

带有迭代学习前馈的快速路无模型自适应入口匝道控制

侯忠生¹ 晏静文¹

摘要 提出了一种新的带有迭代学习前馈的快速路无模型自适应入口匝道控制算法. 模块化的前馈迭代学习和反馈 MFAC 控制器设计方案使所设计的控制系统有效地利用了交通流的周期性特征, 提高了控制品质. 严格的数学推导证明了该方法的收敛性. 仿真研究及比较结果验证了所提算法的有效性.

关键词 迭代学习控制, 无模型自适应控制, 快速路匝道控制, 收敛性分析, 仿真研究

中图分类号 TP273.22

Model Free Adaptive Control Based Freeway Ramp Metering with Feedforward Iterative Learning Controller

HOU Zhong-Sheng¹ YAN Jing-Wen¹

Abstract In this work, a novel model-free adaptive control based freeway ramp metering strategy with feedforward iterative learning is proposed. The modularized controller design with feedforward iterative learning controller added on to the feedback model free adaptive control (MFAC) controller makes use of the periodicity of the traffic flow effectively and improves the controller performance greatly. With rigorous analysis, the proposed control scheme guarantees the asymptotic convergences along the iteration axis. Intensive simulations show the effectiveness of the proposed strategy.

Key words Iterative learning control (ILC), model free adaptive control (MFAC), freeway ramp metering, convergence analysis, simulation studies

快速路拥堵已经成为当前大城市交通的主要问题之一, 它导致了出行延误, 使得快速路基础设施不能得到高效率的利用, 降低了交通的安全性, 增加了燃料消耗, 加剧了城市空气污染. 所以, 为了缓和或防止交通拥堵, 使快速路的效率更高, 对快速路交通流进行控制十分必要.

快速路交通控制一般可分为入口匝道控制、主线速度控制和通道控制. 匝道控制是最常用也是最有效的控制方法^[1-2]. 匝道控制是通过在入口匝道处设置交通信号灯, 调节流入快速路的车流量, 使得快速路上的交通流的密度维持在一个期望的水平上, 从而可以避免和预防交通流的常发性拥堵和部分偶发性拥堵. 匝道控制如果应用得当, 可以有效缓解快速路拥堵并提高快速路的利用率^[1].

入口匝道控制的方法已有很多, 如: 数学规划及类似方法^[3]、线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR)^[4]、PI 型控制器^[5-6]、基于神经网络的函数逼近^[7]、优化及优化控制理论^[8] 等. 根据

文献 [1], 这些方法可以归为三类: 定时控制策略、局部动态控制策略和系统控制策略. 定时控制策略基于简单的静态交通流模型和历史数据; 局部动态控制策略根据某个入口匝道邻近路段的实时交通条件而实时调整该入口匝道的流量; 系统控制策略根据整个交通系统的交通状况来实时调整系统内多个入口匝道的流量. 定时控制策略的效果是最差的. 局部动态控制在设计和实施上都比系统控制要容易得多, 并且, 实践证明在很多情况下, 局部动态控制的效果并不比系统控制的效果差^[1, 9].

在众多的控制方法中, 目前应用最广的是 ALINEA 入口匝道控制方法, 它是一种局部动态控制策略, 属于 PI 型控制, 是无模型的控制方法, 即不需要对交通系统建模, 控制器的设计仅用到系统的 I/O 数据, 实现简单. 然而, PI 型控制器对于具有强非线性、时变、结构及参数不确定性的系统控制效果不好, 没有理论分析结果保证其稳定性, 这就意味着, 当交通系统的结构或参数发生变化时, ALINEA 很难保证其控制品质, 而交通系统这样复杂的系统, 在很多外界因素的影响下, 如天气的变化, 其结构或参数会发生变化^[10].

文献 [11] 将无模型自适应控制 (Model free adaptive control, MFAC) 方法应用到入口匝道控制中, 并将其控制效果与 ALINEA 进行了比较, 验证了用无模型自适应控制方法控制入口匝道的效果比 ALINEA 更好.

收稿日期 2008-03-24 收修改稿日期 2008-11-06
Received March 24, 2008; in revised form November 6, 2008
国家自然科学基金重点项目 (60834001), 国家自然科学基金面上项目 (60774022) 资助
Supported by State Key Program of National Natural Science Foundation of China (60834001) and General Program of National Natural Science Foundation of China (60774022)
1. 北京交通大学电子信息工程学院先进控制系统研究所 北京 100044
1. Advanced Control Systems Laboratory of School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00588

无模型自适应控制是由侯忠生提出的^[12], 其基本思想是利用一个新引入的伪梯度向量 (或伪 Jacobi 矩阵) 和伪阶数的概念, 在受控系统轨线附近用一系列的动态线性时变模型 (紧格式、偏格式、全格式线性化模型) 来代替一般离散时间非线性系统, 并仅用受控系统的 I/O 数据来在线估计系统的伪梯度向量, 从而实现非线性系统的 MFAC^[12-15]. 该方法控制器设计仅用受控系统的 I/O 数据, 不包括任何受控系统的模型信息, 能够实现受控系统的参数自适应控制和结构自适应控制. 目前, 此类无模型自适应控制方法已经在铸模、电机^[16-17]、化工、温度、压力等领域^[18-19]、交通控制^[11]、工程结构减震^[20]、板材成形^[21] 中得到成功的应用. 实际应用、仿真研究和理论研究均已表明 MFAC 技术能够处理具有强非线性和时变性系统的控制问题.

值得指出的是, 宏观交通流模式是具有重复性的, 每天的拥堵往往发生在相同的时间、相同的地点. 不同天的交通流具有非常强的重复性, 至少是每周的同一天, 如两个星期的周一. 然而, 上面提到的控制方法都不能充分利用交通流的这种明显的特点, 因而不能从这种重复中得到经验和使得控制方案的效果得到改进, 每次重复的控制效果都一样.

迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 最初由 Arimoto 于 1984 年提出, 是专门针对在有限时间内具有重复性系统的一种控制方法. 迭代学习控制的控制输入是由前几次迭代同时时刻的控制输入和前几次迭代不同时刻的输出误差的某种函数来构造的. 迭代学习控制的收敛性是在迭代轴意义下的收敛性, 对时间轴来说实现的是完全跟踪性能. 需要指出的是用完全跟踪收敛性来描述交通控制系统的性能是非常合适的, 传统的沿时间轴的渐近收敛性, 理论上讲是在时间充分大以后才收敛的, 这对交通信号控制系统来说是不合适的, 而完全跟踪收敛则要求从一开始就要满足收敛性的要求, 而这正是交通信号控制系统所必须满足的. 基于迭代学习控制的快速路入口匝道控制系统首先由 Hou 提出^[22], 后来又给出基于迭代学习控制的速度控制方案^[23] 等.

另外, 对离散时间系统, 高增益反馈由于一般系统具有饱和和执行器的原因而失去实际意义^[24], 因此利用前馈补偿来设计出避免出现高增益反馈的控制系统是一个较好的选择, 为此, 基于 ILC 和 MFAC 的无模型本质, 本文设计了基于迭代学习前馈和 MFAC 反馈的模块化方案, 该方案可使 MFAC 与 ILC 优势互补地工作, 即对于已安装无模型自适应控制器的入口匝道, 不需要对已有的装置和系统做任何改动, 只需在已有的反馈系统中加入一个外环迭代学习控制器即可. MFAC 反馈控制器主要用于实现系统镇定任务, ILC 前馈控制器负责提高控制

系统的品质并实现完全跟踪任务.

本文的结构如下: 在第 1 节中, 给出了交通流模型及问题描述; 第 2 节提出了基于迭代学习控制的快速路出入口匝道 MFAC 方案及其收敛性分析; 第 3 节为仿真研究; 最后是结论.

1 交通流模型及问题描述

1.1 交通流模型

本文用到的交通流模型是 Papageorgiou 于 1989 年提出的^[25]. 该时空离散模型将所描述的一条快速路分为多个路段, 每个路段最多有一个入口匝道和一个出口匝道, 如图 1 所示. 交通流模型如下

$$\rho_i(k+1) = \rho_i(k) + \frac{T}{L_i} [q_{i-1}(k) - q_i(k) + r_i(k) - s_i(k)] \quad (1)$$

$$q_i(k) = \rho_i(k) v_i(k) \quad (2)$$

$$v_i(k+1) = v_i(k) + \frac{T}{\tau} [V(\rho_i(k)) - v_i(k)] + \frac{T}{L_i} v_i(k) [v_{i-1}(k) - v_i(k)] - \frac{T\nu}{L_i\tau} \frac{[\rho_{i+1}(k) - \rho_i(k)]}{[\rho_i(k) + \kappa]} \quad (3)$$

$$V(\rho_i(k)) = v_{free} \left(1 - \left[\frac{\rho_i(k)}{\rho_{jam}} \right]^l \right)^m \quad (4)$$

式中 T 是采样周期 (小时), $k = \{0, 1, \dots, K\}$ 表示第 k 个采样间隔, $i = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示第 i 个快速路路段, N 表示路段的总数. 模型变量的含义如下:

$\rho_i(k)$ 表示路段 i 在第 k 时段的平均密度 (veh/lane/km); $v_i(k)$ 表示路段 i 在第 k 时段的平均速度 (km/h); $q_i(k)$ 表示第 k 时段从 i 到 $i+1$ 路段的流量 (veh/h); $r_i(k)$ 表示第 k 时段从入口匝道进入路段 i 的流量 (veh/h); $s_i(k)$ 表示第 k 时段从出口匝道流出路段 i 的流量 (veh/h); L_i 表示路段 i 的长度 (km); v_{free} 和 ρ_{jam} 分别是自由流速度和单个车道的最大可能密度; τ, ν, κ, l, m 是常参数, 反映特定交通系统的道路几何特点、车辆特征、驾驶员行为等.

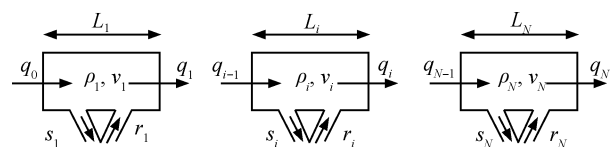


图1 快速路路段划分示意图

Fig. 1 A freeway segment subdivided into sections

1.2 边界条件

边界条件如下

$$\rho_0(k) = \frac{q_0(k)}{v_1(k)} \quad (5)$$

$$v_0(k) = v_1(k) \quad (6)$$

$$\rho_{N+1}(k) = \rho_N(k) \quad (7)$$

$$v_{N+1}(k) = v_N(k), \forall k \quad (8)$$

1.3 控制目标

控制目标是寻找合适的控制输入即入口匝道流量 $r_i(k)$, 使得入口匝道所在路段的密度收敛于期望密度 $\rho_{i,desired}(k)$.

很显然, 对于宏观交通流这样的强非线性、不确定性动态模型, 即使在模型完全已知的情况下, 应用最优控制或自适应控制等技术计算出合适的控制输入也是很困难的.

1.4 模型转换及假设条件

将宏观交通流模型表达式 (2) 代入式 (1) 可得:

$$\begin{aligned} \rho_i(k+1) = & a_i(k)\rho_i(k) + b_i(k)\rho_{i-1}(k) + \\ & c_i(k)r_i(k) - c_i(k)s_i(k) \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$a_i(k) = 1 - \frac{T}{L_i}v_i(k), \quad b_i(k) = \frac{T}{L_i}v_{i-1}(k), \quad c_i(k) = \frac{T}{L_i}$$

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= [\rho_1(k), \rho_2(k), \dots, \rho_N(k)]^T \\ \mathbf{u}(k) &= [r_1(k), r_2(k), \dots, r_N(k)]^T \\ \boldsymbol{\xi}(k) &= [s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)]^T \end{aligned}$$

则模型 (1)~(4) 可以写成如下的输入输出表达式

$$\mathbf{y}_n(k+1) = f(\mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\xi}(k)) \quad (10)$$

其中 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是相应的向量值函数. $\boldsymbol{\xi}(k)$ 是第 k 时段由出口匝道流出快速路的流量, 是重复性的未知干扰. 下标 n 表示迭代次数. 在交通系统中可以理解为天, 或者为不同周的同一天, 如不同周的星期一.

