律? 一般来说, 我们关注以下两类反馈控制器:

$$\text{状态反馈:} \quad u = \mu(x) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\text{输出反馈:} \quad u &= \mu(y, \eta) \\ \dot{\eta} &= \nu(y, \eta)\end{aligned} \tag{3}$$

类似式 (3), 我们也考虑动态状态反馈控制律, 而非

如式 (2) 所示的 (静态) 反馈控制律. 当维数 $(\eta)=0$ 时, 输出反馈律 (3) 通常指的是静态输出反馈控制器. 对于非线性控制系统, 这个问题虽然重要但还没有得到彻底解决, 本文中我们将会省略这一部分.

接下来, 对于非线性系统 (1), 我们首先探讨状态反馈控制律的存在性, 然后再给出一些可以用来构造镇定控制律的工具.

### 1.2 控制 Lyapunov 函数

"控制 Lyapunov 函数 (Control Lyapunov function, CLF)" 的概念由 Sontag[2] 引入, 而对更广泛的具有任意闭控制值集的非线性系统, Artstein 在其重要工作[3] 中进行了初步的研究. 系统 (1) 的一个 CLF 指的是一个光滑、正定、径向有界的函数 $V:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, 且满足以下条件:

$$\inf_{u\in\mathbf{R}}\{L_fV(x)+uL_gV(x)\}<0,\quad \forall\, x\neq 0 \tag{4}$$

其中, $L_fV$ 和 $L_gV$ 分别是 $V$ 沿着向量场 $f$ 和 $g$ 的 Lie 导数. 显然, 上述条件与下式等价:

$$L_gV(x)=0\ \Rightarrow\ L_fV(x)<0,\quad \forall\, x\neq 0 \tag{5}$$

文献 [3−4] 证明了 (全局) CLF 的存在是系统 (1) 全局可镇定性的充要条件. 其中值得一提的是, Sontag 提出了构造全局镇定控制律的通用公式.

**定理 1.** 假设 $V$ 是系统 (1) 的一个光滑 CLF, 则如下反馈控制律 $u=\mu(x)$ 能够全局渐近镇定系统 (1)

$$\mu(x)=\begin{cases}-\dfrac{L_fV(x)+\sqrt{(L_fV(x))^2+(L_gV(x))^4}}{L_gV(x)}, & \text{当 } L_gV(x)\neq 0\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases} \tag{6}$$

一般来说, 式 (6) 中的控制律 $\mu$ 可能不是处处光滑的. 可以证明, 在某些小控制性质下, 控制律 $\mu$ 是几乎光滑的, 即在 $x=0$ 点连续且在其他点处处光滑. 此类小控制性质定义如下[4]:

对每个 $\varepsilon>0$, 存在常数 $\delta>0$, 使得对任意满足 $0<|x|<\delta$ 的 $x$, 存在满足 $|u|<\varepsilon$ 的 $u$, 使 $L_fV(x)+uL_gV(x)<0$ 成立.

CLF 广泛应用于现代非线性控制领域, 如自适应非线性控制[5−7]、鲁棒非线性控制[8]、非线性最优控制[8−9]、非线性时滞系统[10−11] 和多智能体系统[12] 等.

值得一提的是, CLF 是 Lyapunov 函数从无控制的动力学系统到非线性控制系统的推广. 对于非线性动力学系统, 构造 Lyapunov 函数和 CLF 都是有相当难度的, 这在文献中已有充分阐释. 然而, 对于某几类重要的非线性控制系统, 已有工具用于生成 CLF 和镇定控制律. 特别地, 对于某些特殊种类的非线性系统, 即使不预设 CLF 存在, 也可以构造出镇定控制器. 我们将在下一节回顾总结此类构造性工具.

### 1.3 构造性非线性控制器设计

#### 1.3.1 倒步法

积分器倒步法, 或称为倒步法, 是一种迭代技术[1, 6, 13], 在多种非线性串联系统的镇定问题中都非常有效. 倒步法最早见于 Kokotović 的文献 [14], 但在早期的非线性控制理论发展中, "加入积分器" 已被欧洲学者广泛应用[15−17]. 首先, 我们考虑如下形式的单输入非线性串联系统:

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2) \tag{7}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)+u \tag{8}$$

倒步法的实质在于将高阶系统的控制器设计问题降为降阶系统的问题. 在上述串联系统中, 降阶系统是 $x_1$-子系统, 它被 $x_2$-子系统的状态所驱动. 假设当 $x_2$ 看成虚拟控制输入时, $x_1$-子系统可以被光滑控制律 $x_2=\mu_1(x_1)$, $\mu_1(0)=0$ 全局渐近镇定, 并且相应地存在一个光滑 CLF $V_1(x_1)$. 倒步法旨在为串联系统 (7) 和 (8) 建立镇定控制律, 同时还能得到串联系统的 CLF, 下面的结果说明了这一点.

**定理 2.** 如下形式的控制律可全局渐近镇定串联系统 (7) 和 (8):

$$\begin{aligned}u=&-c_2(x_2-\mu_1(x_1))-f_2(x_1,x_2)+\\&\frac{\partial\mu_1}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2)-\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}\int_0^1 f_1(x_1,\mu_1(x_1))+\\&\lambda(x_2-\mu_1(x_1))\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $c_2$ 是任意正常数. 另外, $V_2(x_1,x_2)=V_1(x_1)+\frac{1}{2}(x_2-\mu_1(x_1))^2$ 是串联系统 (7) 和 (8) 的 CLF.

事实上, 沿着系统 (7) 和 (8) 的解对 CLF 函数 $V_2$ 求微分, 直接得到:

$$\dot{V}_2=\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}f_1(x_1,\mu_1(x_1))-c_2(x_2-\mu_1(x_1))^2 \tag{10}$$

根据假设, $\dot{V}_2$ 是 $(x_1,x_2)$ 的负定函数. 不难看出, 定理 2 也适用于系统 (7) 和 (8) 的局部镇定问题.

如文献 [6, 14] 中所说明的, 倒步法并不假设串联系统 (7) 和 (8) 的线性化是可控的, 也不假设系统是可反馈线性化的. 文献 [14] 中提到的双线性系统就是一个基本的例子.

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = u \tag{11}$$

在 $x=0$ 处将此系统线性化, 所得到的线性模型并不可控. 然而通过倒步法, 容易得到其全局渐近镇定控制律. 事实上, 选择 $\mu_1 = -x_1^2$ 和 $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, 直接应用方程 (9) 即得到可全局渐近镇定此双线性系统的控制律:

$$u = -x_2 - 2x_1^2 - 2x_1^2 x_2 \tag{12}$$

定理 2 所示的是倒步法的最初形式, 它要求精确知道串联系统 (7) 和 (8) 的向量场. 这个缺陷在倒步法的改进形式中被消除了, 也就是所谓的自适应倒步法[6] 和鲁棒倒步法[8]. 有趣的是, 当只有输出信息可以用于控制器设计时, 输出反馈倒步法已经有了基于非线性滤波器或控制器的多种改进[6, 18−20].

还应提到的是, 很多研究文献致力于放松对虚拟控制律 $\mu_1$ 和/或系统非线性的光滑性要求[21−23].

### 1.3.2　小增益方法

小增益方法是构造非线性反馈控制律另一个有效的工具, 特别适合于含有参数和动态不确定性的非线性关联控制系统[5, 19, 24−25]. 以系统 (7) 和 (8) 为例, 若将 $x_1$-系统看作被 $x_2$ 驱动的动态不确定性, 其状态 $x_1$ 和动态 $f_1$ 未知, 那么上面所示的传统 Lyapunov 设计就不能直接应用. 另外, 针对依赖于动态不确定性的非线性扰动 $f_2(x_1, x_2)$, 不能利用传统的估计技术如神经网络和模糊系统理论来逼近.

为了应对这一挑战, 文献 [25] 借助 Sontag 的输入状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS) 性质, 发展了广义非线性小增益定理 (详见综述文献 [2]). 一个非线性控制系统 $\dot{x} = f(x, u)$ 被称为输入状态稳定 (ISS), 是指存在 $KL$ 类函数 $\beta$ 和 $K$ 类函数 $\gamma$, 使得对任意初始状态 $x(0)$ 和任意局部有界输入 $u: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^m$, 解 $x(t)$ 对每个 $t \geq 0$ 有定义且满足

$$|x(t)| \leq \max\{\beta(|x(0)|, t),\ \gamma(\|u_{[0,t]}\|)\} \tag{13}$$

此处 $\|u_{[0,t]}\|$ 表示截断函数 $u$ 在 $[0, t]$ 上的 $L_\infty$-范数, 而 $\gamma$ 通常被称为 ISS 系统的增益函数. 值得一提的是基于最大值的 ISS 定义数学上等价于 Sontag 对于 ISS 的原始定义[26] 即式 (13) 中的最大值替换为求和. 当然, 两种情况下的函数对 $(\beta, \gamma)$ 可能有所不同.

