

# 高精度伺服系统的大范围稳定性\*

王 广 雄

(哈尔滨工业大学)

## 摘 要

本文采用李亚普诺夫直接法研究了一类高增益伺服系统的大范围稳定性,提出了改善大范围稳定性的措施。

## 一、引 言

高精度伺服系统所要求的高增益一般是靠采用积分校正来获得的。因此,这类系统的一个主要问题就是条件稳定问题,即由于饱和而使系统的等效增益下降时会导致不稳定。这就是所谓的大范围不稳定。所谓“大范围”也是相对的。例如对伺服精度为角秒级的系统而言,失调角为0.5度,即1800角秒就已经属于“大范围”这个范畴了。对这种系统来说,由于投入工作时的初始失调角可能达到0.5度,因此,若不能保证大范围的稳定性,就无法投入工作。

在大范围下工作时,系统中的各元件都将不同程度地进入饱和。根据元件的线性范围和系统的增益分配,有可能是信号放大部分先进入饱和,也有可能功率放大级先进入饱和。一进入饱和段,系统的等效增益便下降,导致不稳定。本文将指出,只要适当分配增益,使积分校正级首先进入饱和,便可以保证系统的大范围稳定性。

## 二、方 法

设系统的状态方程式为

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

式中  $x$  为状态向量。

我们将用李亚普诺夫直接法来分析该系统的大范围稳定性。

李亚普诺夫直接法说明,若有一标量函数  $V(x)$  是正定的,而根据式(1)求得的导数  $\dot{V}$  是负定时,那么该系统对原点  $x = 0$  就是渐近稳定的。此外,若  $V$  函数是无界的,那么该系统就是大范围渐近稳定的。这个  $V$  函数就称为李亚普诺夫函数。

若系统是大范围稳定的,那么从理论上说,无论多大的初始条件都应该是允许的。但是就解决实际问题来说,这样的要求未免太苛刻了。例如在实际系统中当失调角达到0.5度时就可能已碰上了止挡。因此,只要在0.5度以内保证稳定,就可以保证系统的正常工

\* 本文曾在中国自动化学会1978年年会上宣读。本文修改稿于1979年2月1日收到。

作。我们在这里将利用李亚普诺夫直接法来确定系统的稳定范围。只要这个稳定范围包括了这个  $\pm 0.5$  度,那么我们就可以说这个系统实际上就是大范围稳定的。

具体作法就是研究在一个多大的范围内能保证  $V$  函数的如下特性:

$$1) V(x) > 0, \quad x \neq 0$$

$$2) V(0) = 0$$

$$3) \frac{dV}{dt} < 0$$

这个范围就是系统的稳定范围。建立李亚普诺夫函数的方法我们将在第四节中给予介绍。

### 三、状态方程

我们以一高精度转台作为研究的对象。图 1 所示就是该系统的框图。转台部分的特性可用方程式 (2), (3) 来描述:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (2)$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{K_m}{J} u_2 \quad (3)$$

式中  $\theta$ ——转台的转角;  
 $u_2$ ——功率放大器的输入电压;  
 $K_m$ ——功放级与力矩电机的力矩系数;  
 $J$ ——台体的转动惯量。

本例中

$$\frac{K_m}{J} = 0.46 \quad 1/\text{秒}^2 \cdot \text{伏}.$$

我们知道,为要保证高增益,就要采用积分校正。但对这种类型的系统来说,由于台体无阻尼,所以台体部分就如式 (2), (3) 所列,为一个二阶积分环节。这样,再加上积分校正所带来的相位迟后,使系统在中、低频段上的相位迟后会大于  $180^\circ$ , 形成条件稳定系统。