假设 1. 函数 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 在一个紧集 Ω 上满足一致全局 Lipschitz 条件, 即

$$\|f(\mathbf{u}_1(k), \mathbf{y}_1(k), \boldsymbol{\xi}(k)) - f(\mathbf{u}_2(k), \mathbf{y}_2(k), \boldsymbol{\xi}(k))\| \leq k_u \|\mathbf{u}_1(k) - \mathbf{u}_2(k)\| + k_y \|\mathbf{y}_1(k) - \mathbf{y}_2(k)\|$$

其中 k_u, k_y 是 Lipschitz 常数.

假设 2. 给定期望轨迹 $\mathbf{y}_d(k)$ ($k \in [0, K]$), 存在唯一有界的控制 $\mathbf{u}_d(k)$ ($k \in [0, K]$), 使得

$$\mathbf{y}_d(k+1) = f(\mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\xi}(k))$$

注 1. 假设 1 要求交通流模型是一致全局 Lipschitz 的, 针对交通流系统, 这个条件是能满足的, 这是因为交通流模型 (1)~(4) 在任意紧集 Ω 上对于所有变量都是连续可微的. 系统的状态 (密度和速度) 在实际中也不可能是无限的, 且时间间隔也是有限的. 假设 2 的要求也是合理的, 如果这个条件不满足, 问题的控制任务就是一个不可解决的问题.

2 基于迭代学习的无模型自适应入口匝道控制及收敛性分析

基于迭代学习的无模型自适应入口匝道控制系统的控制律如下

$$\mathbf{u}_n(k) = \mathbf{u}_n^f(k) + \mathbf{u}_n^b(k) \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_n^f(k) = \mathbf{u}_{n-1}^f(k) + \beta \mathbf{e}_{n-1}(k+1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^b(k) = & \mathbf{u}_n^b(k-1) + \frac{\rho \hat{\phi}_n(k)}{\lambda + \|\hat{\phi}_n(k)\|^2} \\ & [\mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_n(k)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{n,i}(k) = & \hat{\phi}_{n,i}(k-1) + \frac{\eta \Delta u_{n,i}^b(k-1)}{\mu + \|\Delta u_{n,i}^b(k-1)\|^2} \times \\ & [\Delta y_{n,i}(k) - \hat{\phi}_{n,i}(k-1) \Delta u_{n,i}^b(k-1)] \end{aligned} \quad (14)$$

$\hat{\phi}_{n,i}(k) = \hat{\phi}_{n,i}(1)$, 若 $\hat{\phi}_{n,i}(k) \leq \varepsilon$ 或 $|\Delta u_{n,i}^b(k-1)| \leq \varepsilon$. 这里的下标 n 表示第 n 次迭代; $\Delta \mathbf{u}_n^b(k) = \mathbf{u}_n^b(k) - \mathbf{u}_n^b(k-1)$; $\Delta u_{n,i}^b(k)$ 是 $\Delta \mathbf{u}_n^b(k)$ 的第 i 个元素; $\Delta \mathbf{y}_n(k) = \mathbf{y}_n(k) - \mathbf{y}_n(k-1)$; $\Delta y_{n,i}(k)$ 是 $\Delta \mathbf{y}_n(k)$ 的第 i 个元素; η, ρ, μ, λ 是权重因子; ε 是一个充分小的正数; $\hat{\phi}_n(k) = \text{diag}\{\hat{\phi}_{n,1}(k), \hat{\phi}_{n,2}(k), \dots, \hat{\phi}_{n,N}(k)\}$ 为系统的伪偏导数矩阵, $\hat{\phi}_{n,i}(k)$ 通过受控系统的 I/O 数据利用算法 (14) 在线获取; $\hat{\phi}_{n,i}(1)$ 是 $\hat{\phi}_{n,i}(k)$ 的初值^[15]. $\mathbf{e}_n(k) = \mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_n(k)$ 表示第 n 次迭代的跟踪误差. $\mathbf{u}_n^f$ 表示前馈迭代学习控制部分, $\mathbf{u}_n^b$ 表示原有的 MFAC 反馈部分. 可以看出, 反馈和前馈相互独立工作. 对于已有的 MFAC 控制器 (13) 和 (14), 只需在外环加上迭代学习控制器 (12) 即可. 前馈 ILC 控制器具有学习功能, 负责提高控制系统的品质并实现完全跟踪, 反馈 MFAC 则负责实现系统的镇定任务, 模块化的设计可以在不改变原有 MFAC 控制器设置的基础上直接加入迭代学习控制器.

基于迭代学习的无模型自适应入口匝道控制系统的结构如图2(见下页)所示。

定理 1. 由式(10)描述的交通系统满足假设1和2, 在控制算法(11)~(14)的作用下, 若 $\|I - \beta f_u(\zeta_n)\| < 1$, 则有: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \sigma$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_n(k)\|_\lambda \leq \sigma$, 其中 $\sigma > 0$ 为适当选取的常数; 当满足 $\|\mathbf{e}_n(0)\| = 0$, $\|\mathbf{u}_n^b(0)\| = 0$ 及 $\mathbf{y}_d(k)$ 为常数时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_n(k)\|_\lambda = 0$.

证明. 见附录。

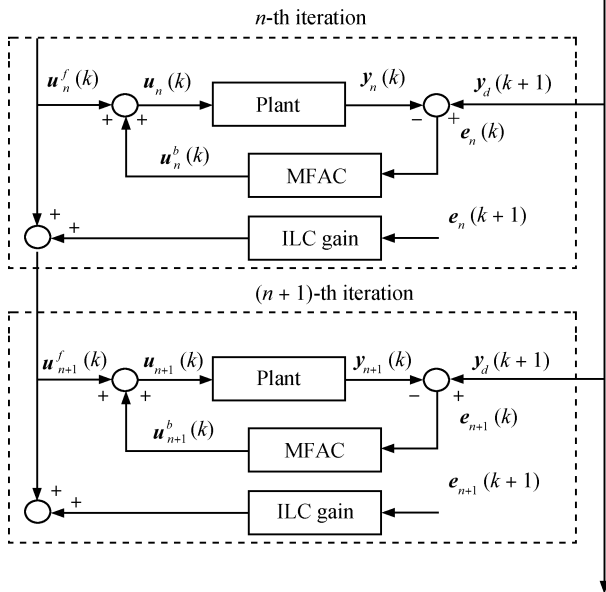


图2 基于迭代学习的无模型自适应入口匝道控制系统结构图

Fig.2 Block diagram of iterative learning based MFAC ramp metering control system

