第21卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 6
1995年 11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1995

非线性参数化实系数多项式族稳定性分析[1)]

耿志勇 王恩平
（中国科学院系统科学研究所 北京 100080）

黄 琳
（北京大学力学系 北京 100871）

摘 要

利用多项式系数空间中距离的概念，讨论了非线性参数化实系数多项式族 D-稳定性检验问题. 证明了单点检验的存在性，并给出多项式族满足边界检验的充分条件. 最后，对不满足边界检验的多项式族，给出了确定其 D-稳定性的低维检验方法.

关键词: 多项式族，稳定性检验，边界检验.

1 引言

考虑参数化实系数多项式族

$$P(s,Q)=\left\{p(s,\boldsymbol{q})=\sum_{k=0}^{n}a_k(\boldsymbol{q})s^k:\ \boldsymbol{q}\in Q\subset \boldsymbol{R}^m\right\}, \tag{1.1}$$

其中 Q 为参数空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中连通的有界闭集，并记 Q 的开核为 Q°.

用 $r(\boldsymbol{q})$ 表示多项式 $p(s,\boldsymbol{q})$ 的根集，则多项式族(1.1)的 D-稳定问题可定义如下:

定义 1. 设 D 是复平面中关于实轴对称的连通开集，若对每一 $\boldsymbol{q}\in Q$ 有 $r(\boldsymbol{q})\subset D$，则称族(1.1)是 D-稳定的.

设由多项式系数确定的由参数空间到系数空间的映射（简称参系映射）$a(\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是 $C^r(r\geq 1)$ 的，并记映射的雅可比矩阵为

$$D(\boldsymbol{q})=\frac{D(a_0,a_1,\cdots,a_n)}{D(q_1,q_2,\cdots,q_m)}. \tag{1.2}$$

设 $s=\rho e^{i\theta}$，多项式 $p(s,\boldsymbol{q})$ 可以等价地表示成如下的向量记法[1]:

$$\boldsymbol{p}(s,\boldsymbol{q})=G(s)\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}). \tag{1.3}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于1993年12月30日收到.

其中

$$G(s)=\begin{pmatrix}1 & \rho\cos\theta & \rho^2\cos 2\theta & \cdots & \rho^n\cos n\theta\\ 0 & \rho\sin\theta & \rho^2\sin 2\theta & \cdots & \rho^n\sin n\theta\end{pmatrix}_{2\times(n+1)}, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})=[a_0(\boldsymbol{q}),a_1(\boldsymbol{q}),\cdots,a_n(\boldsymbol{q})]^T. \tag{1.5}$$

在文献[2]中曾给出，多项式族 $P(s,\ Q)D$-稳定问题满足边界检验的充分必要条件．结果表明，并非所有的族 $P(s,Q)$ 都满足边界检验．对此，Ackermann 等[3]曾给出一个简单的反例．对于那些不满足边界检验的族 $P(s,Q)$ 是否存在低维检验，以及怎样确定这些检验，目前还没有得到解决．本文利用系数空间中集合间距离的概念，讨论族 $P(s,Q)$ 的 D-稳定检验问题．

2　主要结果

令

$$\Omega=\bigcup_{s\in\partial D}\ker G(s), \tag{2.1}$$

Ω 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中无穷个线性子空间 $\ker G(s)$，$s\in\partial D$ 的并．对其几何性质可有以下引理．

引理 1.　Ω 是系数空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的闭集．

证明．由于是 ∂D 闭的，利用多项式根与系数的连续关系即可证得 Ω 是闭的．

由参系映射 $\boldsymbol{a}(\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的连续性知，$\boldsymbol{a}(Q)$ 是系数空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的连通有界闭集．

定义

$$\delta=\inf_{\substack{\boldsymbol{g}\in\Omega\\ \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{a}(Q)}}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}\|_2. \tag{2.2}$$

