第 23 卷 第 4 期 1997 年 7 月
自动化学报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 23, No. 4 Jul, 1997

Hopfield 网的关联分析[1)]

张军英 许进 保铮
（西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071）

摘 要 关于 Hopfield 网的状态转移轨迹、吸引子、吸引域和如何逃离局部极小点等问题，尤其是对具有一般权系数和偏置的网络，一直没有得到很好的解决. 本文首先定义了 Hopfield 网的关联网络，分析了关联网络的性质，找出了具有关联关系的网络状态转移轨迹之间存在的关联关系和规律. 从而，如果已知了一个网络的状态转移轨迹，利用这一规律可以很容易地得出与其相关联的网络的状态转移轨迹，并给出了它们的吸引子之间关系的结论，为 Hopfield 网络的局部极小点的逃离、最不容错网络的判断提供了方法，为对网络的进一步分析和设计提供了一种新的方法和途径. 所进行的大量计算机仿真实验验证了这一规律的存在.

关键词 Hopfield 网络，关联分析，吸引子，网络的容错能力，状态转移.

1 引言

Hopfield 网是一种能够模拟人脑局部功能的超大规模并行处理网络，在图象处理、线性规划和非线性规划、TSP 问题求解、模式识别、联想记忆等领域已得到了成功的应用. 但 Hopfield 网络的吸引子数目，吸引子以及吸引域大小的分析仍未得到很好地解决，尤其是对具有较为一般的权系数和偏置的网络(如连接权矩阵 W 不对称、偏置 I 不为 0 等)更是如此. 文献[5]中通过 Hopfield 网络状态转移图的同构关系来分析两个同构的 Hopfield 网络的记忆样本之间的关系，并得出了在记忆样本数 $m\leqslant 3$ 时，若两网络记忆样本之间的互 Hamming 距离分别相等，则这两网络同构的结论. 然而网络的记忆样本并不一定代表了网络的所有吸引子，即网络中还可能存在不希望的吸引子或吸引环(或局部极小点)，如何逃离局部极小吸引子(环)是 Hopfield 网络研究的一个重要问题. 本文通过给出关联网络的定义，讨论两个相关联的 Hopfield 网的状态转移轨迹之间的关系，使得从一个网络的状态转移轨迹即可得到与其关联的另一个网络的状态转移轨迹，并给出了它们的吸引子(环)之间的关系，为网络的设计、局部极小点的逃离和最不容错网络的判断提供了方法和途径.

本文讨论的对象是有 n 个神经元的离散 Hopfield 网络 $H(W,I)$ 以同步方式运行，即

$$\begin{cases} x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}v_j(t) + I_i, & (1a) \\ v_i(t+1) = \mathrm{sgn}(x_i(t)), & (1b) \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

---

1) 国家"八六三"高科技资助项目；北京大学视觉与听觉信息处理国家重点实验室资助项目.

收稿日期 1995-09-27

或
$$\begin{cases} X(t) = WV(t) + I, \\ V(t+1) = \mathrm{sgn}(X(t)). \end{cases} \tag{2}$$
其中
$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$
V 称为网络的状态，X 称为网络的状态变量，$V(t)$随时间在 R^n 中变化的轨迹称为 $H(W,I)$网的状态转移轨迹，因为 $v_j=\pm 1(j=1,2,\cdots,n)$，很明显 $H(W,I)$网的状态 $V(t)$(对于任意的时刻 $t\geqslant 0$)均在 R^n 中 n 维超立方体的 2^n 个顶点中的一个顶点上. 这里称 $H(W,I)$网络的矩阵(W,I)为网络的增广矩阵，记为 $H=(W,I)$，其元素记为 $h_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots n,n+1)$.

2　关联网络及其性质

对于(1)式给出的 Hopfield 网络来说，由网络的运行方程(1a)可知，网络的每一状态变量都是网络状态的线性函数，状态变量值取为 0，则在 R^n 空间中构成一个 $n-1$ 维超平面，将处在 R^n 空间中 n 维超立方体的顶点上的网络状态进行划分或分割，而下一时刻的网络状态(由(1b)式给出)则是网络状态变量的 sgn 函数，将由(1a)式状态变量取为 0 时所定义的超平面所划分的区域进一步编码为 0 或 1. 由于给(1a)式两端乘任意非零常数不会改变 R^n 空间中的这一 $n-1$ 维超平面，同时(1a)式$(i=1,2,\cdots,n)$中的第 k 个超平面方程与第 j 个超平面方程$(k\neq j)$交换，也不会改变 R^n 空间中的这两个 $n-1$ 维超平面，故有如下关联网络的定义.