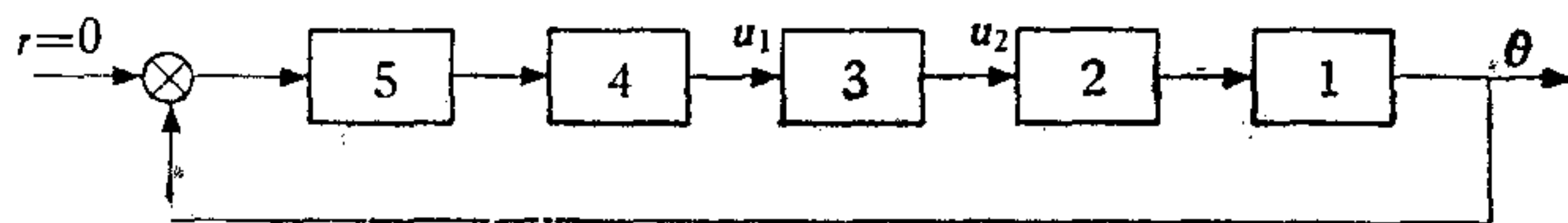


图 1 系统框图

1——转台台体; 2——功率放大级; 3——积分校正;  
 4——微分校正; 5——放大

常规设计中常将增益集中在系统的放大部分,而积分微分校正的静态增益则取为一。这样,在大范围下工作时系统的放大部分很易饱和。根据描述函数法可以知道,放大元件饱和相当于使系统的等效增益下降,这对条件稳定系统来说就导致了不稳定。

为了解决大范围稳定问题,我们将系统的增益作了适当的分配,使积分校正级首先进



入饱和。我们将在第五节来分析系统的稳定性,这里先就主要的参数和运动方程作一说明。

我们知道,积分校正的幅频特性到高频段是要衰减的。为了在过渡过程的开始阶段就确保积分校正级进入饱和,所以其静态增益就应保证高频段的总增益大于 1。

对于本文所分析的系统来说,设根据系统的精度要求和一般的线性伺服系统理论的分析确定了积分校正的特性为

$$G'(s) = \frac{0.22s + 1}{22s + 1}.$$

从  $G'(s)$  可以知道,其幅频特性到高频段将衰减到 1/100。为了保证积分校正级在高频段的增益仍大于 1,就要求该级的静态增益大于 100。本例中取为 200,即其特性为