毫无疑问, 如 Sontag 在综述文献 [2] 中所说, ISS 已经成为解决很多非线性系统的分析和设计问题的基本工具. 它在非线性鲁棒控制的发展中扮演了重要的角色, 对于系统动态不确定性的处理, 导致了广义非线性小增益定理的出现. 下面是对这个问题的简单介绍.

ISS 小增益定理描述了在什么条件下, 两个 ISS 系统关联之后仍然保持 ISS 性质. 更精确地说, 考虑由两个 ISS 子系统构成的关联系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, v) \tag{14}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, v) \tag{15}$$

假设对 $i, j = 1, 2$, $j \neq i$, 每个 $x_i$-子系统是在式 (13) 意义下关于输入 $x_j$ 的 ISS 系统, 且增益函数是 $\gamma_i$.

**定理 3**[25, 27]**.** 若满足下述等价小增益条件之一:

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(s) < s, \quad \forall s > 0 \tag{16}$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_1(s) < s, \quad \forall s > 0 \tag{17}$$

将 $v$ 看作输入, 则关联系统 (14) 和 (15) 是 ISS.

值得指出的是, 早期的非线性小增益定理仅仅针对由常微分方程 (14) 和 (15) 描述的有限维关联系统. 根据最新的研究, 对于跳变系统、混杂和切换系统、离散动力学系统、时滞系统、泛函微分差分系统、甚至复杂大系统, 我们可以建立类似的小增益理论. 定理 3 有时被称为依赖轨迹的 ISS 小增益定理. 由 Lyapunov 函数描述的小增益定理可见文献 [28−31]. 其他具体细节可见文献 [27]. 文献中也曾指出, 系统 (7) 和 (8) 关于部分状态 $x_2$ 的全局镇定问题可以从小增益的角度来考虑. 与其他 Lyapunov 设计相比, 主要的不同在于此时将系统 (7) 和 (8) 看作一个关联系统. 我们仅仅需要知道, $x_1$-子系统是 ISS 以及一个给定的 ISS 增益函数, 也就是 $K_\infty$ 类函数 $\gamma_1$. 为了利用小增益定理, 我们只要证明, 可以设计形如 $u = \kappa(x_2)$ 的反馈控制律使得 $x_2$-系统是 ISS 的, 且增益 $\gamma_2$ 严格小于 $\gamma_1^{-1}$, 这样小增益条件 (16) 或 (17) 就满足了. 以上结果被称为增益配置定理 [25]. 下面的定理指出, 在更弱的假设下, 利用部分状态反馈 (而不是全状态反馈) 可解决信息系统 (7) 和 (8) 的全局镇定问题.

**定理 4.** 假设 $x_1$-系统是 ISS, 其增益为 $K_\infty$ 类函数 $\gamma_1$. 进一步假设 $f_2(x_1, x_2)$ 的上界是 $\sigma_1(|x_1|) + \sigma_2(|x_2|)$, 其中 $\sigma_i$ 是局部 Lipschitz 且半正定的. 则利用部分状态的反馈控制律 $u = \kappa(x_2)$ 可以解决系统 (7) 和 (8) 的全局镇定问题.

上面的结果最初见于文献 [25], 且广泛应用于解决各种控制问题[19, 24, 27, 32]. 最近, 它还推广至量化非线线性控制, 或准确地说, 基于量化信号的非线性反馈镇定问题[33−35]. 在最新的研究工作中[36−37], 我们将小增益技术用到解决多智能体的分布式控制, 提出了一种新颖的分布式控制方法.

## 1.4　量化镇定

控制和通讯的交汇已经引出了很多新的有实际

意义的控制问题. 利用量化信号的量化镇定问题就是其中之一. 量化器是将信号从连续转换为离散的非线性算子, 因而是不连续函数. 鉴于这个强非线性约束, 量化控制器设计具有很多技术上的挑战, 包括线性[38−42] 和非线性系统[18, 31, 43−45].

尽管它具有理论重要性和实际相关性, 非线性系统的量化反馈镇定迄今为止并没有受到很大重视. 其中有不少技术缺陷仍需要克服. 1) 当输出测量值和/或控制输入中引入量化, 反馈控制律对状态变量将会变得不连续. 不连续性和系统的非线性、阶数会直接导致类似倒步法的递归反馈设计工具使用上的瓶颈. 2) 对数量化常常用于解决网络化控制系统中由量化器的有限字长所引起的问题, 与之相比动态量化常常是更可取的. 动态量化的关键思想是通过 "放大" 和 "缩小" 相位来动态地调整量化器的范围. 为避免在 "缩小" 相位时发生的有限逃逸现象 (Finite escape phenomenon), 现有工作[34−35, 46] 的普遍方法是假设 (开环) 非受控系统是向前完备和短时范数可观测的. 显然, 这些假设严格地限制了用于讨论量化镇定的非线性系统的类型. 3) 含有量化控制的闭环系统是不连续的, 通常也是混杂系统. 这类系统的稳定性分析仍然是热门研究课题. 最后仍然需要注意的是, 存在大的不确定性时, 非线性系统的量化反馈控制仍然是个未知的研究领域.

为了说明上面这几点, 我们考虑一类可变换为广义输出反馈形式的非线性系统的量化输出反馈控制问题.

$$\dot{z} = \Delta_z(z, y, d) \tag{18}$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \Delta_i(y, z, d), \quad 1 \le i \le n \tag{19}$$

$$x_{n+1} = q_\mu(u) \tag{20}$$

$$y = x_1 \tag{21}$$

这里 $z \in \mathbf{R}^{n_z}$ 且 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 是未测定的状态变量, $y \in \mathbf{R}$ 是可测量输出, $u \in \mathbf{R}$ 是控制输入, $d \in \mathbf{R}^{n_d}$ 是 (有界时变) 扰动输入. $q_\mu$ 是执行器量化器, 它的量化变量是 $\mu > 0$. $\Delta_z$ 和 $\Delta_i$, 其中 $1 \le i \le n$, 是局部 Lipschitz 但未知的非线性函数. 通常 $z$ 变量的动态用以代指动态不确定性[19, 24−25].

应该提到, 广义输出反馈形式, 即式 (18) ~ (21), 首先由文献 [47] 提出, 彼时它是作为传统输出反馈形式在只有输出非线性时的扩展, 没有量化和扰动输入 $d$[6, 20].

控制目标是如果可能的话找到一个量化输出反馈控制律, 可以将输出信号驱动到原点的任意小邻域内, 同时保持所有闭环系统信号的有界性.

同现有的非线性控制理论的文献一样, 针对广义输出反馈形式的系统我们提出以下假设:

**假设 1.** $z$-系统是 ISS 的, 并且具有正定、径向无界的 ISS-Lyapunov 函数 $V_z$ 满足

$$V_z(z) \ge \max\{\gamma_z^y(|y|), \gamma_z^d(|d|)\} \Rightarrow \nabla V_z(z)\dot{z} \le -\alpha_z(|z|)$$

这里, $\gamma_z^y$, $\gamma_z^d$ 和 $\alpha_z$ 是 $K_\infty$ 类函数.

**假设 2.** 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 不确定函数 $\Delta_i$ 以 $K_\infty$ 类函数 $\psi_{\Delta_i}$ 为界, 即

$$|\Delta_i(y, z, d)| \le \psi_{\Delta_i}(|(y, z, d)|)$$

然而, 除了以上两个常用假设, 要解决量化反馈控制问题, 我们需要引入另外两个假设:

**假设 3.** 非受控系统 (18) ~ (21) 当 $u = 0$ 时是向前完备和以 $y$ 为输出的短时范数可观测的[34, 46].

**假设 4.** 量化器 $q_\mu$ 满足以下性质:

$$|q_\mu(u) - u| \le \delta\mu, \quad 当\ |u| \le M\mu$$

这里, $M$ 和 $\delta$ 是正常数, $M\mu$ 是量化器的范围, $\delta\mu$ 是在量化器范围之内对于所有 $u$ 的最大量化误差. 通常 $\mu$ 称为 "放缩" 变量.