定义 1.　对于由(1)式所给出的 Hopfield 网 $H=(W,I)=(h_{ij})_{n\times(n+1)}$，若
$$h'_{ij} = \begin{cases} h_{ij}, & i \neq k, \\ c \times h_{ij}, & i = k. \end{cases} \tag{4}$$
$$c<0;\ 1\leqslant k\leqslant n;\ i=1,2,\cdots n;\quad j=1,2,\cdots,n+1.$$
则称 $H'=(W',I')=(h'_{ij})_{n\times(n+1)}$为 H 网络的 k-乘负关联网络. 若
$$h''_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & i \neq k \\ h_{lj} & i = k \\ h_{kj} & i = l \end{cases} \tag{5}$$
$$1\leqslant k,\ l\leqslant n;\ k\neq l;\ i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,n+1.$$
则称 $H''=(W'',I'')=(h''_{ij})_{n\times(n+1)}$为 H 网络的 k-l 交换关联网络. 将 $H(W,I)$网络的乘负关联网络和交换关联网络统称为 $H(W,I)$的初等关联网络，或简称为 $H(W,I)$的关联网络.

因此，对任一 Hopfield 网络 $H(W,I)$进行关联运算不改变对网络状态空间的分割超平面方程.

很明显，对 H 网进行 k-乘负关联或 k-l 交换关联运算，实际上是对网络 H 的参数增广矩阵 $H=(W,I)$施行了一次第 k 行乘以非零负常数 c 或第 l 行与第 k 行交换的初等行变换，这里称这两种初等行变换为限行变换(相对于一般的初等行变换的定义而言)，称对应的初等方阵为限行方阵，分别记为 $E(k(c))$和 $E(k,l)$，则有[6]

$$H' = E(k(c)) \times H,$$
$$H'' = E(k,l) \times H.$$

以下将这种关联关系记为 $H \xrightarrow{E(k(c))} H'$，$H \xrightarrow{E(k,l)} H''$或更换一般地 $H \xrightarrow{P} H^*$，称为 H 网向 H^* 网的关联.

由于单位矩阵就是一个限行方阵，限行方阵与限行方阵的乘积及限行方阵的逆也是限行方阵，因此相互关联的网络有如下性质：①$H \xrightarrow{E} H$(其中 E 表示单位矩阵)；②若 $H_1 \xrightarrow{P} H_2$，则 $H_2 \xrightarrow{P^{-1}} H_1$；③若 $H_1 \xrightarrow{P_1} H_2$，$H_2 \xrightarrow{P_2} H_3$，则 $H_1 \xrightarrow{P_2 P_1} H_3$.

3 关联网络状态转移之间的关系

由于网络 H 的状态构成了 R^n 空间中 n 维超立方体的 2^n 个顶点，因此网络运行所导致的状态转移关系可用状态之间的置换关系矩阵 T_H 表示为

$$T_H = \begin{pmatrix} -1\ -1 \cdots -1\ -1 & -1\ -1 \cdots -1\ 1 & -1\ -1 \cdots 1\ 1 & \cdots & 1\ 1 \cdots 1\ 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_{2^n} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

其中 T_H 的第一行表示网络所处的所有可能的起始状态，第二行表示由相应的起始状态经网络的运行所转移到的下一时刻状态.

定理 1. 设 $H_1 \xrightarrow{P} H_2$，其中 $P = \prod_{k=1}^{m} P_k$ 为 m 个限行方阵的乘积(m 为有限正整数)，且描述 H_1 网络状态转移的状态置换阵为 T_{H_1}，则描述 H_2 网络状态转移的状态置换阵为

$$\begin{aligned} T_{H_2} &= T_{H_1} \times T_P \\ &= T_{H_1} \times T_{P_1} \times T_{P_2} \times \cdots \times T_{P_m}. \end{aligned} \tag{7}$$