$$G(s) = 200 \frac{0.22s + 1}{22s + 1}.$$

图 2 所示就是积分校正的具体线路

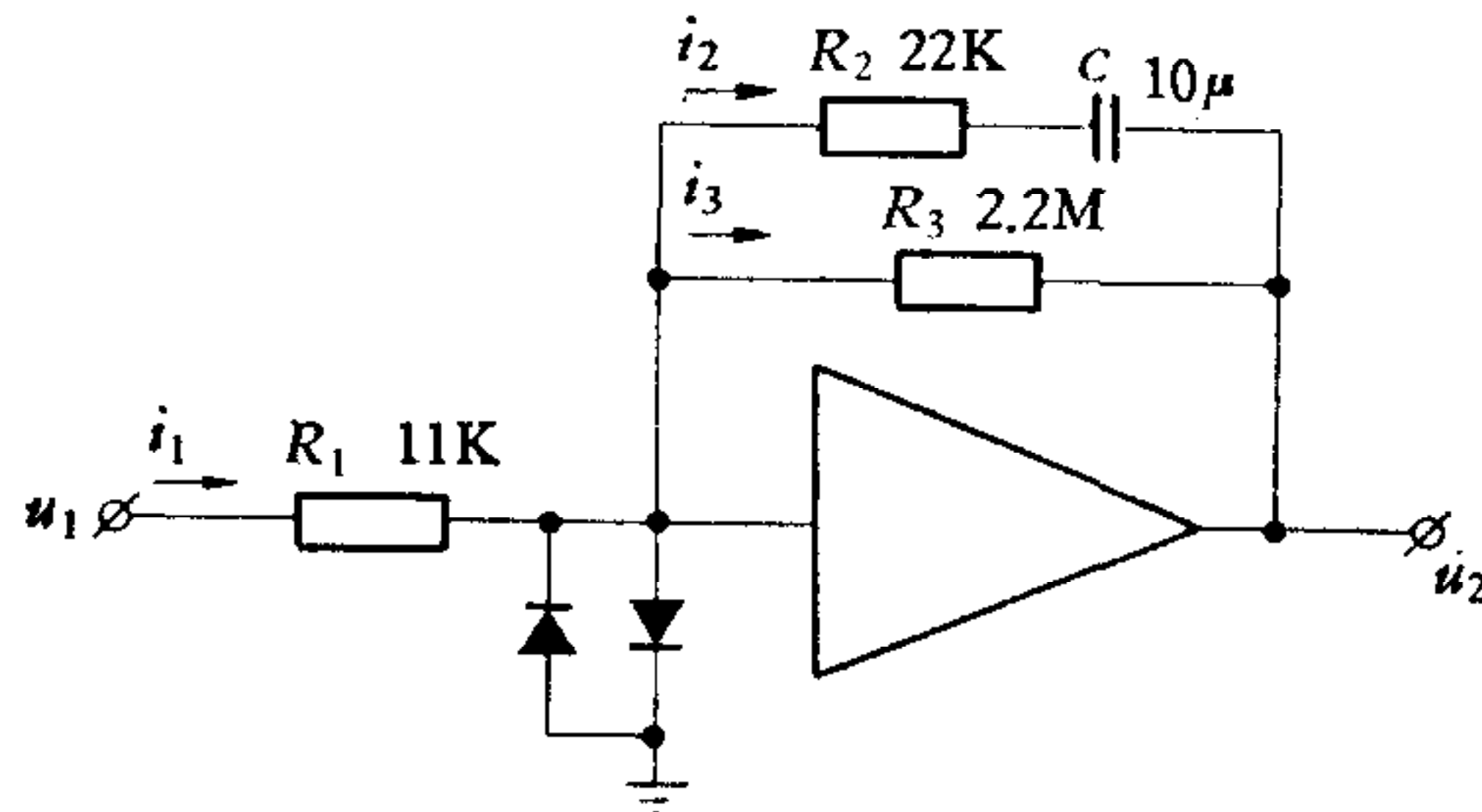


图 2

当积分校正的运算放大器工作在线性段时,图 2 中各电流的关系为

$$i_1 \approx i_2 + i_3.$$

考虑到  $R_3$  的阻值很大,  $i_3$  实际上很小,在动态分析中可以略去,因此上式可简化为

$$i_1 = i_2.$$

这样,我们可写得电容  $C$  上的电压变化率

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_2 = \frac{1}{R_1 C} u_1 \quad (4)$$

式中  $R_1 C = 0.11$  秒。

积分校正的输出  $u_2$  等于

$$u_2 = i_2 R_2 + u_c = u_1 \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + u_c$$

结合图 1 的参数,得

$$u_2 = 2u_1 + u_c \quad (5)$$

这里要说明的是对具体线路来说,  $u_2$  与  $u_1$  是反号的。不过我们将所有的符号都集中在式 (3),形成一个负反馈控制,其他各元件的方程式则一律标以正号。

当根据式 (5) 决定的  $u_2$  达到运算放大器的饱和值时,  $u_2$  不再变化,  $u_2 = u_{2\max} =$  常数。这时  $u_c$  将根据其初值作指数变化,即

$$R_2C \frac{du_c}{dt} + u_c = u_2 = \text{const.}$$

在具体线路中我们对运算放大器的线性范围还另外加以限制,限幅值为  $\pm 6V$ 。所以饱和后  $u_c$  的方程式为

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{R_2C} [-u_c \pm 6] \quad (6)$$

在归零过程中,设输入角  $\gamma = 0$  (图 1),故失调角为  $\theta$ 。失调角信号经放大后,再经过微分校正得  $u_1$ ,

$$u_1 = K_g(\theta + T_d\dot{\theta}) \quad (7)$$

式中  $T_d$ ——微分时间常数;