由 $\Omega\times\boldsymbol{a}(Q)$ 是闭集，则易证明有：

引理 2.　存在 $\boldsymbol{g}^*\in\Omega$ 及 $\boldsymbol{a}^*\in\boldsymbol{a}(Q)$，使得

$$\delta=\|\boldsymbol{g}^*-\boldsymbol{a}^*\|_2=\min_{\substack{\boldsymbol{g}\in\Omega\\ \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{a}(Q)}}\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}\|_2. \tag{2.3}$$

引理 3.　设 $E\subset\boldsymbol{R}^m$ 是连通子集，且 $\boldsymbol{a}(E)\cap\Omega=\varnothing$，则

或 $P(s,E)$ 是 D-稳定的，或 $P(s,E)$ 中每一多项式均为 D 不稳定的．

证明．若引理不成立，必有 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2\in E,\boldsymbol{q}_1\neq\boldsymbol{q}_2$，使得 $p(s,\boldsymbol{q}_1)$ 为 D-稳定，但 $p(s,\boldsymbol{q}_2)$ 为 D 不稳定的．从而有 $r(\boldsymbol{q}_1)\subset D,r(\boldsymbol{q}_2)\not\subset D$（由于 $\boldsymbol{a}(E)\cap\Omega=\varnothing$），由 E 的连通性，必存在 E 中连接 $\boldsymbol{q}_1$ 及 $\boldsymbol{q}_2$ 的连续曲线．当 $\boldsymbol{q}$ 沿该曲线连续地从 $\boldsymbol{q}_1$ 变化到 $\boldsymbol{q}_2$ 时，由参系映射的连续性以及多项式的根与系数的连续关系，在该曲线上必存在一点 $\boldsymbol{q}^*$，使得 $r(\boldsymbol{q}^*)\cap\partial D\neq\varnothing$，从而存在 $s^*\in r(\boldsymbol{q}^*)\cap\partial D$，使得 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q}^*)\in\ker G(s^*)$，即 $\boldsymbol{a}(E)\cap\Omega\neq\varnothing$，该矛盾说明引理正确．

由引理 2 可得

定理 1.　对于满足前述要求的任一 $Q\subset\boldsymbol{R}^m$，必存在 $\boldsymbol{q}^*\in Q$，使得 $P(s,Q)$ 为 D-稳定，当且仅当 $p(s,\boldsymbol{q}^*)$ 为 D-稳定．

定理 1 表明,对任何多项式族 $P(s,Q)$ 的 D-稳定问题,总存在单点检验。但在参数域中寻找这样的点很困难,我们的基本想法是在 Q 中找出可能成为单点检验的那些点,通过这些点的检验来确定 $P(s,Q)$ 的 D-稳定性。

在 δ 的定义中,涉及到 $\boldsymbol{g}^*\in\Omega$ 的确定,为此,研究 Ω 的性质。

当 $\operatorname{rank}G(s)=2$ 时 (即 $\sin\theta\neq 0$),记 $B_1(s)$ 是由 $\ker G(s)$ 的基向量构成的 $(n+1)\times(n-1)$ 矩阵,则有

$$B_1(s)=\begin{pmatrix} \rho^2x_2 & \rho^3x_3 & \cdots & \rho^n x_n \\ -\rho y_2 & -\rho^2 y_3 & \cdots & -\rho^{n-1}y_n \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

其中

$$x_i=\frac{\sin(i-1)\theta}{\sin\theta},\ y_i=\frac{\sin i\theta}{\sin\theta},\ i=2,3,\cdots,n.$$

当 $\operatorname{rank}G(s)=1$ 时 (s 为实数),记 $B_2(s)$ 为 $\ker G(s)$ 的基向量构成的 $(n+1)\times n$ 矩阵,则有

$$B_2(s)=\begin{pmatrix} -\rho & -\rho^2 & \cdots & -\rho^n \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