注 2. 从上述定理中我们可以看出控制系统的收敛性仅与前馈迭代学习的学习增益的选择有关, 而与宏观交通流模型中的其他参数无关, 实际上 $f_u = \text{diag}\{T/L_1, T/L_2, \dots, T/L_N\}$, 所以, 我们可以选取 $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$, 使 β_i 满足 $0 < \beta_i < 2L_i/T$. 这里的 L_i 和 T 都是已知的。

注 3. $\mathbf{e}_n(0) = \mathbf{y}_d(0) - \mathbf{y}_n(0)$, 我们可以选取 $\mathbf{y}_d(0)$, 使 $\mathbf{y}_d(0) = \mathbf{y}_n(0)$, $\|\mathbf{e}_n(0)\| = 0$ 的条件即可满足. 对交通系统来说, 初始时刻我们可以取每天的凌晨0点作为每天的起点。

3 仿真研究

考虑一段单车道快速路, 长度为6 km, 分为12节路段, 每段长度为0.5 km, 期望密度定为 $y_d = 30 \text{ veh/lane/km}$ (临界密度理论值为 $36.75 \text{ veh/lane/km}$). 出口匝道流量视为快速路交通系统的重复性外界干扰. 假设进入第一路段的流量为 1500 veh/h . 各段的初始密度和平

均速度见表1. 模型中的参数如下: $\rho_{jam} = 80 \text{ veh/lane/km}$, $v_{free} = 80 \text{ km/h}$, $l = 1.8$, $m = 1.7$, $\kappa = 13 \text{ veh/km}$, $\tau = 0.1 \text{ h}$, $T = 0.00417 \text{ h}$, $\nu = 35 \text{ km}^2/\text{h}^{[22-23]}$.

表1 交通流模型相关初始值

Table 1 Initial values associated with the traffic model

路段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\rho_i(0)$	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
$v_i(0)$	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

仿真的路段仅在第2和第9节路段上各有一个入口匝道, 第7节路段有一个出口匝道, 交通需求和出口流量如图3所示. 梯形和谐波形状的需求和流出量描述了交通高峰期的交通流量情况。

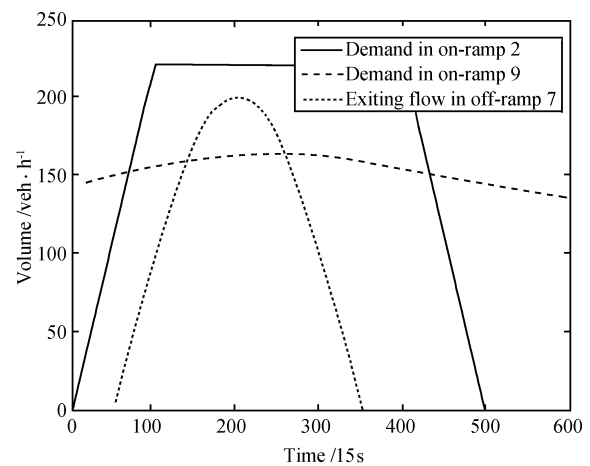


图3 第2和第9入口匝道交通需求及第7出口匝道流量

Fig.3 Traffic demands of on-ramps 2 and 9, and exiting flow of off-ramp 7

仿真如下三种情况:

情况 1. 无入口匝道控制

在无入口匝道控制的情况下的仿真结果见图4(见下页). 从图4的仿真结果可以看出, 第9路段之后的密度越来越高, 并已经有了向前传播的迹象, 已经超过了临界密度, 相应的速度也很慢, 显然已经发生了拥堵。

情况 2. 仅用 MFAC 控制入口匝道

仅用 MFAC 控制器(13)和(14)进行入口匝道控制情形, 调节参数取为 $\eta = 0.005$, $\rho = 0.8$, $\lambda = 0.001$, $\mu = 0.04$. 控制效果如图5(见下页)所示. 从图5(a)可以看到, 交通拥堵已经得到明显的缓解, 跟踪效果可以接受. 但是最大密度接近 $\rho = 34 \text{ veh/km/lane}$, 已经明显高出期望密度. 从图5(b)可以看到第9路段的入口匝道关闭了一段时间, 这在实际中是不允许的. 实际应用中应该设置最小流入率和最大流入率的限制. MFAC 控制方法相对于 ALINEA、DC 控制、OC 控制等的仿真比较结果可参见文献[14].

