



鲁棒镇定问题的 H_∞ 优化设计¹⁾

王广雄 王新生

(哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150001)

(E-mail: gxwang@hope.hit.edu.cn)

摘要 将鲁棒镇定问题作为有约束的 H_∞ 优化问题来考虑. 讨论了鲁棒镇定问题中的约束条件和所要进行优化的性能指标. 通过卫星姿态控制的算例具体说明了这种优化设计过程.

关键词 有约束的 H_∞ 优化, 鲁棒镇定, 多目标控制, 线性矩阵不等式

中图分类号 TP273

H_∞ OPTIMAL DESIGN FOR ROBUST STABILIZATION

WANG Guang-Xiong WANG Xin-Sheng

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

(E-mail: gxwang@hope.hit.edu.cn)

Abstract The robust stabilization problem is considered as a constrained H_∞ optimal problem in this paper. The constraints in robust stabilization along with the H_∞ performance norm to be optimized are discussed. The design procedure is demonstrated by a satellite attitude control example.

Key words Constrained H_∞ optimization, robust stabilization, multiobjective control, linear matrix inequality(LMI)

1 引言

一般的 H_∞ 设计问题是在一个或几个约束下使某一项性能指标(H_∞ 范数)最小. 所以对实际设计问题来说, 求解的是有约束的 H_∞ 优化问题. 有约束的 H_∞ 优化问题不能用一个一般性理论简单地概括. 本文结合鲁棒镇定的设计问题来进行讨论. 鲁棒镇定问题一般有两个约束条件: 一是鲁棒稳定性要求, 要求一个相应的 H_∞ 范数小于或等于 1; 第二个约束是系统的伺服刚度(等于控制器的静态增益 K_c)的要求, 伺服刚度反映了系统抑制干扰的能力, 在实际问题中常是一种设计要求, 是个规定值, 所以也是设计中的一个约束. 伺服刚度的要求

1) 国家教委博士点基金(96021314)资助项目

收稿日期 2000-08-14 收修改稿日期 2001-01-15

在某些设计中也反映为对带宽的要求. 对鲁棒镇定问题来说, 还有一个要求就是控制输入 u 要尽量小. 所以, 从 H_∞ 优化设计的角度来说, 就是要在上述两个约束下, 使反映 u 值的一个 H_∞ 范数指标最小.

为了能具体说明本文的设计思想, 结合一个卫星姿态控制的算例来讨论^[1]. 关于卫星姿态控制的设计要求见附录.

2 鲁棒稳定性的 LMI 约束

有约束的优化是一种多目标问题, 所以本文的 H_∞ 设计采用 LMI 法^[2], 即对每一个设计目标都形成一个独立的闭环系统设计问题——线性矩阵不等式(LMI).

对鲁棒稳定性要求来说, 因为只要考虑系统的自治部分特性, 故系统的方程式为

$$\dot{x} = A(\Delta)x \tag{1}$$

式中 $A(\Delta) := A_{cl} + B_{cl}(I - \Delta D_{cl})^{-1} \Delta C_{cl}$, $A_{cl} \in R^{n \times n}$. 这里设状态阵 $A(\Delta)$ 与不确定性阵 Δ 是一般的分式变换关系, Δ 是范数有界的

$$\sigma_{\max}(\Delta) \leq \gamma^{-1} \tag{2}$$

根据小增益定理, 不确定系统(1)和(2)鲁棒稳定的充要条件是与 Δ 相连的部分(图 1), 即从 v 到 e 的系统内稳定, 且

$$\|T_{ev}\|_\infty < \gamma \tag{3}$$

式中 T_{ev} 是从 v 到 e 的传递函数.