如之前提到的, 量化反馈控制的不连续性需要新的方法和新的控制器设计工具. 这里首先介绍一种降阶部分状态估计器的变体[19]

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1} + L_{i+1}y - L_i(\xi_2 + L_2 y), \quad 2 \le i \le n-1 \tag{22}$$

$$\dot{\xi}_n = q_\mu(u) - L_n(\xi_2 + L_2 y) \tag{23}$$

这里 $L_i$ 等是稍后要确定的常数.

通过直接计算, 观测误差的时间导数 $\zeta = (x_2 - L_2 y - \xi_2, \cdots, x_n - L_n y - \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 可以写成紧凑形式

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Delta^*(y, z, d) \tag{24}$$

这里合理利用 $L_i$ 等常数将 $A$ 取为一个 Hurwitz 矩阵, 并且向量值函数 $\Delta^*$ 的每一个分量都是 $\Delta_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的线性组合.

可以验证, $\zeta$-系统 (24) 关于输入 $y$, $z$ 和 $d$ 是 ISS 的, 并且存在二次型 ISS-Lyapunov 函数 $V_\zeta = \zeta^{\mathrm{T}} P \zeta$, 这里 $P$ 是满足 Lyapunov 矩阵方程 $PA + A^{\mathrm{T}} P = -2I_{n-1}$ 的正定对称矩阵. 更确切地, 利用假设 2, 存在 $K_\infty$ 类函数 $\gamma_\zeta^y$, $\gamma_\zeta^z$, $\gamma_\zeta^d$ 和 $\alpha_\zeta$ 使得:

$$V_\zeta(\zeta) \ge \max\{\gamma_\zeta^y(|y|), \gamma_\zeta^z(|z|), \gamma_\zeta^d(|d|)\} \Rightarrow \nabla V_\zeta \dot{\zeta} \le -\alpha_\zeta(|\zeta|)$$

结合假设 1 可以推出, 由 $z$-系统 (18) 和 $\zeta$-系统 (24) 组成的串联−关联系统关于输入 $y$ 和 $d$ 是 ISS 的.

考虑到以上这些事实, 我们可以提出一种新的基于小增益的量化输出反馈控制器设计方法. 合并了控制器/观测器的系统具有如下形式:

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \Delta^*(y, z, d) \tag{25}$$

$$\dot{z} = \Delta_z(z, y, d) \tag{26}$$

$$\dot{y} = \xi_2 + L_2 y + \zeta_2 + \Delta_1(y, z, d) \tag{27}$$

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1} + L_{i+1}y - L_i(\xi_2 + L_2 y),\quad 2 \le i \le n-1 \tag{28}$$

$$\dot{\xi}_n = u + \tilde{u} - L_n(\xi_2 + L_2 y) \tag{29}$$

其中, $\tilde{u} = q_\mu(u) - u$ 是输入量化误差.

显然, 系统 (25) ∼ (29) 是系统 (7) 和 (8) 的高阶变体, 其中 $x_1 = (\zeta, z)$ 附加了不止一个非线性积分器.

由于输入量化误差 $\tilde{u}$ 的存在, 第 3 节中提到的小增益设计方法需要进行重大修改, 放缩变量也需要动态更新:

$$\mu(t_{k+1}) = Q(\mu(t_k)),\quad k \in \mathbf{Z}_+ \tag{30}$$

其中, $Q$ 代表动态量化逻辑, 且对于 $k \in \mathbf{Z}_+$, $t_{k+1} - t_k = t_d > 0$.

在此我们不作细节讨论, 由文献 [34] 提出的下列定理可以看作是定理 4 对于执行器量化的扩展:

**定理 5.** 在假设 1 ∼ 4 的条件下, 对于可转换为广义输出反馈形式 (18) ∼ (21) 的非线性系统, 量化输出反馈控制问题是可解的.

## 2　输出调节[1]

### 2.1　问题描述

输出调节问题的目标是为不确定受控系统设计反馈控制律, 使得闭环系统稳定并且在一类扰动存在时闭环系统的输出可以渐近地跟踪一类参考输入. 为了描述这类问题, 考虑如下的 (复合) 受控系统

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), v(t), w)\\
\dot{v}(t) &= a(v(t))\\
e(t) &= h(x(t), u(t), v(t), w)\\
y(t) &= h_m(x(t), u(t), v(t), w),\ \ t \ge 0
\end{aligned} \tag{31}$$

其中, $x$ 是 $n$ 维受控系统状态, $u$ 是 $m$ 维受控系统输入, $e$ 是表示跟踪误差的 $p$ 维受控系统输出, $y$ 是 $p_m$ 维受控系统测量输出, $v$ 是代表扰动和/或参考输入的 $q$ 维外部信号, $w$ 是 $n_w$ 维受控系统不确定性参量, 其标称值为 $w = 0$. 假设 $w \in W$, 其中 $W$ 是 $\mathbf{R}^{n_w}$ 中包含原点的子集. 系统 $\dot{v} = a(v)$ 用于产生外部信号, 被称为外部系统. 该系统满足以下假设.

**假设 5.** 外部系统 $\dot{v} = a(v)$ 在原点的平衡点是全局稳定的, 即对任意 $v(0)$, 外部系统的解存在且在 $t \in [0, \infty)$ 上有界.

如果 $W = \{0\}$, 则非线性系统 (31) 称为精确已知的.

考虑如下描述的控制律

$$u = k(z, y),\ \ \dot{z} = f_z(z, y) \tag{32}$$

其中, $z$ 是补偿器状态. 控制律 (32) 称为动态测量输出反馈控制律. 当 $h_m(x, u, v, w) = \mathrm{col}(x, v)$ 时, 式 (32) 为状态反馈控制; 当 $h_m(x, u, v, w) = h(x, u, v, w)$ 时, 式 (32) 为误差输出反馈控制. 如果函数 $h_m$ 不包含 $u$, 那么受控系统 (31) 称为严格恰当的; 如果函数 $k$ 不包含 $y$, 那么控制律 (32) 称为严格恰当的. 我们假设受控系统和控制律中至少有一个是严格恰当的. 令 $x_c = \mathrm{col}(x, z)$ 表示闭环系统的状态, 其维数是 $n_c$. 那么, 闭环系统可以写为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_c &= f_c(x_c, v, w)\\
e &= h_c(x_c, v, w)
\end{aligned} \tag{33}$$

其中, $f_c$ 和 $h_c$ 是某种函数. 为方便起见, 这里所涉及的所有函数都假定为充分光滑的并在适当的欧氏空间中具有全局定义, 且满足在各自欧氏空间的原点消没, 并对所有 $w \in W$, 满足 $f(0, 0, 0, w) = 0$, $h(0, 0, 0, w) = 0$, $h_m(0, 0, 0, w) = 0$.

多年来, 学者们定义了各种形式的输出调节问题. 这里我们将其统一归纳为以下形式.

**定义 1 (输出调节问题).** 对于包含相应欧氏空间原点的集合 $X_c \subset \mathbf{R}^{n_c}$, $V \subset \mathbf{R}^q$ 和 $W \subset \mathbf{R}^{n_w}$, 找到形如式 (32) 的控制律, 使得对所有的 $x_c(0) \in X_c$, $v(0) \in V$ 及 $w \in W$, 闭环系统的解存在且对所有 $t \ge 0$ 有界, 并使得:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

**注 1.** 上述定义涵盖了一些特例. 如当 $W = \{0\}$ 时, 该问题为非鲁棒输出调节问题[50−54]; 当 $X_c$, $V$ 和 $W$ 是相应欧氏空间中原点的任意小邻域时, 该问题为局部鲁棒输出调节问题[55−57]; 当 $X_c = \mathbf{R}^{n_c}$, $V$ 和 $W$ 分别为 $\mathbf{R}^q$ 和 $\mathbf{R}^{n_w}$ 中任意大的紧集时, 该问题为全局鲁棒输出调节问题[58−61]; 最后, 如果该问题对于 $\mathbf{R}^{n_c}$, $\mathbf{R}^q$ 和 $\mathbf{R}^{n_w}$ 中任意大的紧集 $X_c$, $V$

[1]本节部分内容引自文献 [48−49].

和 $W$ 都是可解的, 那么该问题称为半全局鲁棒输出调节问题[62−64].