设

$$\Omega_1=\bigcup_{s\in\partial D}\operatorname{Im}B_1(s)=\{\boldsymbol{g}=B_1(s)\boldsymbol{b}:s\in\partial D,\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n-1}\}, \tag{2.6}$$

$$\Omega_2=\bigcup_{s\in\partial D}\operatorname{Im}B_2(s)=\{\boldsymbol{g}=B_2(s)\boldsymbol{b}:s\in\partial D,\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n}\}, \tag{2.7}$$

则 Ω 可表示为 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$。

由于 D 是关于实轴对称的,∂D 中只有有限个实数点,故只研究 Ω_1。设 ∂D 由参数方程 $\rho=\rho(t)$,$\theta=\theta(t)$,$t\in T$ 给出,且导数 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$,$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 连续 (分段连续时分段考虑),并设 $a(Q)\cap\Omega_2=\varnothing$。

设

$$\boldsymbol{g}=B_1(s)\boldsymbol{b}=[g_0g_1\cdots,g_n]^T,\forall s\in\partial D,\forall\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n-1}.$$

定义

$$\Phi(t,\boldsymbol{b})=\frac{D(g_0g_1\cdots g_n)}{D(b_1b_2\cdots b_{n-1}t)}, \tag{2.8}$$

则

$$\Phi(t,\boldsymbol{b})=\left[B_1(s),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_1(s)\boldsymbol{b}\right]. \tag{2.9}$$

引理 4. $\frac{d}{dt}B_1(s)\boldsymbol{b}\notin \mathrm{Im}B_1(s)$.

证明．设 $X=[\rho^2x_2\rho^3x_3\cdots\rho^nx_n]$, $Y=[-\rho y_2-\rho^2y_3\cdots-\rho^{n-1}y_n]$，则 $\Phi(t,\boldsymbol{b})$ 可表示成分块形式：

$$\Phi(t,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} X & \frac{d}{dt}X\boldsymbol{b} \\ Y & \frac{d}{dt}Y\boldsymbol{b} \\ I_{n-1} & \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

若引理不成立，必存在非零向量 $\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{R}^{n-1}$，使得 $\frac{d}{dt}B_1(s)\boldsymbol{b}=B_1(s)\boldsymbol{k}$，即

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}X\boldsymbol{b} \\ \frac{d}{dt}Y\boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X\boldsymbol{k} \\ Y\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix}.$$

由该式看到 $\boldsymbol{k}=0$，矛盾说明引理正确．

引理 4 说明，当时 $\frac{d}{dt}B_1(s)\boldsymbol{b}\neq 0$，$\mathrm{rank}\Phi(t,\boldsymbol{b})=n$，$\frac{d}{dt}B_1(s)$ 性质与 ∂D 形状有关，以下总是假设

$$\mathrm{rank}\frac{d}{dt}B_1(s)=2. \tag{2.11}$$

现在来研究系数空间中 Ω 与 $a(Q)$ 之间的距离．对给定的点 $\boldsymbol{q}\in Q$，定义

$$l=\|B_1(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2,\forall s\in\partial D,\forall \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n-1}, \tag{2.12}$$

$$l^*(\boldsymbol{q})=\|B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2=\min_{\substack{s\in\partial D\\ \boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n-1}}}\|B_1(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2. \tag{2.13}$$

则在点 $s^*\in\partial D$，及 $b^*\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ 处，通过令

$$\left[\frac{\partial l}{\partial b_1}\cdots\frac{\partial l}{\partial b_{n-1}}\ \frac{\partial l}{\partial t}\right]_{|(s^*,b^*)}=0$$

有

$$[B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^T\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)=0. \tag{2.14}$$

其中 $s^*=\rho(t^*)e^{i\theta(t^*)}$.

引理 5. 设 $B_1(s)\boldsymbol{b}-a(\boldsymbol{q})\neq 0$，若 $[B_1(s)\boldsymbol{b}-a(\boldsymbol{q})]^T\Phi(t,\boldsymbol{b})=0$，则必有 $\mathrm{rank}\,\Phi(t,\boldsymbol{b})=n$.