$K_g$ ——传感器与信号放大部分的的比例系数。本例中

$$T_d = 0.1 \text{ 秒,}$$

$$K_g = 356 \text{ V/弧度} = 1.73 \text{ mV/角秒.}$$

信号放大部分的线性范围为  $\pm 10 \text{ V}$ 。这个线性范围所对应的  $\theta_{\max}$  为

$$\theta_{\max} = \frac{10}{K_g} = 0.028 \text{ 弧度} = 5776 \text{ 角秒} \quad (8)$$

式(8)表明,只要失调角不超过 5776 角秒,信号放大部分就在线性段工作,不会进入饱和段。

我们将式(2)~(7)归在一起,得如下的方程组:

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (9)$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \begin{cases} -0.46(2u_1 + u_c), & |u_c + 2u_1| \leq 6V \\ -2.76 \text{ sign}(2u_1 + u_c), & |u_c + 2u_1| > 6V \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{du_c}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{0.11} u_1, & |u_c + 2u_1| \leq 6V \\ \frac{1}{0.22} [-u_c + 6 \text{ sign}(2u_1 + u_c)], & |u_c + 2u_1| > 6V \end{cases} \quad (11)$$

$$u_1 = 356(\theta + 0.1\dot{\theta}) \quad (12)$$

取

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 356\theta \\ x_2 &= 10\dot{\theta} \\ x_3 &= u_c \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

代入上列各式得系统的状态方程为

$$\frac{dx_1}{dt} = 35.6x_2, \quad (14)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{cases} -4.6[2x_1 + 7.12x_2 + x_3], & |2x_1 + 7.12x_2 + x_3| \leq 6 \\ -27.6 \text{ sign}(2x_1 + 7.12x_2 + x_3), & |2x_1 + 7.12x_2 + x_3| > 6 \end{cases} \quad (15)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \begin{cases} 9.1x_1 + 32.4x_2, & |2x_1 + 7.12x_2 + x_3| \leq 6 \\ 4.55[-x_3 + 6 \text{ sign}(2x_1 + 7.12x_2 + x_3)], & |2x_1 + 7.12x_2 + x_3| > 6 \end{cases} \quad (16)$$

#### 四、李亚普诺夫函数

我们先结合系统的线性部分来确定一个相应的李亚普诺夫函数, 然后以实际特性代入, 观察  $V$  函数的导数  $\dot{V}$ , 确定稳定范围.

设线性系统的特性为

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (17)$$

式中  $x$  为  $n$  维状态向量,

$A$  为  $n \times n$  矩阵,

取李亚普诺夫函数  $V$  为

$$V = x^T P x \quad (18)$$

式(18)中的矩阵  $P$  可从正规座标上来求取之<sup>[1]</sup>.

设  $U$  是由  $A$  的特征向量所组成的矩阵, 即  $U$  的每一列对应于  $A$  的特征向量. 那么, 我们知道, 这个矩阵  $U$  就表示了正规座标  $y$  与原座标  $x$  之间的变换关系:

$$x = Uy \quad (19)$$

在正规座标中, 若  $A$  的特征值不相重, 系统的方程式将简化为

$$\dot{y} = \Lambda y \quad (20)$$

式中  $\Lambda$  为对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

一般, 矩阵  $\Lambda$  为复数矩阵, 所以正规座标  $y$  也将是复数的. 因此, 李亚普诺夫函数的一种可能形式为

$$V = \bar{y}^T y = \|y\|^2 \quad (22)$$

式中  $\bar{y}$  是  $y$  的共轭复数向量.