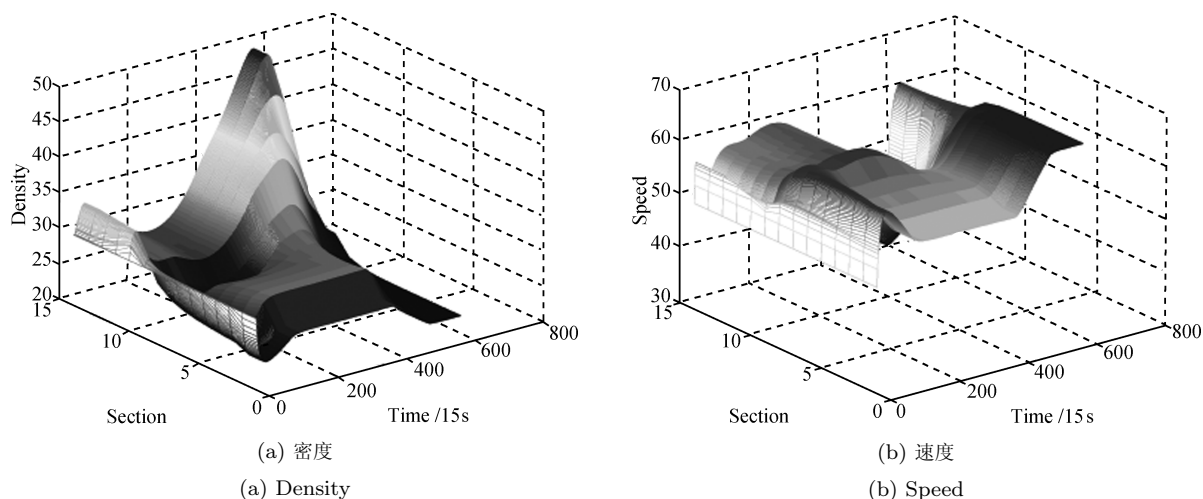


图 4 无入口匝道控制的情况

Fig. 4 Simulation results without control

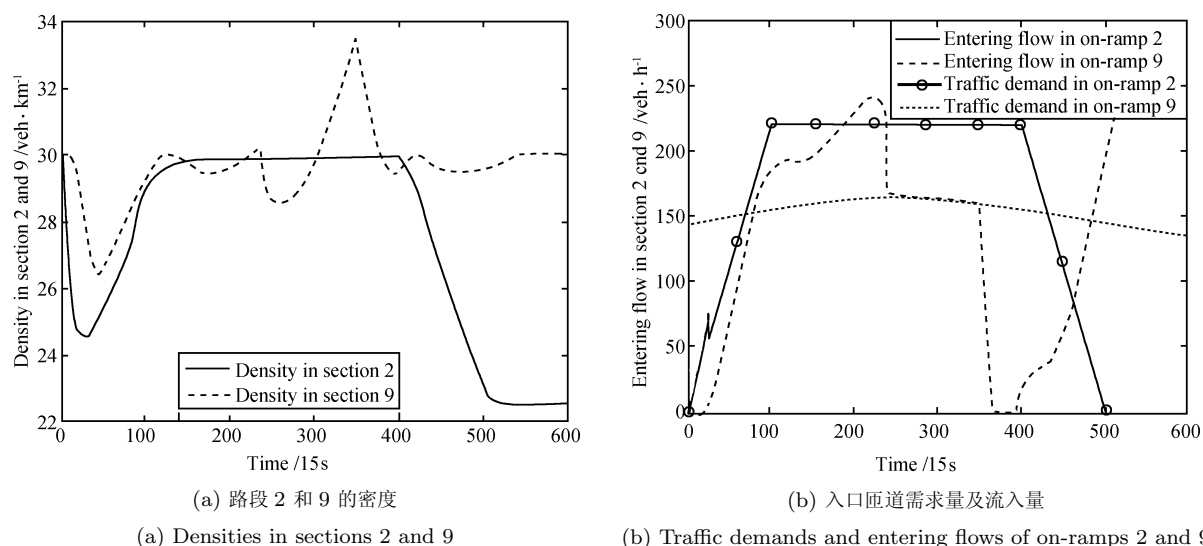


图 5 MFAC 控制入口匝道的情况

Fig. 5 Simulation results with MFAC ramp metering

情况 3. 基于迭代学习的无模型自适应入口匝道控制

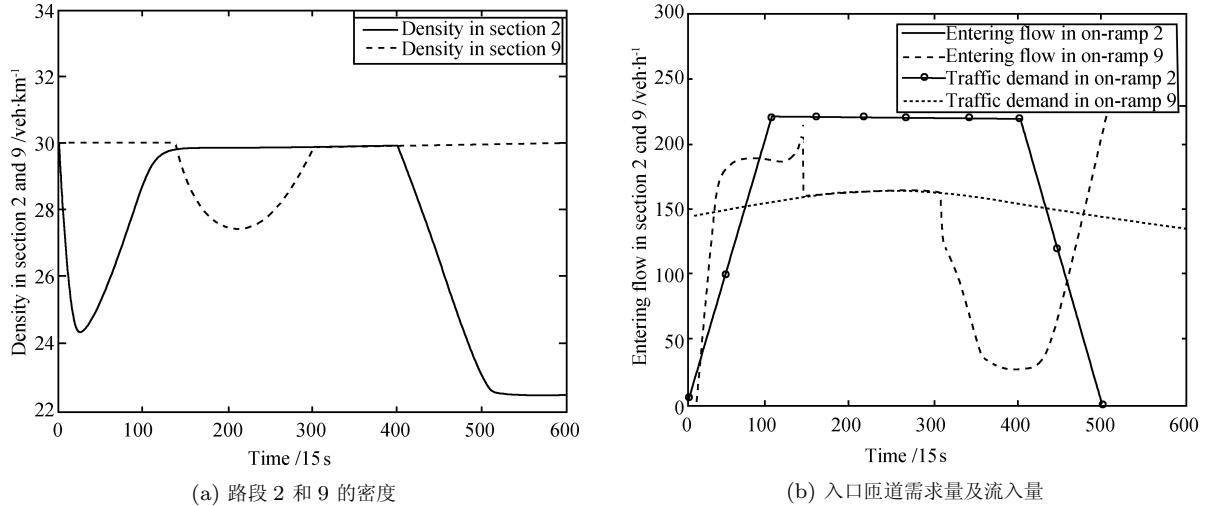
不改变 MFAC 控制器的任何参数, 直接加上 ILC 控制器, 迭代学习增益 $\beta_i = 25$. 图 6 (见下页) 所示为迭代 50 次之后的效果. 图 6(a) 显示路段 2 和 9 的密度几乎都小于等于期望密度. 路段 2 在大约 $k=0$ 到 $k=100$ 以及 $k=400$ 到 $k=600$ 时, 密度明显低于期望密度, 路段 9 在 $k=150$ 到 $k=300$ 时, 密度也低于期望密度, 其原因是由于需求不足导致的, 相应的结果可以从图 6(b) 看出, 这时入口匝道处的需求车辆已全部进入快速路, 因此, 这种情况是无法通过控制算法消除的. 事实上, 如果不考虑入口匝道处的需求限制, 也就是有充分的交通需求等候在入口匝道处, 而且还有充分的存储空间来用于车辆排队的话, 基于迭代学习控制的 MFAC 入口匝道控制算法可以获得几乎完美的完全跟踪, 仿真结果

见图 7(见下页). 而且, 从仿真结果图 7(b) 中可以看出其收敛速度非常快, 仅需要两次迭代就能获得非常好的控制效果. 这里误差均方差 (Mean square error) 的定义为

$$MSE_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (y_d(k) - y_n(k))^2$$

4 结论

本文提出了一种新的基于迭代学习控制的 MFAC 入口匝道控制算法. 通过严格的数学推导证明了该方法的收敛性. 仿真实验证实了该算法的有效性. 另外, MFAC 控制器和 ILC 控制器既可相互独立地工作, 也可优势互补. 模块化的设计方便对原有的 MFAC 控制器进行改造. ILC 控制器的加入可以有效利用交通流的周期性特征, 提高控制品质.