其中×为置换矩阵之间的置换乘运算. 若 a,b 取为+1 或−1，取反操作 $\bar{a}$ 定义为

$$\bar{a} = \begin{cases} 1, & a = -1, \\ -1, & a = 1, \end{cases} \tag{8}$$

则(7)式中 T_{P_i}($i=1,2,\cdots,m$)的第 j 列($j=1,2,\cdots,2^n$)可表述为

$$T_{P_{ij}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cdots a \cdots \\ \cdots a \cdots \end{pmatrix} = I, & \text{若 } P_i = E(k(c)),\text{且} \sum_{j=1}^{m} w_{kj} v_j + I_k = 0, \\ \begin{pmatrix} \cdots a \cdots \\ \cdots \bar{a} \cdots \end{pmatrix} = T_k, & \text{若 } P_i = E(k(c)),\text{且} \sum_{j=1}^{m} w_{kj} v_j + I_k \neq 0, \\ \begin{pmatrix} \cdots a \cdots b \cdots \\ \cdots b \cdots a \cdots \end{pmatrix} = T_{k-l}, & P_i = E(k,l), k \neq l. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $V(t) = (v_1(t), \cdots, v_k(t), \cdots, v_l(t), \cdots, v_n(t)) = (\cdots, a, \cdots, b, \cdots)$是 H_1 网 t 时刻时的状态. 这里称 T_p 为 $H_1 \xrightarrow{P} H_2$ 的关联置换矩阵.

证明. 设 H_1，H_2 网络的起始状态为 V， H_1 经一步运行后的状态为($\cdots a \cdots b \cdots$). 当 H_2 为对 H_1 网进行一次关联所得到的网络时，

1）　当 $P=E(k(c))$，　即 $H_2=E(k(c))H_1$，　且 $\sum_{j=1}^{n} w_{kj}v_j(t)+I_k=0$ 时，由于 H_2 网的一步运行后的状态的第 k 个分量为

$$v_k(t+1)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}-w_{kj}v_j(t)-I_k\right),$$

$$=\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}w_{kj}v_j(t)+I_k\right)=a,$$

故有

$$T_{H_2}=T_{H_1}=T_{H_1}\times I.$$

2）　当 $P=E(k(c))$，　即 $H_2=E(k(c))H_1$，　且 $\sum_{j=1}^{n} w_{kj}v_j(t)+I_k\neq 0$ 时，有

$$v_k(t+1)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}-w_{kj}v_j(t)-I_k\right)=-a,$$

故有

$$T_{H_2}=T_{H_1}\times T_k.$$

3）　当 $P=E(k,l)$，　即 $H_2=E(k,l)H_1$，　且 $k\neq l$，　有

$$v_k(t+1)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}w_{lj}v_j(t)+I_l\right)=b,$$

$$v_l(t+1)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n}w_{kj}v_j(t)+I_k\right)=a.$$

故有

$$T_{H_2}=T_{H_1}\times T_{k-l}.$$

由此可知，对于限行方阵 P_1，　有 $T_{P_1H_1}=T_{H_1}\times T_{P_1}$ 成立.

若对 P_1H_1 网络再进行 P_2 的关联运算，　则有

$$T_{P_2P_1H_2}=T_{P_1H_1}\times T_{P_2}$$

$$=T_{H_1}\times T_{P_1}\times T_{P_2}. \tag{10}$$

依次类推，可得(7)式成立.

若 $H_1\xrightarrow{P}H_2$，　由定理 1 得到有(7)式成立，　因此有

$$T_{H_1}=T_{H_2}\times T_p^{-1}. \tag{11}$$

其中 $T_p\times T_p^{-1}=T_p^{-1}\times T_p=I$（恒等置换）.

为表述方便，以下还将置换矩阵 T 在状态为 V 时的置换结果 U 记为 $T^V=\begin{pmatrix}V\\U\end{pmatrix}$.

4　关联网络吸引子(环)之间的关系

定理 1.　若 $V=(v_1,\cdots,v_k,\cdots,v_l,\cdots,v_n)=(\cdots,a,\cdots,b,\cdots)$ 是 H 网的一个吸引子，

1）当且仅当 V 满足 $\sum_{j=1}^{n}w_{kj}v_j+I_k\neq 0$ 时，V 不是 $E(k(c))H$ 网络的吸引子；

2）当且仅当 V 满足 $a\neq b$ 时，V 不是 $E(k,l)H$ 网的吸引子.

证明.　因 V 是 H 的吸引子，故有 $T_H^V=\begin{pmatrix}V\\V\end{pmatrix}$.