对于这样的  $V$  函数, 可得

$$\dot{V} = \bar{y}^T [\bar{\Lambda} + \Lambda] y \quad (23)$$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n 2R_e \lambda_i |y_i|^2 \quad (24)$$

式(24)表明, 对于  $\dot{V}$  的负定性的要求, 就是要求特征根的实数部分小于零, 即

$$R_e \lambda_i < 0.$$

式(22)所表示的李亚普诺夫函数也可以用原座标  $x$  来表示之.

$$V = \bar{y}^T y = x^T (\bar{U}^{-1})^T (U^{-1}) x \quad (25)$$

比较式(25)与(18)可知, 矩阵  $P$  可根据特征向量矩阵来求得:

$$P = (U \bar{U}^T)^{-1} \quad (26)$$

结合我们这里所研究的系统来说, 根据式(14), (15), (16)可写得线性部分的系统方程式为



$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (27)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 35.6 & 0 \\ -9.2 & -32.75 & -4.6 \\ 9.1 & 32.4 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

矩阵  $A$  的特征值为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -4.17 \\ \lambda_{2,3} &= -14.29 \pm j12.4 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

相应的特征向量矩阵为

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.117 & -0.401 + j0.348 & -0.401 - j0.348 \\ -1.27 & 0.549 - j0.317 & 0.549 + j0.317 \end{bmatrix} \quad (30)$$

以式(30)代入式(26)可求得

$$P = \begin{bmatrix} 1.3630 & 2.2510 & 0.2665 \\ 2.2510 & 7.2200 & 0.7037 \\ 0.2665 & 0.7037 & 0.8879 \end{bmatrix} \quad (31)$$

将  $P$  代入式(18)可得李亚普诺夫函数

$$\begin{aligned} V = x^T P x &= 1.363x_1^2 + 7.22x_2^2 + 0.8879x_3^2 + 4.502x_1x_2 \\ &+ 0.533x_1x_3 + 1.4074x_2x_3 \end{aligned} \quad (32)$$

这个  $V$  函数是正定的。由于特征值的实数部分均为负，所以根据式(24)可知  $\dot{V}$  是负定的。由此可见，此系统工作在线性时，对于原点是渐近稳定的。这个结论也符合于一般的线性理论。

我们将采用这个  $V$  函数作为分析大范围稳定性的依据。

## 五、大范围稳定性

按照设计，线性稳定性当然是应该得到保证的。我们现在要研究的是进入饱和以后是否仍能保持  $\frac{dV}{dt} < 0$ ，或者  $\frac{dV}{dt} < 0$  的范围究竟有多大？

根据前面分析可知，在现在的这组参数下，信号放大部分在实际工作中是不会进入饱和段的。对这个系统来说，主要是积分校正会进入饱和。我们现在就来观察积分校正的输出  $u_2$  进入 6V 时的系统特性，此时

$$|2x_1 + 7.12x_2 + x_3| > 6V \quad (33)$$

对应的式(14)，(15)，(16)为

$$\frac{dx_1}{dt} = 35.6x_2 \quad (14')$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -27.6 \operatorname{sign}(2x_1 + 7.12x_2 + x_3) \quad (15')$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 4.55[-x_3 + 6 \operatorname{sign}(2x_1 + 7.12x_2 + x_3)] \quad (16')$$

考虑到对称性,我们来考虑  $u_2 = +6V$  的情况,即  $2x_1 + 7.12x_2 + x_3 > +6$ .  
我们先研究  $x_3 = +6$  平面.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} \quad (34)$$

式(34)中  $\partial V/\partial x_i$  可根据式(32)来计算,再以(14'),(15'),(16')代入并考虑到  $x_3 = +6$  就可以在  $x_3 = +6$  平面上标出  $\dot{V} < 0$  的区域(图3(a)). 图3(a)中还示有直线

$$2x_1 + 7.12x_2 + x_3 = 6,$$

积分校正进入饱和时的系统的运动就限于该直线的上方. 只要在该区域内总能保证  $\dot{V} < 0$ , 系统便能最终脱离饱和,进入线性工作.