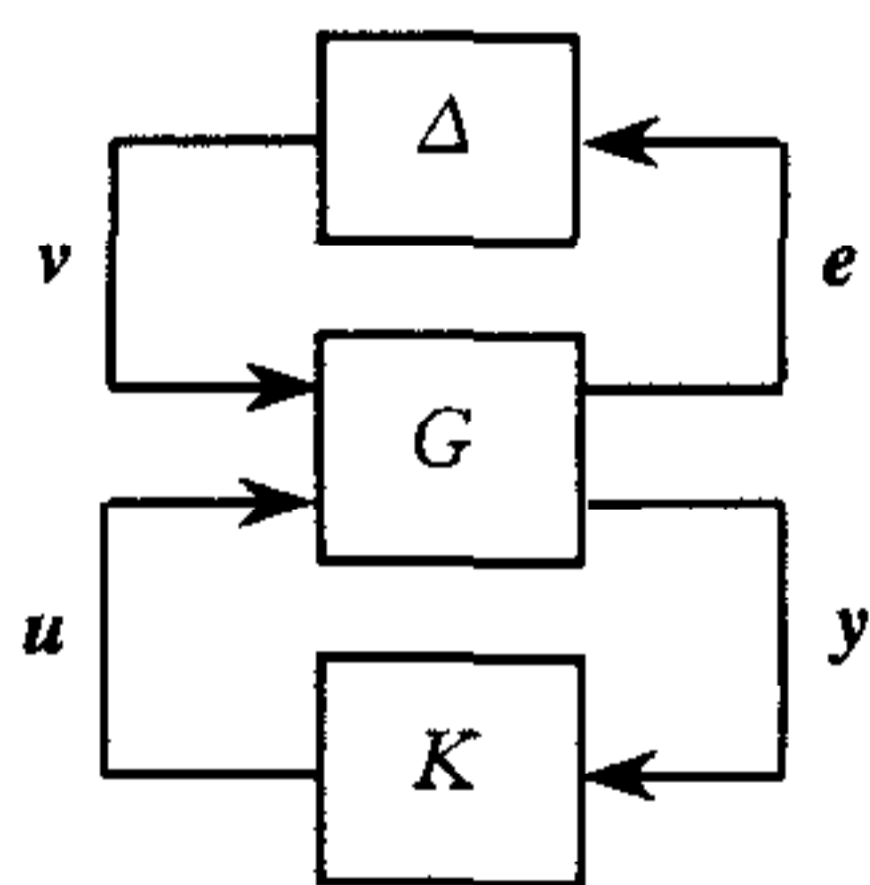


图 1 控制系统框图

设对象 G 的状态方程式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w \end{cases} \tag{4}$$

控制器 K 的状态方程式为

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_Kx_K + B_Ky \\ u = C_Kx_K + D_Ky \end{cases} \tag{5}$$

本文中设控制器为全阶, $x_k \in R^n$.

求解式(3)的有界实(bounded real)问题时, 还需要将控制器作线性化变换^[3], 将控制器的参数变换为新的 $\tilde{A}_K, \tilde{B}_K, \tilde{C}_K$, 使式(3)变换成各待求参数的线性矩阵不等式. 下面用定理的形式给出这个结果. 这个定理是在文献[4]定理 5.1 的基础上得出的, 所以证明从略.

定理 1. 存在能使式(3)成立的全阶控制器 $K(s)$ 的充要条件是, 存在对称阵 R, S 和矩阵 $\tilde{A}_K, \tilde{B}_K, \tilde{C}_K, D_K$, 使下式

$$\begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2\tilde{C}_K + (B_2\tilde{C}_K)^T & \tilde{A}_K^T + (A + B_2D_KC_y) & * & * \\ \tilde{A}_K + (A + B_2D_KC_y)^T & A^T S + SA + \tilde{B}_K C_y + (\tilde{B}_K C_y)^T & * & * \\ (B_1 + B_2D_KD_{21})^T & (SB_1 + \tilde{B}_K D_{21})^T & -\gamma I & * \\ (C_1 R + D_{12}\tilde{C}_K) & C_1 + D_{12}D_K C_2 & D_{11} + D_{12}D_K D_{21} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \tag{7}$$

成立,式中 * 表示省略的对称项.

如上述 LMIs 有解,则控制器的 $\tilde{A}_K, \tilde{B}_K, \tilde{C}_K$ 可从线性方程组直接写出^[4].

3 带宽和相应的 H_∞ 范数条件

系统的带宽反映了系统的响应速度.虽然带宽是在闭环特性上定义的,不过设计中也常将开环特性过零分贝线的穿越频率 ω_c 称为带宽.对卫星姿态控制来说(见附录),带宽 ω_c 不能超出对象的谐振频率 ω_0 ,因为如果 ω_c 超出 ω_0 ,由于对象特性衰减很快,在这种带宽下工作时控制输入 u 势必很大^[5].对应本例的参数,最小的 ω_0 为 1,故 ω_c 应小于 1.另一方面,这个 ω_c 是由控制器的静态增益 K_c 直接决定的,而 K_c 是系统的伺服刚度,设计中应尽可能取最大的值.考虑到控制规律中有超前校正,故取 $K_c = 0.3$.

对于 K_c 的限定是设计中的第二个约束.本例中将其转换成如下的 H_∞ 范数约束

$$\left\| \frac{W_1 G}{1 + KG} \right\|_\infty \leq 1 \quad (8)$$

这是因为低频段 $KG(j\omega) \gg 1$,所以低频段的 $G/(1+KG) \approx 1/K$,故对式(8)优化设计的结果将是 $\|W_1/K\|_\infty \approx 1$.由于控制器的微分作用一般是在中频段起作用,所以低频段特性就是 K_c ,即有 $K_c \approx W_1$.也就是说,由式(8)通过权系数 W_1 可以实现对 K_c 的限定,如取 $W_1 = 0.3$ 就可以限制 $K_c = 0.3$.