1)当 1)中条件满足时,由定理 1,$E(k(c))H$ 网的状态置换矩阵中相应于 V 的列为

$$T^V_{E(k(c))H}=\begin{pmatrix}V\\V\end{pmatrix}\times T^V_k=\begin{pmatrix}\cdots a\cdots\\\cdots a\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots a\cdots\\\cdots \bar{a}\cdots\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cdots a\cdots\\\cdots \bar{a}\cdots\end{pmatrix}.$$

因总有 $a\neq\bar{a}$,故此时 V 一定不是 $E(k(c))H$ 的吸引子. 反之,当 1)中条件不满足时,由定理 1 知,$T^V_{E(k(c))H}=\begin{pmatrix}V\\V\end{pmatrix}\times I=\begin{pmatrix}V\\V\end{pmatrix}$,故 V 也是 $E(k(c))H$ 的吸引子. 故有 1)的结论成立.

2)由定理 1 知,$E(k,l)H$ 网的状态置换矩阵中相应于 V 的列为

$$T^V_{E(k,l)H}=\begin{pmatrix}V\\V\end{pmatrix}\times T_{k-l}=\begin{pmatrix}\cdots a\cdots b\cdots\\\cdots a\cdots b\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots a\cdots b\cdots\\\cdots b\cdots a\cdots\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cdots a\cdots b\cdots\\\cdots b\cdots a\cdots\end{pmatrix}.$$

因此,当且仅当 $a\neq b$ 时,V 不是 $E(k,l)H$ 网的吸引子.

参数为 H 的 Hopfield 网与与其关联的 Hopfield 网 $PH=P_m\cdots P_2P_1H$(其中 P_m、$\cdots$ P_2、P_1 为有限的 m 个限行方阵)的吸引子之间的关系可由 m 次运用定理 2 得到.

实际上,由定理 1 中的(9)式可知,满足 $\sum_{j=1}^{n}w_{kj}v_j+I_k=0$ 和 $b=a$ 时(即不满足定理 2 中的条件时),T_p 就是一个恒等置换,表明只有在这种情况下,H 网与 PH 网才有相同的状态转移轨迹,当然也就有相同的吸引子(环)。反之,H 与 PH 就会有不同的状态转移轨迹,也就有可能有不同的吸引子(环)。

定义 2. 一个网络 $H=(W,I)$的某吸引子 V 或吸引环$\{V_j/j=1,2,\cdots m\}$(m 为吸引环的长度)的邻域 Ω_V 或 $\Omega_{\{V_j/j=1,2,\cdots,m\}}$是一些状态的集合$\{V'_i/i=1,2,\cdots,l\}$,从这些状态中的任意一个状态出发,经网络的一步运行,网络的状态既到达这一吸引子或吸引环上,即 $V'_i(i=1,2,\cdots,l)$满足

$$V=\mathrm{sgn}(WV'_i+I)$$

或 $$V_j=\mathrm{sgn}(WV'_i+I),\quad j=1\text{ 或 }2\text{ 或}\cdots\text{ 或 }m.$$

并称 Ω 中的状态的数目为邻域 Ω 的大小,记为$|\Omega|$.

定理 3. 设 $H_1\xrightarrow{P}H_2$,相应的关联置换矩阵为 T_p,

1) 若 V 为 H_1 的吸引子,则当 T_p 中 V 状态的置换结果 U 满足

$$U\in\Omega_V\tag{12}$$

时,U 是 H_2 网的吸引子.

2) 若$\{V_i/i=1,2,\cdots,m\}$为 H_1 网络的 m 个不同的吸引子,则当 T_p 中 V_i 的置换结果 $U_i(i=1,2,\cdots,m)$满足

$$\begin{cases}U_i\in\Omega_{V_{i+1}},\quad i=1,2,\cdots,m-1,\\U_m\in\Omega_{V_1}\end{cases}\tag{13}$$

时,$\{U_i/i=1,2,\cdots,m\}$是 H_2 网的长度为 m 的吸引环.

证明. 1) 设 H_2 网在时刻 t 所处的状态为 U，因 $U\in\Omega_V$，故有 $T_{H_1}^U=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$，由定理 1 得 $T_{H_2}^U=T_{H_1}^U\times T_p=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}V\\U\end{pmatrix}=I$，即 H_2 网在时刻 $t+1$ 时所处的状态也为 U，因此 U 是 H_2 的吸引子.