证明．若引理不成立，必有 $\mathrm{rank}\Phi(t,\boldsymbol{b})<n$，由引理 4 有 $\frac{d}{dt}B_1(s)\boldsymbol{b}=0$．而由已知有

$$[B_1(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^TB_1(s)=0. \tag{2.15}$$

将该式对 t 微分得

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_1(s)\boldsymbol{b}\right]^T B_1(s)+[B(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_1(s)=0,$$

即

$$[B_1(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_1(s)=0. \tag{2.16}$$

由式(2.16)可得

$$[X\boldsymbol{b}-a_0(\boldsymbol{q})]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X+[Y\boldsymbol{b}-a_1(\boldsymbol{q})]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y=0.$$

根据假设(2.11)知，$X\boldsymbol{b}-a_0(\boldsymbol{q})=0$，$Y\boldsymbol{b}-a_1(\boldsymbol{q})=0$，结合式(2.15)可得 $B_1(s)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})=0$. 矛盾使引理得证.

对于 $\boldsymbol{q}\in Q$,$l^*(\boldsymbol{q})$ 是 $\boldsymbol{q}\in Q$ 的连续函数,对于 $l^*(\boldsymbol{q})$ 同样可定义极值:

$$l_M^*=\max_{\boldsymbol{q}\in Q}l^*(\boldsymbol{q})=\max_{\boldsymbol{q}\in Q}\{\|B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2\}, \tag{2.17}$$

$$l_m^*=\min_{\boldsymbol{q}\in Q}l^*(\boldsymbol{q})=\min_{\boldsymbol{q}\in Q}\{\|B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2\}. \tag{2.18}$$

式中 $s^*,\boldsymbol{b}^*$ 由 $\boldsymbol{q}\in Q$ 确定,均视为 $\boldsymbol{q}$ 的函数.

若存在 $\boldsymbol{q}\in Q^0$，使得 $l_M^*=l^*(\boldsymbol{q})$ 或 $l_m^*=l^*(\boldsymbol{q})$，则通过令

$$\left[\frac{\partial l^*}{\partial q_1}\frac{\partial l^*}{\partial q_2}\cdots\frac{\partial l^*}{\partial q_m}\right]=0,$$

并结合式(2.14)可有

$$[B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^T D(\boldsymbol{q})=0. \tag{2.19}$$

将式(2.19)与(2.14)合写后可得

$$[B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})]^T[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]=0. \tag{2.20}$$

此式就是 $l^*(\boldsymbol{q})$ 在 Q^0 中取极值的必要条件.

引理 6. 若不存在 $\boldsymbol{q}\in Q^0$，使式(2.20)成立，则多项式族 $P(s,Q)$ D-稳定，当且仅当 $P(s,\partial D)$ D-稳定.

证明. 由于 $\delta^2=l_m^*$ 存在且唯一,当不存在 $\boldsymbol{q}\in Q^0$ 使式(2.20)成立时，说明 $l^*(\boldsymbol{q})$ 不能在 Q^0 中取极小值，那么必有 $\boldsymbol{q}^*\in\partial Q$，使得 $\delta^2=\|B_1(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\|_2^2$. 由定理1知 $P(s,Q)$ 为 D-稳定,当且仅当 $p(s,\boldsymbol{q}^*)$ 为 D-稳定，当且仅当 $P(s,\partial Q)$ 为 D-稳定.

以下总是假定存在 $\boldsymbol{q}\in Q^0$，使式(2.20)成立.

定理 2. 设参系映射 $a(\cdot):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是 $c^r(r\geqslant1)$ 的，$Q=[q_l,q_r]$ 是一维闭区间,若对任意的 $q\in(q_l,q_r)=Q^0$，有

$$\operatorname{rank}[D(q),\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]>\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*). \tag{2.21}$$

则 $P(s,Q)$ 为 D-稳定,当且仅当 $P(s,\partial Q)$ 为 D-稳定.

证明. 必要性显然.