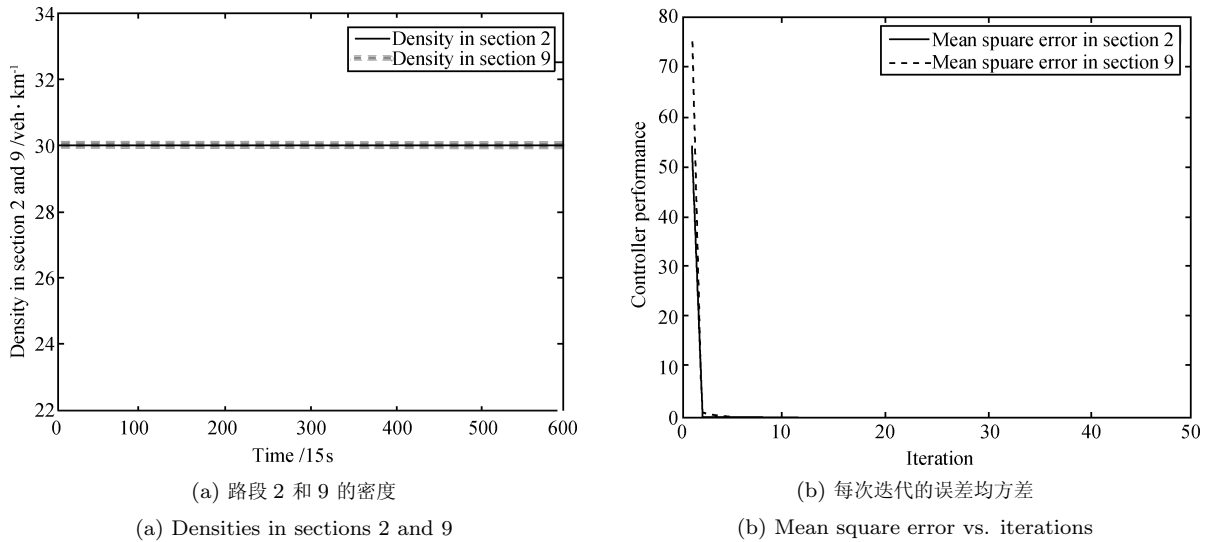


(a) 路段 2 和 9 的密度 (b) 入口匝道需求量及流入量

(a) Densities in sections 2 and 9 (b) Traffic demands and entering flows of on-ramps 2 and 9

图 6 基于迭代学习的 MFAC 入口匝道控制的情形

Fig. 6 Simulation results with ILC based MFAC ramp metering



(a) 路段 2 和 9 的密度 (b) 每次迭代的误差均方差

(a) Densities in sections 2 and 9 (b) Mean square error vs. iterations

图 7 无需求限制时基于迭代学习的 MFAC 入口匝道控制的情形

Fig. 7 Simulation results with ILC based MFAC ramp metering without demand constraints

附录 定理 1 的证明

证明. 本文的收敛性证明是在如下模意义下的收敛性

$$\|\mathbf{u}(k)\|_{\lambda} = \sup_{k \in [0, K]} a^{-\lambda k} \|\mathbf{u}(k)\|$$

其中 $\lambda > 0, a > 1$.

由式 (10) 有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n(k+1) &= \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_n(k+1) = f(\mathbf{u}_d(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\xi}(k)) - \\ &\quad f(\mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\xi}(k)) + f(\mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_d(k), \boldsymbol{\xi}(k)) - \\ &\quad f(\mathbf{u}_n(k), \mathbf{y}_n(k), \boldsymbol{\xi}(k)) = f_u(\boldsymbol{\zeta}_n) \delta \mathbf{u}_n(k) + \\ &\quad f_y(\boldsymbol{\zeta}_n) \mathbf{e}_n(k) = f_u(\boldsymbol{\zeta}_n) \delta \mathbf{u}_n^f(k) - \\ &\quad f_u(\boldsymbol{\zeta}_n) \delta \mathbf{u}_n^b(k) + f_y(\boldsymbol{\zeta}_n) \mathbf{e}_n(k) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中, $\delta \mathbf{u}_n(k) = \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n(k)$, $\delta \mathbf{u}_n^f(k) = \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k)$,

$$\boldsymbol{\zeta}_n = [(\mathbf{u}_n(k) + \tau \delta \mathbf{u}_n(k))^T, (\mathbf{e}_n(k) + \tau \mathbf{e}_n(k))^T, k]^T, \tau \in [0, 1].$$

由式 (12) 和 (A1) 得

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_n^f(k) &= \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k) = \\ &\quad \mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_{n-1}^f(k) - \beta \mathbf{e}_{n-1}(k+1) = \\ &\quad \delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k) - \beta [f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1}) \delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k) - \\ &\quad f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1}^b(k) + f_y(\boldsymbol{\zeta}_{n-1}) \mathbf{e}_{n-1}(k)] = \\ &\quad [I - \beta f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1})] \delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k) + \beta [f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1}) \times \\ &\quad \mathbf{u}_{n-1}^b(k) - f_y(\boldsymbol{\zeta}_{n-1}) \mathbf{e}_{n-1}(k)] \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

对式 (A2) 两边取模有

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\| &\leq \|I - \beta f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1})\| \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \\ &\quad \|\beta\| \|F_u\| \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\beta\| \|F_y\| \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| \leq \\ &\quad \|I - \beta f_u(\boldsymbol{\zeta}_{n-1})\| \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1(\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\|) \quad (\text{A3})$$

其中, $F_u = \sup_{k \in [0, K]} \|f_u(\zeta_{n-1})\|$, $F_y = \sup_{k \in [0, K]} \|f_y(\zeta_{n-1})\|$, $\varepsilon_1 = \max_{k \in [0, K]} \{\|\beta\|F_u, \|\beta\|F_y\}$.