2) 设 H_2 网在时刻 t 时的状态为 U_1，因 $U_1\in\Omega_{V_2}$，故有 $T_{H_1}^{U_1}=\begin{pmatrix}U_1\\V_2\end{pmatrix}$，因此有 $T_{H_2}^{U_1}=T_{H_1}^{U_1}\times T\backslash-p=\begin{pmatrix}U_1\\V_2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}V_2\\U_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}$，即 H_2 网在 $t+1$ 时刻的状态为 U_2；同理，因 $U_2\in\Omega_{V_3}$，故有 $T_{H_1}^{U_2}=\begin{pmatrix}U_2\\V_3\end{pmatrix}$，因此有 $T_{H_2}^{U_2}=T_{H_1}^{U_2}\times T_p=\begin{pmatrix}U_2\\V_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}V_3\\U_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_2\\U_3\end{pmatrix}$，即 H_2 网在 $t+2$ 时刻的状态为 U_3；依次类推，可得 H_2 网在 $t+m-1$ 时刻的状态为 U_m；又由于 $U_m\in\Omega_{V_1}$，即有 $T_{H_1}^{U_m}=\begin{pmatrix}U_m\\V_1\end{pmatrix}$，因此有 $T_{H_2}^{u_m}=T_{H_1}^{U_m}\times T_p=\begin{pmatrix}U_m\\V_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}V_1\\U_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_m\\U_1\end{pmatrix}$，即 H_2 网在 $t+m$ 时刻的状态为 U_1. 由此我们得到了网络 H_2 在 $t,t+1,\cdots,t+m-1,t+m$ 时刻的状态分别为 $U_1,U_2,\cdots,U_m,U_1$，即 $\{U_i/i=1,2,\cdots,m\}$ 为 H_2 网络的长度为 m 的极限环. 证毕.

如果说定理 1 给出了对关联网络状态转移之间的一种分析方法的话，则定理 3 给出了相互关联的网络的吸引子(环)之间存在直接置换关系的条件，而定理 2 和定理 3 则实际上为在网络设计和运行时的逃离网络局部极小点提供了的一种方法. 若 V 是 H 网络的局部极小点，在满足定理 2 的 1)或 2)中的条件情况下，可以通过运行 H 网的关联网络 PH 实现从局部极小点的逃离，这正是本文研究的意义所在(对权系数矩阵 W 为对称阵、偏置阵 $I=0$ 的网络，[1]中就是利用 $W'=-W$ 来实现从局部极小点的逃离的，而这样做实际上只是运行这里的一种特殊的关联网络)，若定理 2 的 1)或 2)中的条件不满足，则这样做是无论如何也逃离不了局部极小点的，并且，如果所设计的关联关系 T_p 满足定理 3 的 1)中给出的条件，则 PH 网络将收敛于 H 网局部极小吸引子的邻域内，这样，再运行 H 网络，其状态仍会回到原来的局部极小吸引子上，从而无法逃离这一局部极小吸引子，为此，为逃离局部极小点，应注意设计关联关系 P，使得 T_p 满足定理 2 中给出的条件且不满足定理 3 中给出的条件；另外，定理 2 还给出了判断一个网络是否是最不容错网络的方法，若 H 网与它的乘负关联网络 PH 有相同的吸引子，则说明定理 2 的 1)中的条件不满足，即有 $\sum_{j=1}^{m}w_{kj}v_j+I_k=0$ 成立，说明 H 的吸引子 V 正好处于这一分割超平面上，这样的网络，其参数$(w_{k1},w_{k2},\cdots,w_{kn},I_k)$的微小变化都可能使网络的状态转移轨迹发生明显的变化，因此是容错能力最差的网络，运用定理 2 可以对网络是否是最不容错网络进行判断，这也是本文研究的意义之一. 关于如何设计最容错网络，是需要进一步研究的重要课题.

5 仿真实验与结果

为对网络的状态置换矩阵表示方便起见，这里将对每一个 n 维超立方体顶点的状态

$V=\{i_1,i_2,\cdots,i_n|i_k$ 为$+1$或$-1,k=1,2,\cdots,n\}$编码为

$$\mathrm{code}(V)=\sum_{k=1}^{n}j_k2^k,\quad 其中\ j_k=\begin{cases}1 & i_k=1,\\ 0 & i_k=-1.\end{cases}$$

所进行的大量计算机仿真实验都表明本文所得结论的正确性，这里因篇幅所限，仅以一个由 4 个神经元组成的网络为例说明之.