充分性. 假定 $P(s,\partial Q)$ 为 D-稳定,而 $P(s,Q)$ 为D不稳定，则必有 $q^*\in(q_l,q_r)$，使得 $\boldsymbol{a}(q^*)\in\Omega$，且有 $a[(q_l,q^*)]\cap\Omega=\varnothing$,$a[(q^*,q_r)]\cap\Omega=\varnothing$. 否则将有 $\tilde{q}\in(q_l,q_r)$ $(\tilde{q}\neq q^*)$，使 $\boldsymbol{a}(\tilde{q})\in\Omega$，则连续函数 $l^*(q)$ 将在 $[q^*,\tilde{q}]$（或 $[\tilde{q},q^*]$）上达到最大值. 很易验证,在最大值点,式(2.21)不成立.

此外，任意的 $q_1\in(q_l,q^*)$ 及任意的 $q_2\in(q^*,q_r)$，$p(s,q_1)$ 及 $p(s,q_2)$ 不可能同时为 D-稳定的或同时为 D 不稳定的，否则 $a[(q_l,q_r)]$ 将与 Ω 在 $a(q^*)$ 处相切，在 q^* 点式(2.21)不成立。

不失一般性，设 $p(s,q_1)(q_1\in(q_l,q^*))$ 是 D 不稳定的，且由于 $a([q_l,q^*))\cap\Omega=\varnothing$，则由引理 3 知，任意的 $p(s,q)\in P(s,[q_l,q^*))$ 都是 D 不稳定的。从而 $p(s,q_l)$ 是 D 不稳定的。这与 $P(s,\partial Q)$ 为 D-稳定相矛盾。充分性得证。

设有多项式 $\boldsymbol{p}_i(s)=G(s)\boldsymbol{a}_i, i=1,2$。作多项式凸组合：

$$P(s,[0,1])=\{\boldsymbol{p}(s,\lambda)=\lambda\boldsymbol{p}_1(s)+(1-\lambda)\boldsymbol{p}_2(s):\lambda\in[0,1]\}. \tag{2.22}$$

推论 1. 对每一 $\lambda\in[0,1]$，若 $\boldsymbol{p}_i(s), i=1,2$，满足：

1) $\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]>\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)$,

或

2) $\operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,B_1(s^*)]=\operatorname{rank}B_1(s^*)$.

则 $P(s,[0,1])$ D-稳定，当且仅当 $\boldsymbol{p}_i(s), i=1,2$，$D$-稳定。

证明．必要性显然。

充分性．设 $\boldsymbol{a}(\lambda)=\lambda\boldsymbol{a}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{a}_2,\lambda\in[0,1]$，则由引理 2，存在 $s^*\in\partial D$，$\lambda^*\in[0,1]$，使得

$$\delta=\|B(s^*)\boldsymbol{b}^*-\boldsymbol{a}(\lambda^*)\|_2.$$

对这样的 $s^*,\boldsymbol{b}^*$，若 1)满足，由定理 2 可知，充分性显然；若 2)满足，必存在非零的 $\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{R}^{n-1}$，使得 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2=B(s^*)\boldsymbol{k}$，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，有 $\boldsymbol{p}(s^*,\lambda)=G(s^*)\boldsymbol{a}(\lambda)=\boldsymbol{p}_2(s^*)$。由 $\boldsymbol{p}_2(s)$ D-稳定，知 $\boldsymbol{p}_2(s^*)\neq 0$，从而 $a([0,1])\cap\Omega=\varnothing$。由引理 3，充分性成立。

定理 3. 设参系映射 $a(\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{n+1}(m>1)$ 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 的，$Q\subset\boldsymbol{R}^m$ 为连通的有界闭集，对每一 $\boldsymbol{q}\in Q^\circ$，若

$$\operatorname{rank}[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]>\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*), \tag{2.23}$$

则 $P(s,Q)$ D-稳定，当且仅当 $P(s,\partial D)$ D-稳定。

证明．必要性显然。

充分性．假定 $P(s,\partial Q)$ 为 D-稳定，而 $P(s,Q)$ 非 D 稳定，则 $a(Q^\circ)\cap\Omega\neq\varnothing$。设 $\widetilde{Q}=\{\boldsymbol{q}\in Q:\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})\in\Omega\}$，首先证明 $\dim\widetilde{Q}=m-1$。