对式 (A1) 两边取模有

$$\|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| \leq F_u \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + F_u \times \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + F_y \|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| \quad (\text{A4})$$

由式 (13)、(A4) 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| &\leq \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \varepsilon_2 \|\mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_{n-1}(k)\| \leq \\ &\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \varepsilon_2 \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| + \\ &\varepsilon_2 \|\Delta \mathbf{y}_d(k+1)\| \leq \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \\ &\varepsilon_2 (F_u \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + F_u \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \\ &F_y \|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\|) + \varepsilon_2 \|\Delta \mathbf{y}_d(k+1)\| \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

其中, $\Delta \mathbf{y}_d(k+1) = \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_d(k)$, $\varepsilon_2 = \sup_{k \in [0, K]} \left\| \frac{\rho \hat{\phi}_n(k)}{\lambda + \|\hat{\phi}_n(k)\|^2} \right\|$, $\hat{\phi}_n(k)$ 的有界性参见文献 [12].

式 (A4)、(A5) 相加, 得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\| &\leq (1 + \varepsilon_2 F_u + F_u) \|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \\ &(\varepsilon_2 F_y + F_y) \|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\| + \\ &(\varepsilon_2 F_u + F_u) \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \varepsilon_2 \|\Delta \mathbf{y}_d(k+1)\| \leq \\ &\varepsilon_3 (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k-1)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(k-1)\|) + \\ &\varepsilon_3 \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k-1)\| + \varepsilon_2 \|\Delta \mathbf{y}_d(k-1)\| \leq \\ &\varepsilon_3 (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(0)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(0)\|) + \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| + \varepsilon_2 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j-1} \|\Delta \mathbf{y}_d(j+2)\| \quad (\text{A6}) \end{aligned}$$

其中, $\varepsilon_3 = \max_{k \in [0, K]} \{(1 + \varepsilon_2 F_u + F_u), (\varepsilon_2 F_y + F_y), (\varepsilon_2 F_u + F_u)\}$, 显然 $\varepsilon_3 > 1$.

将式 (A6) 代入式 (A3) 有

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\| &\leq \|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \varepsilon_1 (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\| + \\ &\|\mathbf{e}_{n-1}(k)\|) \leq \|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \\ &\varepsilon_1 [\varepsilon_3^k (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(0)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(0)\|) + \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| + \\ &\varepsilon_2 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j-1} \|\Delta \mathbf{y}_d(j+2)\|] \leq \\ &\|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| + \varepsilon_1 \varepsilon_4 + \\ &\varepsilon_1 \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| + \varepsilon_1 \varepsilon_2 M \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j-1} \quad (\text{A7}) \end{aligned}$$

其中, $\varepsilon_4 = \varepsilon_3^K (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(0)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(0)\|)$, $M = \max_{k \in [2, K+1]} \|\Delta \mathbf{y}_d(k)\|$.

对式 (A7) 两边取 λ 模有

$$\sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\| \leq \|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| \sup_{k \in [0, K]} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\| +$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \varepsilon_4 \sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} + \varepsilon_1 \sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| + \\ &\varepsilon_1 \varepsilon_2 M \sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j-1} \quad (\text{A8}) \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} &\sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| = \\ &\sup_{k \in [0, K]} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{-\lambda j} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(j)\| \varepsilon_3^{(k-j)(1-\lambda)} \leq \\ &\|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda \sup_{k \in [0, K]} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{(k-j)(1-\lambda)} = \\ &\|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda \frac{1 - \varepsilon_3^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_3^{\lambda-1} - 1} \quad (\text{A9}) \end{aligned}$$

以及

$$\sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_3^{k-j-1} = \sup_{k \in [0, K]} \varepsilon_3^{-\lambda k + k-1} \frac{1 - \varepsilon_3^{-k}}{1 - \varepsilon_3^{-1}} \leq \frac{\varepsilon_3^K - 1}{\varepsilon_3 - 1} \quad (\text{A10})$$

将式 (A9)、(A10) 代入式 (A8), 有

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda &\leq \left(\|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| + \varepsilon_1 \frac{1 - \varepsilon_3^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_3^{\lambda-1} - 1} \right) \\ &\|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_3^K - 1}{\varepsilon_3 - 1} M \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

由式 (A11) 可知, 可以找到足够大的 λ , 使得

$$\|I - \beta f_u(\zeta_{n-1})\| + \varepsilon_1 \frac{1 - \varepsilon_3^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_3^{\lambda-1} - 1} = \rho < 1$$

从而有

$$\|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \rho \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \varepsilon \leq \rho^n \|\delta \mathbf{u}_0^f(k)\|_\lambda + \varepsilon \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \quad (\text{A12})$$

其中, $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_3^K - 1}{\varepsilon_3 - 1} M$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1 - \rho} \quad (\text{A13})$$

由式 (A6) 有

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(k)\|_\lambda + \|\mathbf{e}_{n-1}(k)\|_\lambda) \leq \\ &(\|\mathbf{u}_{n-1}^b(0)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(0)\|) + \\ &\frac{1 - \varepsilon_3^{-(\lambda-1)K}}{\varepsilon_3^{\lambda-1} - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}_{n-1}^f(k)\|_\lambda + \varepsilon_2 M \frac{\varepsilon_3^K - 1}{\varepsilon_3 - 1} \quad (\text{A14}) \end{aligned}$$

由式 (A13)、(A14) 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_d(k) - \mathbf{u}_n^f(k)\|_\lambda \leq \sigma$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_n(k)\|_\lambda \leq \sigma$, $\sigma > 0$ 为适当选取的常数. 当 $\|\mathbf{e}_n(0)\| = 0$, $\|\mathbf{u}_n^b(0)\| = 0$, $\|\Delta \mathbf{y}_d(k)\| = 0$ 时, 有 $\varepsilon_4 = \varepsilon_3^K (\|\mathbf{u}_{n-1}^b(0)\| + \|\mathbf{e}_{n-1}(0)\|) = 0$, $M = \max_{k \in [2, K+1]} \|\Delta \mathbf{y}_d(k)\| = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_3^K - 1}{\varepsilon_3 - 1} M =$

0. 所以, 由式 (A4)、(A5) 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta u_n^f(k)\|_\lambda = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^b(k)\|_\lambda = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n(k)\|_\lambda = 0$. $\square$