设 Hopfield 网 H_1 的连接权矩阵 W 和偏置换阵 I 分别为

$$H_1:W=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 1 & 1.5\\ 0.5 & 1 & 1.5 & 2\\ 1 & 1.5 & 2 & 2.5\\ 1.5 & 2 & 2.5 & 3\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}0.02\\ 0.353\\ 0.687\\ 1.020\end{bmatrix},$$

所对应的状态置换阵为

$$T_{H_1}=\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 0 & 8 & 15 & 1 & 15\end{pmatrix}.$$

明显地它的吸引子有两个，分别为 $\mathrm{code}(-1,-1,-1,-1)=0$ 和 $\mathrm{code}(1,1,1,1)=15$，现讨论与 H_1 网相关联的 H_2、H_3、H_4、H_5、H_6、H_7 网络，它们与 H_1 网的关联关系列于表 1 的第二列，经运用定理 1 进行分析，得到各个相应的关联置换关系 T_{P_i} 分别列于表 1 的第三列，由此得到 $H_2\sim H_7$ 的状态置换矩阵列于表 1 的第四列，通过它们的状态转移轨迹得出网络的吸引子(环)情况列于第五列，表第四、五列与计算机仿真的结果完全相同.

表 1 H_1 的关联网络及其状态转移、吸引子(环)间的关系

H_i	$H_i=P_iH_1$ 的关联关系 P_i	T_{P_i}	$T_{H_i}=T_{H_1}T_{P_i}$	吸引子(环)
H_1			$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 0 & 8 & 15 & 1 & 15\end{pmatrix}$	0 15
H_2	$E(3(-0.212))$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 0100 & 1100 & 1011 & 0101\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 4 & 12 & 11 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 4 & 12 & 11 & 5 & 11\end{pmatrix}$	4 11
H_3	$E(4(-3.23))$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 1000 & 0000 & 0111 & 1001\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 8 & 0 & 7 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 8 & 0 & 7 & 9 & 7\end{pmatrix}$	7
H_4	$E(3(-0.212))$ $\times E(4(-3.23))$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 1100 & 0100 & 0011 & 0001\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 12 & 4 & 3 & 13\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 12 & 4 & 3 & 13 & 3\end{pmatrix}$	12→ 3→ 12
H_5	$E(3,4)$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 0000 & 0100 & 1111 & 0111\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 0 & 4 & 15 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 0 & 4 & 15 & 1 & 15\end{pmatrix}$	0 15
H_6	$E(3,4)$ $\times E(3(-0.212))$ $\times E(4(-3.23))$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 1100 & 1000 & 0011 & 1101\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 12 & 8 & 3 & 13\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 12 & 8 & 3 & 13 & 3\end{pmatrix}$	12→ 3→ 12
H_7	$E(1(-0.01))$ $\times E(2(-0.01))$ $\times E(3(-0.01))$ $\times E(4(-0.01))$	$\begin{pmatrix}0000 & 1000 & 1111 & 0001\\ 1111 & 0111 & 0000 & 1110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 15 & 1\\ 15 & 7 & 0 & 14\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\sim4 & 5 & 6\sim7 & 8 & 9\sim15\\ 15 & 7 & 0 & 14 & 0\end{pmatrix}$	0→ 15→ 0

1) 对表 1 中的乘负关联网络 $H_i(i=2,3,4,7)$，它们的吸引子(环)是不相同的，说

明 H_1 网络及其关联网络都不是最不容错网络.

2） 对于表 1 中 3—4 交换网络 H_5，由于 H_1 的吸引子 $code(-1,-1,-1,-1)=0$，$code(1,1,1,1)=15$ 的第 3、4 两位$(-1,-1)$和$(1,1)$均分别相等，由定理 2 的 2)有 $code(-1,-1,-1,-1)=0$ 和 $code(1,1,1,1)=15$ 也为 H_5 的吸引子.