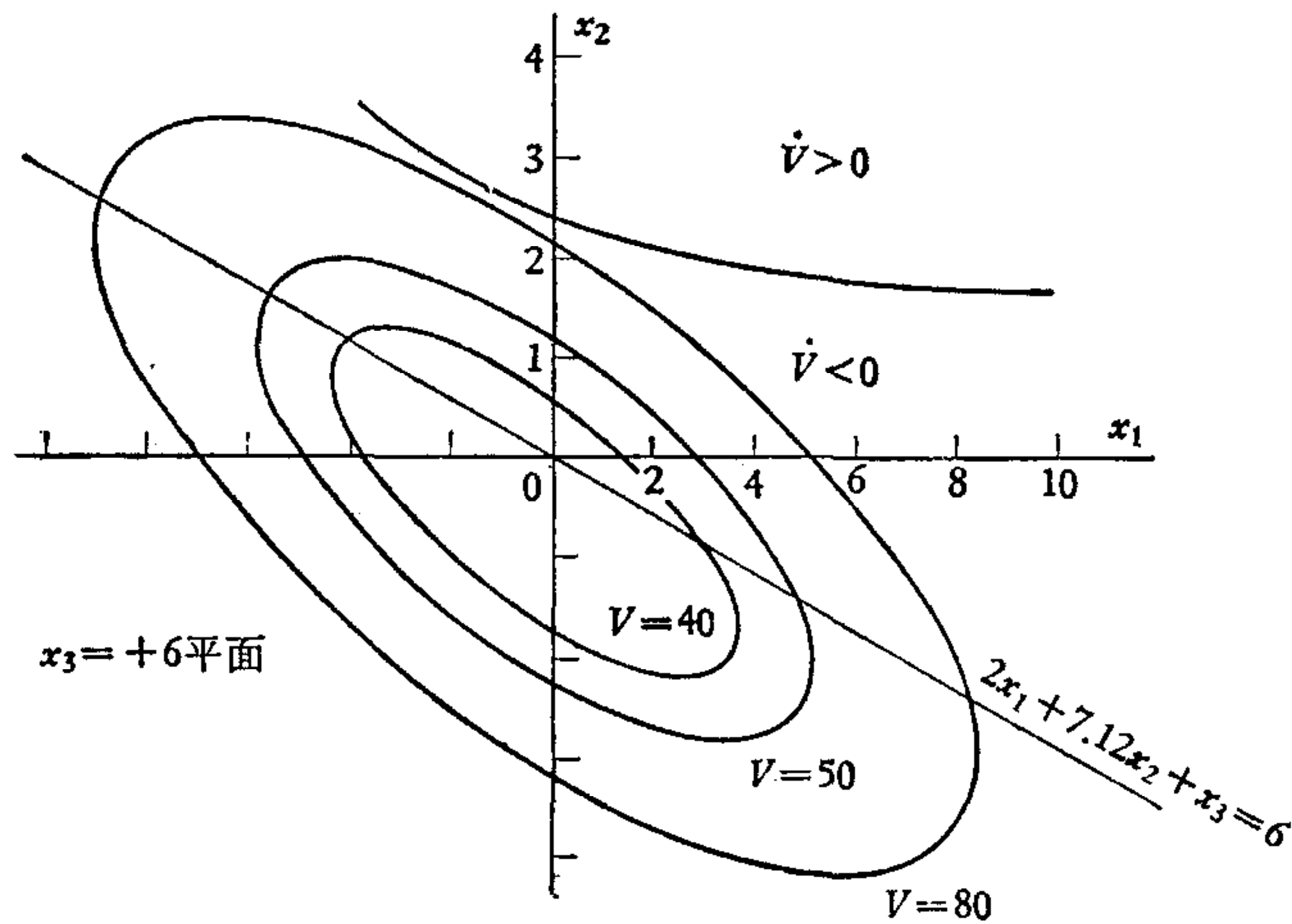


图 3(a)