假定 $\dim\widetilde{Q}=m$，则对任意的 $\boldsymbol{q}\in\widetilde{Q}$，都存在 $s^*\in\partial D$，$\boldsymbol{b}^*\in\boldsymbol{R}^{n-1}$，使得 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{q})=B(s^*)\boldsymbol{b}^*$。从而式(2.24)不成立。

假定 $\dim\widetilde{Q}\leqslant m-2$，则 $E=Q^\circ-\widetilde{Q}$ 为连通子集。任取 $\boldsymbol{q}^*\in Q^\circ\cap\widetilde{Q}$，则由已知条件(2.23)必有 $D(\boldsymbol{q}^*)$ 中的某列 $\dfrac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial q_i}$，使得在 $\boldsymbol{q}^*$ 点成立

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial q_i}\ \Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)\right]>\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*). \tag{2.24}$$

由偏导数的连续性，必存在 q_i^* 的一个邻域：

$$N(q_i^*)=\{\boldsymbol{q}\in Q^\circ:q_j=q_j^*,\ i\neq j,\ |q_i-q_i^*|<\varepsilon\},$$

使得对任意的 $\boldsymbol{q}\in N(q_i^*)$，式(2.24)成立。设

$$I_1=\{\boldsymbol{q}\in N(q_i^*):q_i^*-\varepsilon<q_i<q_i^*\},$$
$$I_2=\{\boldsymbol{q}\in N(q_i^*):q_i^*<q_i<q_i^*+\varepsilon\}.$$

由定理 2 的证明知,对任意的 $\boldsymbol{q}_1\in I_1,\boldsymbol{q}_2\in I_2,p(s,\boldsymbol{q}_1),p(s,\boldsymbol{q}_2)$, 不能同时 D-稳定或同时 D不稳定. 而 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2\in E$, 且 $a(E)\cap\Omega=\emptyset$. 由 E 的连通性,按引理 3, $p(s,\boldsymbol{q}_1)$, $p(s,\boldsymbol{q}_2)$ 必须同时是 D-稳定的或同时是D不稳定的, 以上矛盾说明 $\dim\tilde{Q}=m-1$.

当 $\dim\tilde{Q}=m-1$ 时, $E=Q^\circ-\tilde{Q}$ 非连通, 否则将出现假定 $\dim\tilde{Q}\leqslant m-2$ 时出现的矛盾. 若 $\tilde{Q}\cap\partial Q=\emptyset$, 则 $\tilde{Q}$ 形成 Q° 中 $(m-1)$ 维闭曲面. 从而有 Q° 中 m维闭子集以 $\tilde{Q}$ 为边界. 在这个闭子集上 $l^*(\boldsymbol{q})$ 可达到最大值, 这将导致式(2.23)不成立. 从而 $E=Q^\circ-\tilde{Q}$ 非连通, 必有 $\tilde{Q}\cap\partial Q=\emptyset$. 这将导致 $P(s,\partial Q)$ 是D不稳定的. 以上矛盾使充分性得证.

以上讨论了在 Q° 中存在 $\boldsymbol{q}\in Q^\circ$, 使式(2.20)成立的条件下,若条件

$$\operatorname{rank}[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]>\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)$$

对每一 $\boldsymbol{q}\in Q^\circ$ 成立, 就可以用边界检验来确定族的稳定性. 若存在 $\boldsymbol{q}\in Q^\circ$, 使得式(2.20)成立, 同时有

$$\operatorname{rank}[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t,\boldsymbol{b})]=\operatorname{rank}\Phi(t,\boldsymbol{b}),\tag{2.25}$$

则 $l^*(\boldsymbol{q})$ 在 $\boldsymbol{q}$ 点可能取极值,为此定义满足式(2.20)和(2.25)的 Q° 中的点为 $\hat{Q}$.