3） 对于 $H_i(i=2,5)$，H_1 网的吸引子 0,15 的 T_{p_i}置换结果(H_2 时为 4 和 11，H_5 时为 0 和 15)分别处在 H_1 网的吸引子 0 和 15 的邻域内，满足定理 3 的 1)中给出的条件，故分别构成了 H_2 网的两个吸引子和 H_5 的两个吸引子；对于 $H_i(i=4,6,7)$，H_1 的吸引子 0 和 15 的 T_{p_i}置换结果满足定理 3 的 2)中所给出的条件，因此所构成的 $H_i(i=4,6,7)$网的吸引环的长度均为 2；只有 H_3 网，因 H_1 网的吸引子 0 的 T_{p_3}置换结果 8 不处于 H_1 网的吸引子 0 的邻域内，故 8 不是 H_3 的吸引子，但 H_1 的吸引子 15 的 T_{p_3}置换结果 7 仍满足定理 3 的 1)中的条件，故 7 仍为 H_3 的吸引子，这样的 T_{P_3}可以实现从 H_1 的吸引子 0 的逃离.

对于 H' 网络

$$H':W'=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&2\\1&1&2&2\\1&2&2&3\end{pmatrix},\quad I'\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因由 H'的吸引子 0,5,15 和 $E(3(-2.8))H'$的吸引子 5,11 有共同的吸引子 $code(-1,1,-1,1)=5$，由定理 2 的 1)知，$(-1,1,-1,1)$一定是网络状态方程的第三个方程所定义的超平面上的点，实际上 $\sum_{j=1}^{4}w_{3j}v_j+I_3=1\times(-1)+1\times1+2\times(-1)+2\times1+0=0$，因此网络 H' 及其关联网络均是最不容错网络.

参 考 文 献

[1] 张木想，马缚龙，肖国镇. 神经网络优化计算的新方法. 电子学报，1993，**21**(1)：73—78.

[2] 孙守宇，郑君里，Hipfield 网求解 TSP 的一种改进算法. 电子学报，1995，**23**(1)：73—78.

[3] 许进，张军英，保铮. 基于 Hopfield 网的图的着色算法. 电子学报，1996，**24**(10)：8—13.

[4] 张立明. 人工神经网络的模型及其应用. 上海：复旦大学出版社，1993.

[5] Lee C Y，Wang J S，Lee R C T. Characteristics of the Hopfield Associative Memory Utilizing Isomorphism Relations. *IEEE Trans. on Neural Networks*，1994，**5**(3)：523—526.

[6] 北京大学数学力学系. 高等代数. 北京：高等教育出版社，1982.

[7] Hopfield J J，Tank D W. Neural computation of dicisions optimization problems. *Biol. Cybernetics*，1985，**52**：141—152.

CORRELATING ANALYSIS OF HOPFIELD NETWORKS

ZHANG JUNYING XU JIN BAO ZHENG

(*Electronic Engineering Institute, XIDIAN University, Xi'an* 710071)

Abstract The correlated network of a Hopfield network is defined and the properties of correlated networks are analyzed. The relationship between the state transferences of any two correlated networks on the correlating law is found out, with which the state transference of a Hopfield network can be easily deduced by that of any network correlated with it. The relationship between the attractors of any two correlated networks is derived out, which is helpful for the Hopield network to escape from the local minimum and for the judgement of network's tolerant ability to input data. Finally, computer simulation results are presented to verify the existance of the correlating law.

Key words Hopfield network, correlating analysis, attractor, state transference, tolerant ability of a network.

张军英 1961 年生，副教授，1982 年于陕西理工大学自动控制专业获学士学位，1985 年于西安电子科技大学计算机应用专业获硕士学位，现为保铮院士的在职博士生，目前主要从事人工神经网络、遗传算法及其在优化应用等方面的研究，已发表学术论文 30 余篇，专著一部.

许　进 1959 年生，教授. 1983 年于陕西师范大学基础数学专业获学士学位，1987 年西北工业大学运筹学专业获理学硕士学位，西安交通大学管理工程专业工学博士（1993 年），北京理工大学应用数学专业理学博士（1994 年），西安电子科技大学电子学与通信专业博士后（1995 年），目前主要研究兴趣为神经网络、图论及系统工程，已发表学术论文 70 余篇，专著一部.

保　铮 教授，1927 年生，1953 年毕业于解放军通信工程学院，现在是中国科学院院士、中国电子学会会士和雷达信号处理实验室学术委员会主任，研究方向为雷达信号处理与检测.