**注 2.** 输出调节问题的研究首先针对线性时不变系统[65−67]. 解决输出调节问题的主要工具是内模原理. 借助该原理, 给定受控系统的输出调节问题可以被转化为增广系统的镇定问题, 此增广系统包括原受控系统和一个称为内模的动态补偿器. 自上世纪 90 年代初期以来, 输出调节问题的研究开始集中于非线性系统. 特别地, 在 1990 年, Isidori 和 Byrnes 考虑了确定性非线性系统的输出调节问题, 并通过前馈控制方法解决了该问题. 借助于推广的内模方法[65−67], Huang 等首先对不确定非线性系统的输出调节问题展开了研究[56, 68−69]. 随后, Byrnes 等进一步研究了鲁棒输出调节问题, 并就这一重要问题提出了一些方法和观点[55, 59, 70]. 经各国学者超过 20 年的研究, 输出调节问题的研究在一些方向得到了较大的拓展, 现总结如下. 1) 局部鲁棒输出调节问题被推广至半全局或全局鲁棒输出调节问题. 2) 输出调节问题的可解性被扩广至更一般的受控系统和外部系统. 很多新方法被用以处理非线性、时变或不确定的外部系统. 3) 输出调节问题已由单一系统推广至多智能体系统, 形成了所谓的协同输出调节问题 (Cooperative output regulation problem), 该问题可通过分布式控制方案进行研究.

在本节的末尾, 我们对鲁棒非线性输出调节问题的最初结果[56, 68, 71] 作一总结. 为此我们首先列举如下假设.

**假设 6.** 存在充分光滑的函数 $x(v,w)$ 和 $\boldsymbol{u}(v,w)$, 其中 $x(0,0)=0$ 且 $u(0,0)=0$, 使得下列方程对所有 $v\in V$ 和 $w\in W$ 成立

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{x}(v,w)}{\partial v}a(v)=f(\boldsymbol{x}(v,w),u(v,w),v,w)\\&0=h(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w)\end{aligned}\tag{34}$$

方程 (34) 称为调节器方程[52].

**假设 7.** 外部系统是线性且中立稳定的, 即 $a(v)=A_1v$, 其中常数矩阵 $A_1$ 的特征值都是具有零实部的半单根 (Semi-simple).

**假设 8.** 调节器方程的解是关于 $v$ 的多项式.

在假设 7 和假设 8 的条件下, 存在整数 $r$ 和实数 $a_0,\cdots,a_{r-1}$, 使得:

$$\frac{\mathrm{d}^r\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^r}=a_0\boldsymbol{u}+a_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\cdots+a_{r-1}\frac{\mathrm{d}^{r-1}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^{r-1}}\tag{35}$$

此处 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{u}(v,w)}{\partial v}a(v)$, $\frac{\mathrm{d}^i\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{i-1}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^{i-1}}\right)$, $i=2,3,\cdots$.

为简单起见, 假设 $p=m=1$. 令

$$\tau(v,w)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}^{r-1}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^{r-1}}\end{bmatrix}\tag{36}$$

且

$$\Phi=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{r-1}\end{bmatrix},\quad\Psi=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{37}$$

那么, 可以定义如下形式的动态补偿器

$$\dot\eta=\Phi\eta+\Psi^{\mathrm{T}}e\tag{38}$$

该动态补偿器和复合受控系统共同组成了所谓的增广系统. 文献 [56, 68, 71] 的主要结果是如果存在线性反馈控制使得该增广系统在原点的平衡点是指数稳定的, 那么原受控系统 (31) 的 (局部) 鲁棒输出调节问题就可以解决. 补偿器 (38) 称为式 (31) 的内模.

### 2.2 镇定和输出调节的联系

对于不确定非线性系统的鲁棒输出调节问题, 早期的解决方法是应用 Jacobian 线性化方法来镇定闭环系统, 但是这种方法只能保证该问题有局部解. 为了解决非线性系统的全局鲁棒输出调节问题, 给定受控系统 (31) 的输出调节问题被转换为增广系统的镇定问题, 其中增广系统包括受控系统 (31) 和称为内模的动态补偿器. 首先, 我们介绍以下内模概念的一般刻画.

**定义 2.** 在假设 6 的条件下, $s$ 取为某正整数, $\gamma:\mathbf{R}^s\times\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^m\mapsto\mathbf{R}^s$ 和 $\beta:\mathbf{R}^s\times\mathbf{R}^q\mapsto\mathbf{R}^m$ 取为两个充分光滑、在原点消没的函数. 受控系统 (31) 的备选内模 (Internal model candidate) 为具有如下形式的动态补偿器:

$$\begin{aligned}&\dot\eta=\gamma(\eta,y,u)=\gamma(\eta,h_m(x,u,v,w),u)\\&u=\beta(\eta,v)\end{aligned}\tag{39}$$

该动态补偿器具有如下性质: 存在全局定义的充分光滑的函数 $\theta:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^{n_w}\mapsto\mathbf{R}^s$ 使得下列方程对所有的 $v\in\mathbf{R}^q$, $w\in\mathbf{R}^{n_w}$ 成立,

$$\begin{aligned}&\dot\theta(v,w)=\\&\quad\gamma(\theta(v,w),h_m(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w),\boldsymbol{u}(v,w))\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u}(v,w)=\beta(\theta(v,w),v) \tag{40}$$

其中, $\dot{\theta}(v,w)=\frac{\partial\theta(v,w)}{\partial v}a(v)$.

**注 3.** 受控系统和备选内模组成了下述增广系统

$$\begin{aligned}\dot{\eta}&=\gamma(\eta,y,u)\\ \dot{x}&=f(x,u,v,w)\\ \dot{v}&=a(v)\\ e&=h(x,u,v,w)\\ y&=h_m(x,u,v,w)\end{aligned} \tag{41}$$

备选内模的定义使得增广系统在控制 $\boldsymbol{u}(v,w)$ 的作用下, 具有输出化零不变流型 $\mathcal{M}=\{(\eta,x,v)|\eta=\theta(v,w),\ x=\boldsymbol{x}(v,w),\ v\in\mathbf{R}^q\}$, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\theta(v,w)}{\partial v}a(v)=\\ &\quad\gamma(\theta(v,w),h_m(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w),\boldsymbol{u}(v,w))\\ &\frac{\partial\boldsymbol{x}(v,w)}{\partial v}a(v)=f(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w)\\ &0=h(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w)\end{aligned}$$

**注 4.** 文献 [58] 针对 $h_m(x,u,v,w)=(x,e)$ 的特殊情况首次给出了备选内模的一般描述; 随后文献 [72] 将其推广至 $h_m(x,u,v,w)=(x,v,e)$ 的情况, 以便处理非线性外部系统. 此处的定义 2 出自文献 [48].

为了进一步介绍内模的概念, 我们将证明, 通过对增广系统进行坐标和输入变换, 式 (31) 的输出调节问题可以转换成变换后增广系统平衡点的镇定问题. 为方便起见, 考虑 $y=\mathrm{col}(e,v)$ 的情况. 此时 $h_m(\boldsymbol{x}(v,w),\boldsymbol{u}(v,w),v,w)=\mathrm{col}(0,v)$, 则下述对于式 (41) 的坐标和输入变换

$$\begin{aligned}\bar{\eta}&=\eta-\theta(v,w)\\ \bar{x}&=x-\boldsymbol{x}(v,w)\\ \bar{u}&=u-\beta(\eta,v)\end{aligned}$$

将生成新系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\eta}}&=\bar{\gamma}(\bar{\eta},\bar{x},\bar{u},v,w)\\ \dot{\bar{x}}&=\bar{f}(\bar{\eta},\bar{x},\bar{u},v,w)\\ e&=\bar{h}(\bar{\eta},\bar{x},\bar{u},v,w)\end{aligned} \tag{42}$$

该新系统对于所有外部系统的轨线 $v(t)$ 和所有 $w\in\mathbf{R}^{n_w}$, 满足

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(0,0,0,v(t),w)&=0\\ \bar{f}(0,0,0,v(t),w)&=0\\ \bar{h}\,(0,0,0,v(t),w)&=0\end{aligned} \tag{43}$$

考虑具有如下形式的输出反馈控制律

$$\begin{aligned}\bar{u}&=k\,(\xi)\\ \dot{\xi}&=g_\xi(\xi,e)\end{aligned} \tag{44}$$

其中, $\xi\in\mathbf{R}^{n_\xi}$, $n_\xi$ 是整数, $k$ 和 $g_\xi$ 是充分光滑、在各自原点消没的函数. 增广系统 (42) 的平衡点是否能被控制律 (44) 所镇定, 不仅依赖于给定的受控系统 (31), 还依赖于备选内模 (39). 如果式 (42) 在原点的平衡点可被反馈控制律 (44) 全局 (局部、半全局) 镇定, 则式 (39) 称为式 (31) 的全局 (局部、半全局) 内模. 因此内模可以看作使得增广系统 (42) 全局 (局部、半局部) 可镇定的动态补偿器.