定理 4. 设参系映设 $a(\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是 $C^r(r\geqslant1)$ 的, $Q\subset\boldsymbol{R}^m$ 为连通的有界闭集,则族 $P(s,Q)$ D-稳定,当且仅当 $P(s,\partial D\cup\hat{Q})$ 为 D-稳定.

证明. 必要性显然.

充分性. 设 $E=Q-\partial Q\cup\hat{Q}$, 则 $\partial E\subset\partial Q\cup\hat{Q}$. 若 $P(s,\partial Q\cup\hat{Q})$ D-稳定,而 $P(s,Q)D$ 不稳定,必有 $P(s,E)D$ 不稳定,根据引理 6、定理 2 及定理 3, 必有 $P(s,\partial E)D$ 不稳定,从而 $P(s,\partial Q\cup\hat{Q})D$ 不稳定. 矛盾使定理得证.

该定理给出的是一个关于族 $P(s,Q)$ D-稳定的低维检验方法, 因为由式(2.20)所确定的解的维数要低于参数空间维数, 很多情况下为有限个点. 当族 $P(s,Q)$ 不满足边界检验时,可用该定理给出的低维检验来确定族 $P(s,Q)$ 的 D-稳定性.

具体应用步骤:

(1) 确定 $Q_1=\{\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m:\operatorname{rank}[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)]=\operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)\}$;

(2) 确定 $Q_1\cap Q^\circ$, 若 $Q_1\cap Q^\circ=\emptyset$, $P(s,Q)$ 满足边界检验; 若 $Q_1\cap Q^\circ\neq\emptyset$, 则

(3) 确定 $\hat{Q}=\{\boldsymbol{q}\in Q_1\cap Q^\circ:[B_1(s)\boldsymbol{b}-a(\boldsymbol{q})]^T[D(\boldsymbol{q}),\Phi(t,\boldsymbol{b})]=0\}$; 若 $\hat{Q}=\emptyset$, 则 $P(s,Q)$ 满足边界检验; 若 $\hat{Q}\neq\emptyset$, 则

(4) 确定 $P(s,\hat{Q})$ D-稳定性; 当 $P(s,\hat{Q})D$ 不稳定时, $P(s,Q)$ 不稳定; 当 $P(s,\hat{Q})$ D-稳定时, $P(s,Q)$ 满足边界检验;

(5) 当 $P(s,Q)$ 满足边界检验时,在 ∂Q 的分片光滑的部分上重复上述步骤来确定 $P(s,\partial D)$ 的 D-稳定性.

3 结论

多项式族 $P(s,Q)$ 的 D-稳定性问题存在单点检验. 当参系映射 $a(\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{n+1}$

是 $C^r(r \geqslant 1)$ 映射时，对参数域内部每一点成立

$$\operatorname{rank}[D(\boldsymbol{q})\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)] > \operatorname{rank}\Phi(t^*,\boldsymbol{b}^*)$$

是保证多项式族 $P(s,Q)$ 满足边界检验的充分条件．当参系映射 $a(\cdot):\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 映射时，$P(s,\partial Q \cup \hat{Q})$ D-稳定是使得多项式族 $P(s, Q)$ D-稳定的充分必要条件．

参　考　文　献

[1] Huang Lin, Wang Long. Value mapping and parameterization approach to robust stability, *Science in China* (A), 1991, **34**: 1122—1232.

[2] 王恩平，耿志勇．非线性参数化实系数多项式多项式族稳定性的边界检验．控制理论及应用年会论文集，武汉：海洋出版社，1993，84—87．

[3] Ackman J, Hu H Z, Kaesbauer D. Robustness analysis: a case study, *27th IEEE Decision and Control Conf.*, Dec. 1988, **1**: 86—91.