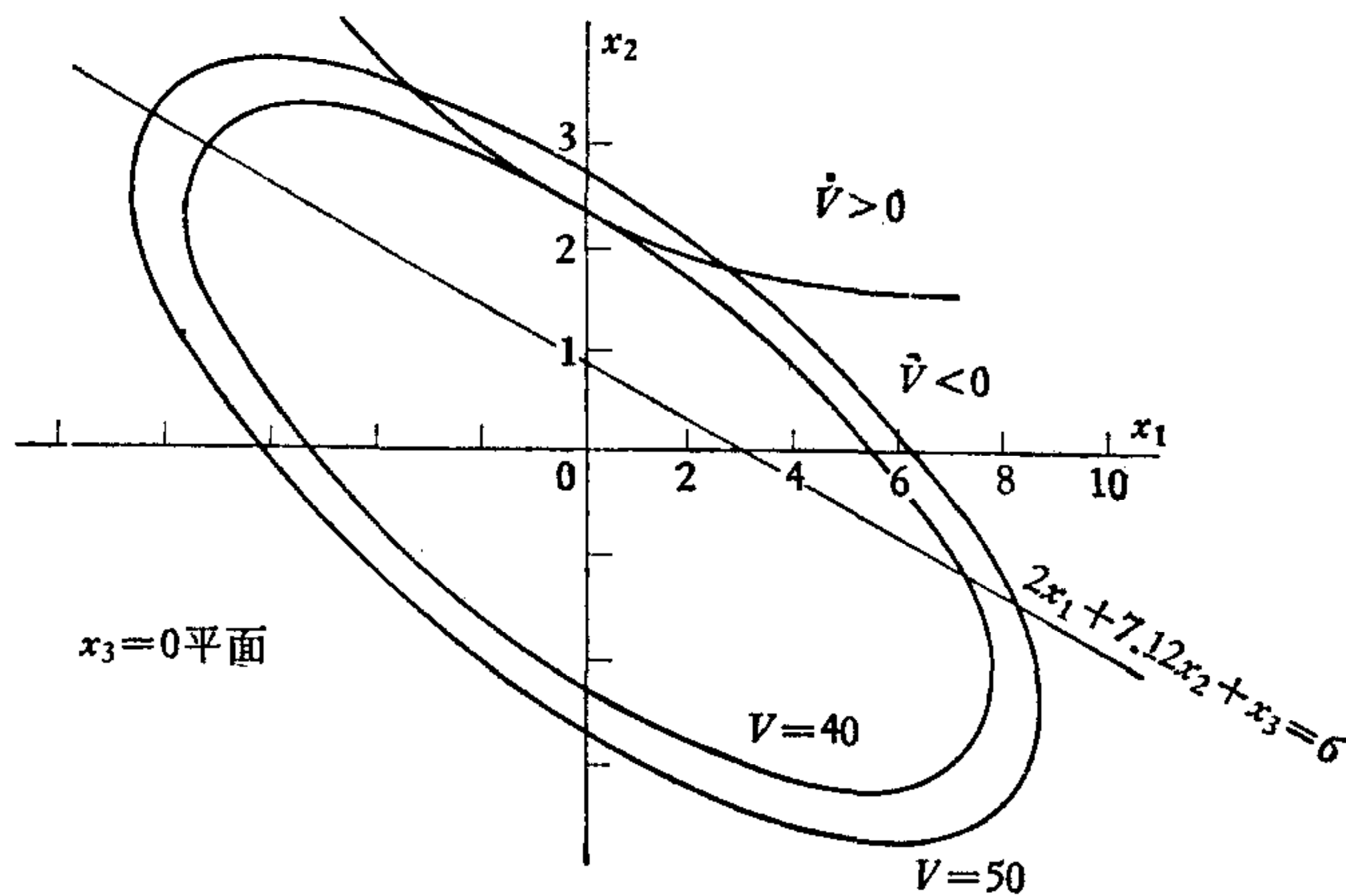


图 3(b)

但是光有  $\dot{V} < 0$  这一条件还是不够的. 严格说来,我们应该在  $\dot{V} < 0$  的区域内找出一个最大的  $V(x) = k$  ( $k$  为常数)的区域, 保证  $V(x) = k$  的封闭性. 只有在这样的区域

内才能保证当  $\dot{V} < 0$  时,运动向原点收敛.