显然, 如果控制律 (44) 能够全局或局部地镇定增广系统 (42) 在原点的平衡点, 那么下面的控制律

$$\begin{aligned}u&=\beta\,(\eta,v)+k\,(e,\xi)\\ \dot{\eta}&=\gamma\,(\eta,e,v,u)\\ \dot{\xi}&=g_\xi\,(\eta,\xi)\end{aligned} \tag{45}$$

就全局或局部地解决了原受控系统 (31) 的鲁棒输出调节问题. 换句话说, 复合系统 (31) 的鲁棒输出调节问题已经转换为增广系统 (42) 在原点的平衡点的鲁棒镇定问题. 值得注意的是, 当函数 $\beta$ 和 $\gamma$ 与 $v$ 无关时, 控制律 (45) 是输出反馈控制律.

### 2.3 构造备选内模

综上可知, 上一节总结的框架能否成功的关键在于能否为系统 (31) 找到适合的内模. 然而, 为一般的非线性系统找到全局内模的难度不亚于确定该非线性系统的全局可镇定性. 因此, 一种更实际的方法是寻找具有其他良好性质的备选内模, 例如输入状态稳定 (ISS)[26]、原点平衡点指数稳定等. 在这一小节中, 我们将总结一些关于寻找备选内模的结果.

#### 2.3.1 非线性备选内模[58]

第一种非线性内模是基于如下假设构造的.

**假设 9.** 存在充分光滑的函数 $\pi:\mathbf{R}^q\times\mathbf{R}^{n_w}\mapsto\mathbf{R}$, 整数 $r$ 和实数 $a_0,\cdots,a_{r-1}$, 使得:

$$\frac{\mathrm{d}^r\pi}{\mathrm{d}t^r}=a_0\pi+a_1\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t}+\cdots+a_{r-1}\frac{\mathrm{d}^{r-1}\pi}{\mathrm{d}t^{r-1}} \tag{46}$$

且存在充分光滑、在原点消没的函数 $\beta:\mathbf{R}^r\mapsto\mathbf{R}$ 使得对于所有 $v\in\mathbf{R}^q$ 和 $w\in\mathbf{R}^{n_w}$, 满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}(v,w)=\\ &\quad\beta(\pi(v,w),\dot{\pi}(v,w),\cdots,\pi^{(r-1)}(v,w))\end{aligned} \tag{47}$$

在假设 9 的条件下, 令

$$\tau(v,w) = \begin{bmatrix} \pi \\ \dfrac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{r-1}\pi}{\mathrm{d}t^{r-1}} \end{bmatrix} \tag{48}$$

$\Phi$ 如式 (37) 所定义, 那么可以证明:

$$\dot{\tau} = \Phi\tau,\ \ \boldsymbol{u}(v,w) = \beta(\tau) \tag{49}$$

令 $\Psi$ 为 $\beta$ 在原点的梯度, 并假设 $(\Psi,\Phi)$ 是可观测的. 那么, 对任意 $M \in \mathbf{R}^{r\times r}$ 和 $N \in \mathbf{R}^{r\times 1}$, 满足 $(M,N)$ 可控、矩阵 $\Phi$ 和 $M$ 的谱不相交、且 $M$ 是 Hurwitz 矩阵, 则存在唯一、非奇异的矩阵 $T \in \mathbf{R}^{r\times r}$ 满足 Sylvester 方程[73]

$$T\Phi - MT = N\Psi \tag{50}$$

于是下面的动态补偿器

$$\begin{aligned} &\dot{\eta} = M\eta + N(u - \beta(T^{-1}\eta) + \Psi T^{-1}\eta) \\ &u = \beta(\eta) \end{aligned} \tag{51}$$

就是非线性备选内模[58]. 显然此备选内模在 $u = 0$ 时指数稳定, 且对于状态 $\eta$ 和输入 $u$ 是 (局部) ISS 的. 另外, 如果附加某些关于 $\beta$ 的假设, 它对于状态 $\eta$ 和输入 $u$ 还可以是 (全局) ISS 的. 此备选内模已用于解决输出反馈系统[74] 和下三角系统[58] 的全局鲁棒输出调节问题. 值得注意的是, 它也用于解决标准 RTAC 扰动抑制问题[75].

如果函数 $\boldsymbol{u}(v,w)$ 本身满足方程 (46), 则 $\beta(\tau) = \Psi T^{-1}\tau$, 其中 $\Psi = [1,0,\cdots,0]$. 那么式 (51) 化简为如下的线性备选内模:

$$\dot{\eta} = M\eta + Nu,\ \ u = \Psi T^{-1}\eta \tag{52}$$

由于 $M$ 是常数矩阵, 系统 (52) 显然是 ISS 的且在 $u = 0$ 时是全局指数稳定的. 此类备选内模称为标准线性内模[73, 61]. 该内模可用于解决输出反馈系统[61]、严格反馈系统[74] 和前馈系统[76] 的全局鲁棒输出调节问题.

值得一提的是, 在此特例中, $(\Psi,\Phi)$ 是可观测的. 文献 [77] 中已经证明, 在假设 7 的条件下, 如果 $\boldsymbol{u}$ 是关于 $v$ 的多项式, 那么它总会满足方程 (46) 并且矩阵 $\Phi$ 的所有特征值都有零实部. 如此, 矩阵 $\Phi$ 和 Hurwitz 矩阵 $M$ 的谱不相交, 故而方程 (50) 一定存在非奇异解 $T$.

### 2.3.2 处理非线性外部系统的备选内模[78]

内模 (51) 和内模 (52) 是否存在都取决于形如 (46) 的方程是否有解. 到目前为止, 关于方程 (46) 可解性的讨论都在外部系统满足假设 7 的前提下展开. 然而, 假设 7 限制了外部系统只能产生正弦信号, 因此过于严格. 为了适应非线性外部系统, Yang 等[78] 将假设 7 修正为:

**假设 10.** 存在整数 $r$ 和 $r$ 个充分光滑的函数 $b_i(v)$, $i = 0,1,\cdots,r-1$, 使得:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^r\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^r} = &\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}t^{r-1}}\big(b_{r-1}(v)\boldsymbol{u}\big) + \cdots + \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(b_1(v)\boldsymbol{u}\big) + b_0(v)\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

在假设 10 的条件下, 令

$$\Phi_b = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} & I_{l-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$b(v) = \begin{bmatrix} b_{l-1}(v) \\ \vdots \\ b_0(v) \end{bmatrix},\ \ \Psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因为 $(\Phi_b,\Psi)$ 可观测, 对任意可控的 $(M,N)$, 其中 $M \in \mathbf{R}^{r\times r}$ 是 Hurwitz 矩阵, $N \in \mathbf{R}^{r\times 1}$, Sylvester 方程

$$T\Phi_b = MT + N\Psi$$

存在唯一非奇异解 $T$.

文献 [78] 证明了以下的动态补偿器

$$\dot{\eta} = M\eta + (N + Tb(v))u,\ \ u = \Psi T^{-1}\eta \tag{53}$$

是系统 (31) 的备选内模.

**注 5.** 内模 (53) 显然是零输入指数稳定的, 且对任意有界的 $v(t)$ 是 ISS 的. 这些性质有助于增广系统的全局镇定. 事实上, 这类内模已经用于解决含有非线性外部系统的输出反馈系统的全局鲁棒输出调节问题[78]. 另一方面, 因为备选内模 (53) 依赖于外部信号 $v$, 只有当 $v$ 可测时它才有效. 如果 $b(v)$ 与 $v$ 无关, 内模 (39) 就会简化为标准线性内模 (52).