References

- Parageorgiou M, Kotsialos A. Freeway ramp metering: an overview. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2002, **3**(4): 271–281
- Varaiya P. Reducing highway congestion: an empirical approach. *European Journal of Control*, 2005, **11**(4-5): 301–309
- Cheng I C, Gruz J B, Paquet J G. Entrance ramp control for travel rate maximization in expressways. *Transportation Research Part C*, 1974, **8**(6): 503–508
- Isakien L, Payne H J. Suboptimal control of linear systems by augmentation with application to freeway traffic regulation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, **18**(3): 210–219
- Masher D P, Ross D W, Wong P J, Tuan P L, Zeidler H M, Petracek S. *Guidelines for Design and Operation of Ramp Control Systems*. California: Stanford Research Institute, 1975
- Papageorgiou M, Hadj-Salem H, Blosseville J M. ALINEA: a local feedback control law for on-ramp metering. *Transportation Research Record*, 1991, **1320**: 58–64
- Zhang H M, Ritchie S G, Jayakrishnan R. Coordinated traffic-responsive ramp control via nonlinear state feedback. *Transportation Research Part C*, 2001, **9**(5): 337–352
- Kotsialos A. Coordinated and integrated control of motorway networks via nonlinear optimal control. *Transportation Research Part C*, 2002, **10**(1): 65–84
- Papageorgiou M, Hadj-Salem H, Middleham F. ALINEA local ramp metering: summary of the field results. *Transportation Research Record*, 1997, **1603**: 90–98
- Wang Y B, Papageorgiou M. Real-time freeway traffic state estimation based on extended Kalman filter: a general approach. *Transportation Research Part B*, 2005, **39**(2): 141–167
- Wang Chun-Wei. Studies on the Model-free Adaptive Control Based Local Ramp Metering Strategies [Master dissertation], Beijing Jiaotong University, China, 2005
(王春蔚. 基于无模型自适应控制理论的局部入口匝道控制方法研究 [硕士学位论文], 北京交通大学, 中国, 2005)
- Hou Zhong-Sheng. The Parameter Identification, Adaptive Control and Model Free Learning Adaptive Control for Nonlinear Systems [Ph.D. dissertation], Northeastern University, China, 1994
(侯忠生. 非线性系统参数辨识、自适应控制及无模型学习自适应控制 [博士学位论文], 东北大学, 中国, 1994)
- Hou Zhong-Sheng, Han Zhi-Gang. Robust model free learning adaptive control for nonlinear systems. *Control and Decision*, 1995, **10**(2): 137–142
(侯忠生, 韩志刚. 鲁棒的非线性系统无模型学习自适应控制. 控制与决策, 1995, **10**(2): 137–142)
- Hou Z S, Huang W H. The model-free learning adaptive control of a class of SISO nonlinear systems. In: Proceedings of American Control Conference. Evanston, USA: IEEE, 1997. 343–344
- Hou Zhong-Sheng. *Nonparametric Models and Its Adaptive Control Theory*. Beijing: Science Press, 1999
(侯忠生. 非参数模型及其自适应控制理论. 北京: 科学出版社, 1999)
- Zhang B, Zhang W D. Adaptive predictive functional control of a class of nonlinear systems. *ISA Transactions*, 2006, **45**(2): 175–183
- Tan K K, Leet T H, Huang S N, Leu F M. Adaptive predictive control of a class of SISO nonlinear systems. *Dynamics and Control*, 2001, **11**(2): 151–174
- Han Zhi-Gang. The application of model free controller. *Control Engineering of China*, 2002, **9**(4): 22–25
(韩志刚. 无模型控制器的应用. 控制工程, 2002, **9**(4): 22–25)
- Han Zhi-Gang. Model free control law in the production of chemical fertilizer. *Control Theory and Applications*, 2004, **21**(6): 858–863
(韩志刚. 无模型控制方法在化肥生产中的应用. 控制理论与应用, 2004, **21**(6): 858–863)
- Zhou Qiang, Qu Wei-Lian. Model-free learning adaptive semi-active control of structure with MR dampers. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2004, **24**(4): 127–132
(周强, 瞿伟廉. 安装 MR 阻尼器工程结构的非参数模型自适应控制. 地震工程与工程振动, 2004, **24**(4): 127–132)
- Liu Chun-Guo, Sui Zhen, Fu Wen-Zhi, Li Ming-Zhe. Non-parametric model and adaptive control for multi-point forming process. *Control Engineering of China*, 2004, **11**(4): 306–308
(刘纯国, 隋振, 付文智, 李明哲. 板材多点成形过程的非参数模型及自适应控制. 控制工程, 2004, **11**(4): 306–308)
- Hou Z S, Xu J X. Freeway traffic density control using iterative learning control approach. In: Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Transportation Systems. Shanghai, China: IEEE, 2003. 1081–1086
- Hou Z S, Xu J X, Zhong H W. Freeway traffic control using iterative learning control based ramp metering and speed signaling. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2007, **56**(2): 466–477
- Xu J X, Tan Y. *Linear and Nonlinear Iterative Learning Control*. Berlin: Springer, 2003
- Papageorgiou M, Blosseville J M, Hadj-Salem H. Macroscopic modeling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris. *Transportation Research Part B*, 1989, **23**(1): 29–47



侯忠生 北京交通大学电子信息工程学院先进控制系统研究所教授. 主要研究方向为无模型自适应控制理论、数据驱动控制、学习控制、智能交通系统和数据挖掘在医学、交通领域中的应用. 本文通信作者.

E-mail: houzhongsheng@china.com

(**HOU Zhong-Sheng** Professor at

the Advanced Control Systems Laboratory of School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University. His research interest covers model free adaptive control, data-driven control, learning control, intelligent transportation system, and application of data mining in medical and traffic field. Corresponding author of this paper.)



晏静文 北京交通大学电子信息工程学院先进控制系统研究所博士研究生. 主要研究方向为无模型自适应控制理论、学习控制和智能交通系统.

E-mail: yanjingwen@gmail.com

(**YAN Jing-Wen** Ph.D. candidate

at the Advanced Control Systems Laboratory of School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University. Her research interest covers model free adaptive control, learning control, and intelligent transportation system.)