根据对式(32)的  $V$  函数的计算,图 3(a) 中在  $x_3 = +6$  平面上标出了  $V$  等于 40, 50, 80 的图线. 对  $x_3 = +6$  平面来说,  $V = 80$  是  $\dot{V} < 0$  区域内仍保证  $V$  为封闭曲线的最大区域. 这个区域就是系统的稳定区域. 只要系统的初始条件是在这个区域以内,就能保证对原点的渐近稳定性.

但只是  $x_3 = +6$  平面还不足以说明问题. 根据同样的计算,可以在  $x_3 = 0$  的平面上标出积分校正进入饱和后  $\dot{V} < 0$  的区域(图 3(b)). 从图 3(b) 可以看到,对  $x_3 = 0$  平面来说,  $V = 40$  是  $\dot{V} < 0$  区域内仍保证  $V$  为封闭曲线的最大区域.

这样,根据对  $x_3 = +6$  和  $x_3 = 0$  平面的讨论,可以看到  $V = 40$  的封闭曲面是系统的稳定区域. 只要系统的初始条件是在这个区域以内,就能保证对原点的渐近稳定性. 例如,设投入工作时初始失调角为 0.5 度 (0.0087 弧度),  $\dot{\theta} = 0$ ,  $u_c = 0$ . 那么,根据式(13)可得

$$\begin{cases} x_{10} = 356\theta = 3.1 \\ x_{20} = 10\dot{\theta} = 0 \\ x_{30} = u_c = 0 \end{cases}$$

从图 3(b) 可知,  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$  位于  $V = 40$  的曲面以内,系统是渐近稳定的.

我们还应该看到,这个初始状态 ( $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$ ) 位于直线  $2x_1 + 7.12x_2 + x_3 = 6$  的上方,这表明投入工作时积分校正已进入饱和. 这符合于原来对系统增益分配所提出的要求. 从图 1 可知,积分校正的输出  $u_2$  就是功放级的输入电压. 积分校正的输出达到最大值进入饱和,就意味着功放级给出全力矩使系统得到最大的加速度.

上述分析表明,对于这类高增益系统,只要适当分配增益,使积分校正级首先进入饱和,不但可以在实际上保证系统的大范围稳定性,而且还保证了系统的快速性.

## 六、结 束 语

(1) 对于这种高增益系统,可以使积分校正级首先进入饱和来解决系统的大范围稳定性问题. 这一措施同时也保证了系统的快速归零.

(2) 就李亚普诺夫直接法来说,我们这里是根据一个具体的李亚普诺夫函数来确定稳定范围的. 这只是稳定的充分条件. 一般来说,实际上的稳定范围将比这更宽. 实践也表明,当投入工作时,速率  $\dot{\theta}$  高达  $20^\circ/\text{秒}$  (0.35 弧度/秒),即  $x_2 = 10\dot{\theta} = 3.5$  时(结合图 3)仍能保证稳定. 系统调试表明,按我们这组参数工作时,在各种实际的初始条件下,均能保证大范围稳定.

## 参 考 文 献

- [1] R. A. Nesbit, Several Applications of the Direct Method of Liapunov, *Advances in Control Systems*, 2 (1965).



## STABILITY IN-THE-LARGE OF A HIGH PRECISION SERVO SYSTEM

WANG GUANG-XIONG

*(Haerbin Institute of Technology)*

### ABSTRACT

In this paper the stability in-the-large of a high gain servo system is studied using the direct method of Liapunov.

The author also provides a successful method to improve the stability in-the-large of servo systems.