### 2.3.3 另一种非线性备选内模[79]

另一种非线性备选内模的构造基于如下假设:

**假设 11.** 存在整数 $r$ 和充分光滑、在原点消没的函数 $g$, 使得:

$$\boldsymbol{u}^{(r)}(t) + g(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}^{(1)}(t),\cdots,\boldsymbol{u}^{(r-1)}(t)) = 0 \tag{54}$$

令 $\tau=[\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}^{(1)}(t),\cdots,\boldsymbol{u}^{(r-1)}(t)]^{\mathrm{T}}$, $g_c$ 取为局部 Lipschitz 函数, 其紧支集在紧集 $\mathcal{G}\in\mathbf{R}^r$ 上与 $g$ 一致, 令

$$\alpha_c(\tau)=\left[\begin{array}{c}\tau_2\\ \tau_3\\ \vdots\\ -g_c(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r)\end{array}\right]$$

那么另一种非线性备选内模形如下式:

$$\dot\eta=\alpha_c(\eta)+\boldsymbol{N}(u-\Psi\eta),\ \ u=\Psi T^{-1}\eta \tag{55}$$

其中, $\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{r\times1}$ 是常数向量, $\Psi$ 和 $T$ 如式 (52) 所定义. 此备选内模用于解决一类输出反馈非线性系统的半全局输出调节问题[79]. 然而, 它的缺点在于假设 11 难以验证, 除非 $\boldsymbol{u}(v,w)$ 是关于 $v$ 的多项式.

#### 2.3.4 经典非线性备选内模[80]

到目前为止, 所有备选内模都是基于对调节器方程的各种假设来构造的. 最近, 文献 [80] 提出了一种标准非线性备选内模. 假设外部系统在紧集 $V\subset\mathbf{R}^q$ 上满足泊松稳定 (Poisson stability), 即 $V=\cup_{v\in\omega(v)}$, 其中 $\omega(v)$ 指的是 $v$ 的欧米伽极限集. 对任意 $v_0\in V$, 令 $v(t,v_0)$ 为外部系统 $\dot v=a(v)$ 满足 $v(0,v_0)=v_0$ 的解. 那么, 文献 [80] 可以证明, 存在充分大的整数 $n_s$, 可控对 $(M,N)\in\mathbf{R}^{n_s\times n_s}\times\mathbf{R}^{n_s\times1}$. 其中 $M$ 是 Hurwitz 矩阵和连续映射 $\beta$: $\mathbf{R}^{n_s}\to\mathbf{R}$, 使得函数

$$\theta(v,w)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-Ms}N\boldsymbol{u}(v(s,v),w))\mathrm{d}s \tag{56}$$

对所有 $v\in V$ 和所有 $w\in W$ 存在, 其中 $W$ 是 $\mathbf{R}^{n_w}$ 中的紧集, 并且满足

$$\dot\theta=M\theta+N\beta(\theta),\ \ \boldsymbol{u}(v,w)=\beta(\theta) \tag{57}$$

令 $\alpha(\theta)=M\theta+N\beta(\theta)$. 于是, 下述动态补偿器

$$\dot\eta=M\eta+Nu,\ \ u=\beta(\eta) \tag{58}$$

就是系统 (31) 的备选内模.

由于式 (57) 中的函数 $\beta$ 仅仅是被证明存在的, 且此函数要被用于构造控制律, 所以备选内模 (58) 的可解性就依赖于函数 $\beta$ 的精确构造. 值得一提的是, 文献 [81] 讨论了如何寻找函数 $\beta$ 的近似函数. 另外, 该备选内模也被用于解决某些非最小相位非线性系统的半全局鲁棒输出调节问题[64, 80].

### 2.4 自适应输出调节

综上可知, 如果已经找到了合适的 (备选) 内模, 那么只需要进一步解决增广系统 (41) 的镇定问题, 就可以解决受控系统 (31) 的鲁棒输出调节问题. 已经有很多鲁棒控制技术成功地解决了增广系统 (41) 的鲁棒镇定问题, 例如小增益方法[24−25]、变供给函数 (Supply function) 方法[82] 和滑动模态控制[83]. 然而, 当外部系统含有不确定参数、控制方向 (或高增益的符号) 未知、外部信号和不确定参数的上界未知时, 上述鲁棒控制技术都不足以解决这些问题. 因此, 要进一步处理这些情况, 需要将鲁棒控制和自适应控制结合起来. 比如, 如果外部系统的形式为 $\dot v=A_1(\sigma)v$, 其中 $\sigma$ 是某未知参数向量, 外部系统对所有 $\sigma$ 都中立稳定, 那么鲁棒输出调节问题仍然可以通过标准线性内模 (52) 来解决. Nikiforov 首先研究了在完全未知正弦扰动的存在下, 一类非线性系统的渐近跟踪问题[73]. 随后, 对于不确定外部系统的输出调节问题, 涌现了大量研究工作, 例如文献 [84−90]. 值得一提的是, 解决含不确定外部系统的输出调节问题的方法涉及了对未知参量 $\sigma$ 的估计, 而估计参量能否收敛于真实值是一个重要问题, 称为参数收敛问题. 最近, 文献 [91] 就这一问题进行了深入的探讨.

动态高增益技术或自调整调节器可以解决外部信号上界未知和不确定参数未知的问题[92−93]. 如果控制方向未知, 可以使用 Nussbaum 增益技术[94−97].

### 2.5 多智能体系统的协同输出调节问题

考虑如下形式的非线性系统:

$$\begin{aligned}&\dot x_i=f_i(x_i,u_i,v,w),\\&e_i=h_i(x_i,u_i,v,w),\\&y_i=h_{mi}(x_i,u_i,v,w),\quad i=1,\cdots,N\end{aligned} \tag{59}$$

其中, 对 $i=1,\cdots,N$, $x_i\in\mathbf{R}^{n_i}$, $u_i\in\mathbf{R}^{m_i}$, $y_i\in\mathbf{R}^p$ 和 $e_i\in\mathbf{R}^{p_i}$ 分别是第 $i$ 个子系统的状态、输入、测量输出和调节输出, $w\in\mathbf{R}^{n_w}$ 是不确定参量, $w=0$ 为其标称值, $v\in\mathbf{R}^q$ 是表示参考输入和扰动的外部信号, 假设它是由下述外部系统产生的:

$$\dot v=a(v) \tag{60}$$

函数 $f_i$, $h_i$, $h_{mi}$, $i=1,\cdots,N$, 以及 $a$ 都是在各自的欧氏空间里充分光滑、在原点消没的函数.

由式 (59) 和 (60) 组成的系统可以看成是 $N+1$ 个个体组成的多智能体系统, 其中外部系统是领导者而所有系统 (59) 的子系统是 $N$ 个跟随者. 关于

由式 (59) 和 (60) 组成的系统, 可以定义时变有向图 $\bar{\mathcal{G}}(t) = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}(t))$, $t \geq 0$, 其中 $\bar{\mathcal{V}} = \{0, 1, \cdots, N\}$, 0 指的是领导者系统, 而 $i = 1, \cdots, N$ 指的是系统 (59) 的第 $i$ 个子系统, 且 $\bar{\mathcal{E}}(t) \subseteq \bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{V}}$. 对每个 $i$, $j = 0, 1, \cdots, N$, $i \neq j$, $(i, j) \in \bar{\mathcal{E}}(t)$ 当且仅当控制 $u_i(t)$ 可以获得 $t$ 时刻的测量输出 $y_j(t)$. 令 $\bar{\mathcal{N}}_i(t)$, $i = 1, \cdots, N$, 表示在 $t$ 时刻节点 $i$ 的邻居集合. 那么, 动态控制律可以描述如下:

$$\begin{aligned} u_i &= k_i(z_i, y_i, y_j, j \in \bar{\mathcal{N}}_i(t)), \\ \dot{z}_i &= \zeta_i(z_i, y_i, y_j, j \in \bar{\mathcal{N}}_i(t)), \quad i = 1, \cdots, N \end{aligned} \tag{61}$$

其中, $y_0 = v$, $k_i$ 和 $\zeta_i$ 也是充分光滑、在原点消没的函数, $\eta_i \in \mathbf{R}^{n_{\eta_i}}$, $n_{\eta_i}$ 是非负整数. 如果 $\bar{\mathcal{E}}(t)$ 是时变的, 那么控制律 (61) 就是时变的. 可以发现邻居集合 $\bar{\mathcal{N}}_i(t)$, $i = 1, \cdots, N$, 对控制律 $u_i$ 施加了是否能获得测量输出 $y_j$ 的限制. 这样的控制律称为分布式控制律. 相反, 控制律 (32) 不受通讯限制, 因此称为集中式控制律. 概括地讲, 协同输出调节指的是: 给定式 (59)、(60) 和 $\bar{\mathcal{G}}(t)$, 找到形如式 (61) 的控制律, 使得闭环系统的解对所有 $t \geq 0$ 有界, 且调节输出 $e_i$, $i = 1, \cdots, N$, 渐近地趋近于原点. 由式 (59) 和 (60) 组成的多智能体系统也能看作一个普通的多输入、多输出的形如 (31) 的复合系统. 因此, 协同输出调节问题不外乎是寻找分布式控制律 (61), 来完成闭环系统中渐近跟踪和扰动抑制的目标.