STABILITY ANALYSIS ON THE FAMILY OF NONLINEARLY PARAMETERIZED REAL POLYNOMIALS

GENG ZHIYONG　　WANG ENPING

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

HUANG LIN

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing* 100871)

ABSTRACT

In this paper, the problem of D-stability testing for the family of nonlinearly parameterized real polynomial is studied by using the concept of distance in the coefficient space. The existence of single point testing is proved, and the sufficient condition to determine the family satisfying boundary testing is given. For the case that the family does not satisfy boundary testing, a low dimensional testing method to determine its D-stability is presented.

Key words: Polynomial family, stability testing, boundery testing.

耿志勇　1957 年 11 月生．于 1982 年及 1984 年在东北大学获工学学士及工学硕士学位．1987—1988 年赴英国伦敦城市大学系统科学系访问进修．现为中国科学院系统科学研究所博士研究生．当前研究方向为系统的鲁棒控制．

王恩平 1941年3月生。1965年8月毕业于北京大学数学力学系。现任中国科学院系统科学研究所研究员。先后从事过惯性导航系统的分析与设计、线性系统理论、卡尔曼滤波理论及其应用、最优控制、广义系统、分散控制等科研工作。现从事鲁棒控制与H_∞控制的理论研究工作。

1994年为本刊审稿者名单

万百五	马颂德	马　孜	马小亮	马润津	于景元	于达仁	王　珏
王朝珠	王恩平	王　龙	王治宝	王培德	王正中	王发庆	王　联
王树胜	王月娟	王执铨	王离九	王慕秋	王广雄	王子平	王顺晃
王少鹏	王行愚	王浣尘	王梅生	王秉钦	王先来	王正志	王众托
王秀峰	王桂增	王余昌	毛云英	毛宗源	毛绪瑾	毛剑琴	方崇智
方华京	方棣堂	尔联洁	邓自立	邓述慧	邓志东	井元伟	白　静
史忠植	史　维	史忠科	史定华	叶庆凯	叶银忠	叶　华	叶正明
叶　杭	石纯一	石青云	卢　强	卢桂章	卢伯英	包雪松	边肇祺
冯纯伯	冯德兴	冯　珊	冯国楠	冯元琨	田连江	田玉平	田成方
安鸿志	孙增圻	孙优贤	孙凤媛	许可康	许隆文	忻　欣	刘永清
刘大友	刘明业	刘晓平	刘少民	刘慎权	刘万泉	刘瑞华	刘彦佩
刘宗富	刘整社	朱学峰	朱宗林	吉英存	阮荣跃	阮　炯	吕跃飞
姚一新	宋文忠	陈冬青	陈振宇	陈宗基	陈天仑	陈天平	陈树中
陈伯时	陈翰馥	陈　廷	陈树平	陈锦娣	陈翰林	陈荣秋	陈亚陵
陈　陈	陈由迪	陈兆宽	陈彭年	陈文德	陈淑平	陈新海	陈文华
陈浩勋	陈　辉	严拱天	李介谷	李延保	李乃宏	李清泉	李崇坚
李友善	李勇华	李再根	李静如	李彦平	李光泉	李耀通	李渭华
李春文	李人厚	李国杰	李树荣	李树英	李训经	李今民	李伯虎
李　伟	曲晓飞	杨光宇	杨德礼	杨　健	杨自厚	杨保民	杨福生
杨成梧	杨嘉墀	吴智铭	吴　麒	吴立德	吴士泉	吴启光	吴宏鑫
吴启迪	吴沧浦	吴云从	邵世煌	邵惠鹤	邵　诚	武玉强	余达太
余道衡	何善堉	汪寿阳	汪　云	汪云九	邹　云	沈曾平	沈小笛
杜金观	张钟俊	张洪钺	张光琮	张　颖	张长生	张炘中	张纪峰
张勇传	张国山	张嗣瀛	张承福	张庆灵	张　钹	张永光	张恭清
张贤达	张汉全	张　霖	初学导	佟明安	肖德云	肖顺达	陆维明
金以慧	易继锴	周其节	周东华	周炎勋	郑毓蕃	郑君里	郑应平

（下转第729页）