协同输出调节可以看作是对于一致性、同步、编队等此类问题的概括.

和集中式控制的情况类似, 多智能体系统的协同输出调节问题也可以通过前馈控制方法和内模控制来解决. 关于前馈控制方法, 文献 [98−100] 研究了静态网络的情况, 文献 [101−102] 研究了动态网络的情况. 文献 [99, 102] 中使用的关键技术是分布式观测器的应用, 它可以渐近地产生领导者系统的信号, 同时仍然满足静态或时变通讯限制. 另一方面, 对于不确定线性多智能体系统, 用内模方法处理协同输出调节问题首见于文献 [103], 文献 [104−106] 做了进一步的研究.

最近, 基于文献 [58] 提出的非线性输出调节问题框架的集中式控制方案被拓展为分布式控制方案. 通过一类分布式内模的应用, 关于受控系统 (59) 的协同鲁棒输出调节问题可以转换为增广系统的分布式鲁棒镇定问题. 此框架已给出了严格反馈形式的非线性不确定多智能体系统的协同全局鲁棒输出调节问题的状态反馈解[107]、输出反馈形式的非线性不确定多智能体系统的协同全局鲁棒输出调节问题的输出反馈解[108] 以及一类下三角非线性不确定多智能体系统的协同半全局鲁棒输出调节问题的输出反馈解[109].

## 3 总结和展望

本文简要回顾了非线性控制领域里两个基本问题的最新进展: 镇定和输出调节. 这些问题仍在发展演化, 并将持续提出新的挑战, 而现有的工具不足以应对这些挑战. 网络化、时变的、时滞的、混杂的或是随机的非线性系统将被深入探究. 基于量化特性的非线性系统的量化反馈镇定或输出调节问题已经起步, 并预期成为未来研究的重要方向之一. 推进此类新兴课题的研究需要发展更先进的、新颖的非线性反馈设计方法.

## 致谢

本文原文为英文, 由北京大学博士研究生于璐同学翻译为中文. 作者对于璐同学表示衷心致谢.

## References

1 Kokotović P V, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001, **37**(5): 637−662

2 Sontag E D. Input to state stability: basic concepts and results. Nistri P, Stefani G [Editor]. *Nonlinear and Optimal Control Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 163−220

3 Artstein Z. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1983, **7**(11): 1163−1173

4 Sontag E D. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems* (Second edition). New York: Springer-Verlag, 1998

5 Jiang Z P, Praly L. Preliminary results about robust Lagrange stability in adaptive non-linear regulation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1992, **6**(4): 285−307

6 Krstić M, Kanellakopoulos I, Kokotović P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995

7 Praly L, Bastin G, Pomet J B, Jiang Z P. Adaptive stabilization of nonlinear systems. Kokotović P V [Editor]. *Foundations of Adaptive Control*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 347−434

8 Freeman R, Kokotović P V. *Robust Nonlinear Control Design*. Boston: Birkhäuser, 1996.

9 Primbs J A, Nevistic V, Doyle J C. Nonlinear optimal control: a control Lyapunov function and receding horizon perspective. *Asian Journal of Control*, 1999, **1**(1): 14−24

10 Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1048−1060

11 Karafyllis I, Jiang Z P. Necessary and sufficient Lyapunov-like conditions for robust nonlinear stabilization. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 2010, **16**: 887−928

12 Ogren P, Egerstedt M, Hu X M. A control Lyapunov function approach to multiagent coordination. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, **18**(5): 847−851

13 Tsinias J. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1989, **2**(4): 343−357

14 Kokotović P V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 1992, **12**(3): 7−17

15 Coron J M, Praly L. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems and Control Letters*, 1991, **17**(2): 89−104

16 Iggidr A, Sallet G. Nonlinear stabilization by adding integrators. *Kybernetika*, 1994, **30**(5): 499−506

17 Outbib R, Jghima H. Comments on the stabilization of nonlinear systems by adding an integrator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(12): 1804−1807

18 Ceragioli F, De Persis C. Discontinuous stabilization of nonlinear systems: quantized and switching controls. *Systems & Control Letters*, 2007, **56**(7−8): 461−473

19 Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties. *Automatica*, 1998, **34**(7): 825−840

20 Marino R, Tomei P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. London: Prentice-Hall, 1995

21 Hong Y G, Jiang Z P, Feng G. Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2010, **48**(7): 4395−4418

22 Tanner H G, Kyriakopoulos K J. Backstepping for nonsmooth systems. *Automatica*, 2003, **39**(7): 1259−1265

23 Zhou J, Wen C Y. *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-variations*. London: Springer, 2008

24 Jiang Z P, Mareels I M Y. A small-gain control method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(3): 292−308

25 Jiang Z P, Teel A R, Praly L. Small-gain theorem for ISS systems and applications. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1994, **7**(2): 95−120

26 Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(4): 435−443

27 Karafyllis I, Jiang Z P. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*. London: Springer, 2011

28 Ito H, Jiang Z P, Dashkovskiy S N, Rüffer B S. Robust stability of networks of iISS systems: construction of sum-type Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(5): 1192−1207

29 Jiang Z P, Mareels I M Y, Wang Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems. *Automatica*, 1996, **32**(8): 1211−1215

30 Liu T F, Hill D J, Jiang Z P. Lyapunov formulation of ISS cyclic-small-gain in continuous-time dynamical networks. *Automatica*, 2011, **47**(9): 2088−2093

31 Liu T F, Jiang Z P, Hill D J. Lyapunov formulation of the ISS cyclic-small-gain theorem for hybrid dynamical networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2012, **6**(4): 988−1001

32 Jiang Z P, Mareels I, Hill D J, Huang J. A unifying framework for global regulation via nonlinear output feedback: from ISS to iISS. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 549−562

33 Liu T F, Jiang Z P, Hill D J. A sector bound approach to feedback control of nonlinear systems with state quantization. *Automatica*, 2012, **48**(1): 145−152

34 Liu T F, Jiang Z P, Hill D J. Small-gain based output-feedback controller design for a class of nonlinear systems with actuator dynamic quantization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(5): 1326−1332

35 Liu T F, Jiang Z P, Hill D J. Quantized stabilization of strict-feedback nonlinear systems based on ISS cyclic-small-gain theorem. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2012, **24**(1−2): 75−110

36 Liu T F, Jiang Z P. Distributed formation control of nonholonomic mobile robots without global position measurements. *Automatica*, 2013, **49**(2): 592−600

37 Liu T F, Jiang Z P. Distributed output-feedback control of nonlinear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, DOI: 10.1109/TAC.2013.2257616

38 Brockett R W, Liberzon D. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(7): 1279−1289

39 Delchamps D F. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(8): 916−924

40 Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(9): 1384−1400

41 Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(11): 1698−1711

42 Miller R K, Mousa M S, Michel A N. Quantization and overflow effects in digital implementations of linear dynamic controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, **33**(7): 698−704

43 De Persis C. Robust stabilization of nonlinear systems by quantized and ternary control. *Systems & Control Letters*, 2009, **58**(8): 602−608

44 Liberzon D, Hespanha J P. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(6): 910−915

45 Liberzon D, Nešić D. Input-to-state stabilization of linear systems with quantized state measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(5): 767−781

46 Liberzon D. Observer-based quantized output feedback control of nonlinear systems. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: IFAC, 2008. 8039−8043

47 Praly L, Jiang Z P. Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics. *Systems and Control Letters*, 1993, **21**(1): 19−33

48 Huang Jie. An overview on the output regulation problem. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2011, **31**(9): 1055−1081
(黄捷. 输出调节问题综述. 系统科学与数学, 2011, **31**(9): 1055−1081)

49 Huang J. Cooperative output regulation of multi-agent systems. In: Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation. Beijing, China: IEEE, 2012. 1−5

50 Huang J. Output regulation of nonlinear systems with nonhyperbolic zero dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(8): 1497−1500

51 Huang J, Rugh W J. Stabilization on zero-error manifolds and the nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(7): 1009−1013

52 Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(2): 131−140

53 Pavlov A, van de Wouw N, Nijmeijer H. *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems: A Convergent Dynamics Approach*. Boston: Birkhäuser, 2005

54 Tarn T J, Sanposh P, Cheng D, Zhang M. Output regulation for nonlinear systems: some recent theoretical and experimental results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**(4): 605−610

55 Byrnes C I, Delli P F, Isidori A, Kang W. Structurally stable output regulation of nonlinear systems. *Automatica*, 1997, **33**(3): 369−385

56 Huang J. Asymptotic tracking and disturbance rejection in uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6): 1118−1122

57 Huang J, Rugh W J. On a nonlinear multivariable servomechanism problem. *Automatica*, 1990, **26**(6): 963−972

58 Huang J, Chen Z Y. A general framework for tackling the output regulation problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2203−2218

59 Khalil H K. Robust servomechanism output feedback controllers for feedback linearizable systems. *Automatica*, 1994, **30**(10): 1587−1599

60 Khalil H K. On the design of robust servomechanisms for minimum phase nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2000, **10**(5): 339−361

61 Serrani A, Isidori A. Global robust output regulation for a class of nonlinear systems. *System & Control Letters*, 2000, **39**(2): 133−139

62 Byrnes C I, Isidori A. Limit sets, zero dynamics, and internal models in the problem of nonlinear output regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(10): 1712−1723

63 Isidori A, Marconi L, Serrani A. *Robust Autonomous Guidance: An Internal Model Approach*. Berlin: Springer, 2003

64 Marconi L, Praly L, Isidori A. Robust asymptotic stabilization of nonlinear systems with non-hyperbolic zero dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(4): 907−921

65 Davison E J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, **21**(1): 25−34

66 Francis B A. The linear multivariable regulator problem. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, **15**(3): 486−505

67 Francis B A, Wonham W M. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 1976, **12**(5): 457−465

68 Huang J, Lin C F. Internal model principle and robust control of nonlinear systems. In: Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio, Texas, USA, 1993. 1501−1506

69 Huang J, Lin C F. On a robust nonlinear servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(7): 1510−1513

70 Huang J. Nonlinear output regulation: theory and applications. *Advance in Design and Control*. Philadelphia, Pa, USA: SIAM, 2004

71 Huang J. K-fold exosystem and the robust nonlinear servomechanism problem. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1998, **120**(1): 149−153

72 Chen Z Y, Huang J. Robust output regulation with nonlinear exosystems. *Automatica*, 2005, **41**(8): 1447−1454

73 Nikiforov V O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances. *European Journal of Control*, 1998, **4**(2): 132−139

74 Chen Z Y, Huang J. Global robust output regulation for output feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(1): 117−121

75 Huang J, Hu G Q. Control design for the nonlinear benchmark problem via the output regulation method. *Journal of Control Theory and Applications*, 2004, **2**(1): 11−19

76 Chen T S, Huang J. Global robust output regulation by state feedback for strict feedforward systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(9): 2157−2163

77 Huang J. Remarks on the robust output regulation problem for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(12): 2028−2031

78 Yang X, Huang J. New results on robust output regulation of nonlinear systems with a nonlinear exosystem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(15): 1703−1719

79 Byrnes C I, Isidori A. Nonlinear internal models for output regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(12): 2244−2247

80 Marconi L, Praly L, Isidori A. Output stabilization via nonlinear Luenberger observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, **45**(6): 2277−2298

81 Marconi L, Praly L. Uniform practical nonlinear output regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 1184−1202

82 Sontag E D, Teel A. Changing supply functions in input/state stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(8): 1476−1478

83 Seshagiri S, Khalil H K. Robust output regulation of minimum phase nonlinear systems using conditional servocompensators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, **15**(2): 83−102

84 Chen Z Y, Huang J. Global tracking of uncertain nonlinear cascaded systems with adaptive internal model. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, Nevada USA: IEEE, 2002. 3855−3862

85 Ding Z T. Global stabilization and disturbance suppression of a class of nonlinear systems with uncertain internal model. *Automatica*, 2003, **39**(3): 471−479

86 Ding Z. Adaptive estimation and rejection of unknown sinusoidal disturbances in a class of non-minimum-phase nonlinear systems. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 2006, **153**(4): 379−386

87 Marino R, Santosuosso G L, Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 2003, **39**(10): 1755−1761

88 Serrani A, Isidori A, Marconi L. Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(8): 1178−1194

89 Xu D B, Huang J. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems and its applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2010, **57**(3): 691−702

90 Ye X D, Huang J. Decentralized adaptive output regulation for a class of large-scale nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(2): 276−281

91 Liu L, Chen Z Y, Huang J. Parameter convergence and minimal internal model with an adaptive output regulation problem. *Automatica*, 2009, **45**(5): 1306−1311

92 Chen Z Y, Huang J. Dissipativity, stabilization, and regulation of cascade-connected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(5): 635−650

93 Ding Z T. Universal disturbance rejection for nonlinear systems in output feedback form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(7): 1222−1226

94 Nussbaum R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems and Control Letters*, 1983, **3**(5): 243−246

95 Liu L, Huang J. Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequency gain sign. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(4): 625−631

96 Liu L, Huang J. Global robust output regulation of lower triangular systems with unknown control direction. *Automatica*, 2008, **44**(5): 1278−1284

97 Xu D B, Huang J. Output regulation for output feedback systems with iISS inverse dynamics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2011, **133**(4): 044503-1−044503-4

98 Huang J. Remarks on "synchronized output regulation of linear networked systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(3): 630−631

99 Su Y F, Huang J. Cooperative output regulation of linear multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(4): 1062−1066

100 Xiang J, Wei W, Li Y J. Synchronized output regulation of linear networked systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1336−1341

101 Hong Y G, Wang X L, Jiang Z P. Distributed output regulation of leader-follower multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2013, **23**(1): 48−66

102 Su Y F, Huang J. Cooperative output regulation with application to multi-agent consensus under switching network. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2012, **42**(3): 864−875

103 Wang X L, Hong Y G, Huang J, Jiang Z P. A distributed control approach to a robust output regulation problem for multi-agent linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(12): 2891−2895

104 Su Y F, Huang J. Cooperative robust output regulation of a class of heterogeneous linear uncertain multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, DOI: 10.1002/rnc.3027

105 Su Y, Hong Y, Huang J. A general result on the robust cooperative output regulation for linear uncertain multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(5): 1275−1279

106 Wang X L, Han F L. Robust coordination control of switching multi-agent systems via output regulation approach. *Kybernetika*, 2011, **47**(5): 755−772

107 Su Y F, Huang J. Global robust output regulation for nonlinear multi-agent systems in strict feedback form. In: Proceedings of the 12th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. Guangzhou, China: IEEE, 2012. 436−441

108 Dong Y, Huang J. Cooperative global robust output regulation for nonlinear multi-agent systems in output feedback form. In: Proceedings of the 12th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. Guangzhou, China: IEEE, 2012. 10−12

109 Su Y, Huang J. Cooperative semi-global robust output regulation of nonlinear uncertain multi-agent systems. In: Proceedings of the 2013 American Control Conference. Washington, DC, USA: ACC, 2013. 2041−2046

**姜钟平** 教授. 1988 年获武汉大学数学系学士学位, 1989 年获巴黎南大统计学硕士学位, 1993 年获法国高等矿业大学自动控制与数学博士学位, 其后在法国、澳大利亚和美国多所高校和研究所从事研究工作. 现任美国纽约大学理工学院教授. 主要研究方向为稳定性理论, 鲁棒自适应非线性控制及其在通讯网络、欠驱动力学系统、多智能体和系统生理学中的应用. 本文通信作者.
E-mail: zhongping_jiang@yahoo.com
(**JIANG Zhong-Ping** Received the bachelor degree in mathematics from Wuhan University, China, in 1988, the master degree in statistics from the University of Paris XI, France, in 1989, and the Ph. D. degree in automatic control and mathematics from the Ecole des Mines de Paris, France, in 1993. He has held appointments with institutions in France, Australia, and USA. He is a professor in electrical and computer engineering at the Polytechnic Institute of New York University. His research interest covers stability theory, robust, adaptive, and distributed nonlinear control, adaptive dynamic programming and their applications to information, mechanical and biological systems. Corresponding author of this paper.)

**黄 捷** 香港中文大学机械与自动化学系教授. 主要研究方向为自动控制, 机器人与自动化, 导航与飞行控制.
E-mail: jhuang@mae.cuhk.edu.hk
(**HUANG Jie** Professor in the Department of Mechanical and Automation Engineering, the Chinese University of Hong Kong. His research interest covers automatic control, robotics and automation, and guidance and control of flight vehicles.)