K_c 虽与 ω_c 有关,但 $K_c = 0.3$ 尚不能保证 ω_c 一定小于 1(对象最小的的谐振频率).这是因为控制器中有微分作用,会将整个开环特性上抬,有可能将系统的带宽拉宽,使其大于对象的谐振频率,从而导致 u 过大.所以从设计角度来说,还有一个要求:尽量压低 u_{\max} ,或者说要尽量限制控制器的高频增益.这个要求转化为 H_∞ 范数指标就是求解下列的 H_∞ 优化问题

$$\min_K \left\| \frac{W_2 K}{I + KG} \right\|_\infty \quad (9)$$

这是因为在高频段 $KG \ll 1, K/(1+KG) \approx K$,所以可以通过求解式(9)的优化问题来压低 $K(j\omega)$ 的高频段特性,式中 W_2 是权函数.本文主要是为了说明问题的本质,为了简化计算,将 W_2 取为常数.

设用 β 表示式(9)所能达到的最小值,将式(9)除以 β 再与式(3)和(8)合到一起就形成了鲁棒镇定问题中的有约束 H_∞ 优化问题:寻求一个最小的 β 值,联合求解下列三式

$$\min_K \|T_{ev}\|_\infty = \gamma, \quad \sigma_{\max}(\Delta) \leq 1 \quad (10a)$$

$$\min_K \left\| \frac{W_1 G}{1 + KG} \right\|_\infty = \gamma, \quad \min_K \left\| \beta^{-1} \frac{W_2 K}{1 + KG} \right\|_\infty = \gamma \quad (10b), (10c)$$

使 H_∞ 范数最小值 γ 等于 1.

具体做法:给定一个 β 值,求解上述的 H_∞ 优化问题,如果其优化解 γ 大于 1,则加大 β 值,直至 $\gamma = 1 + \epsilon$,式中 ϵ 是一个允许量.

4 算 例

通过一个卫星姿态控制的算例来进一步说明这种有约束 H_∞ 优化的设计思想.

根据附录中的参数,用平均值 $k_0=0.245$, $d_0=0.0219$,作为名义值来列写广义对象的方程式,这里 W_1, W_2 和 β (待选项)都成为广义对象的参数,其中 $W_1=0.3, W_2=0.07$.

对鲁棒稳定性约束来说,取

$$k = k_0(1 + w_k \cdot \delta_k), |\delta_k| \leq 1; \quad d = d_0(1 + w_d \cdot \delta_d), |\delta_d| \leq 1 \quad (11)$$

式中 w_k 和 w_d 是对应的权系数, $w_k=0.6327$, $w_d=0.8265$.

将式(11)代入附录中对象的方程式,并将 δ_k 和 δ_d 单独提取出来,按 $\Delta = \text{diag}[\delta_k, \delta_d]$ 的形式整理成图 1 中的广义对象 G (状态空间实现),代入式(6)形成第一个 LMI. 将式(10b)和(10c)也列写成类似于鲁棒稳定性条件的式(6),所以共有三个 LMI. 作为多目标设计来说,这三个 LMI 中的 R 阵和 S 阵是相同的,应满足式(7),这是第四个 LMI. 应用 MATLAB 软件 LMI 控制工具箱^[6]中的函数 $\text{mincx}(\cdot)$ 对这联合的四个 LMI 寻优,逐渐加大 β 值到 $\beta=333$ 时得 $\gamma_{\min}=1.05$,停止迭代. 得控制器为

$$K(s) = 455.2 \frac{(s + 0.01 + 0.87i)(s + 0.01 - 0.87i)(s + 0.31)(s + 39472)}{(s + 17.18 + 13.83i)(s + 17.18 - 13.83i)(s + 7.83)(s + 3736)} \quad (12)$$

图 2 是控制器的频率特性. 式(12)和图 2 表明,控制器的静态增益 $K_c=0.293$,符合前面提出的对伺服刚度的要求,也是根据权函数 $W_1=0.3$ 用 H_∞ 优化设计的自然结果.

图 2 表明控制器的高频段略高于 70dB,这也是 H_∞ 综合的结果. 因为根据式(9),高频段 $W_2 K(j\omega) = \beta$, 优化设计的结果是 $\beta=333$, 而 $W_2=0.07$, 所以 $K(j\omega)$ 的上限等于 $\beta/W_2=73.6\text{dB}$.

系统的鲁棒性本例中是用 k_{\min}, k_{\max} 和 d_{\min}, d_{\max} 组合的四个顶点的参数代入来检验. 图 3 是对应这四组参数的系统在对象输入端加单位脉冲干扰时的输出响应 $\theta_2(t)$ (其中有两曲线基本重合). 图中曲线的波动是由挠性结构的谐振模态造成的.

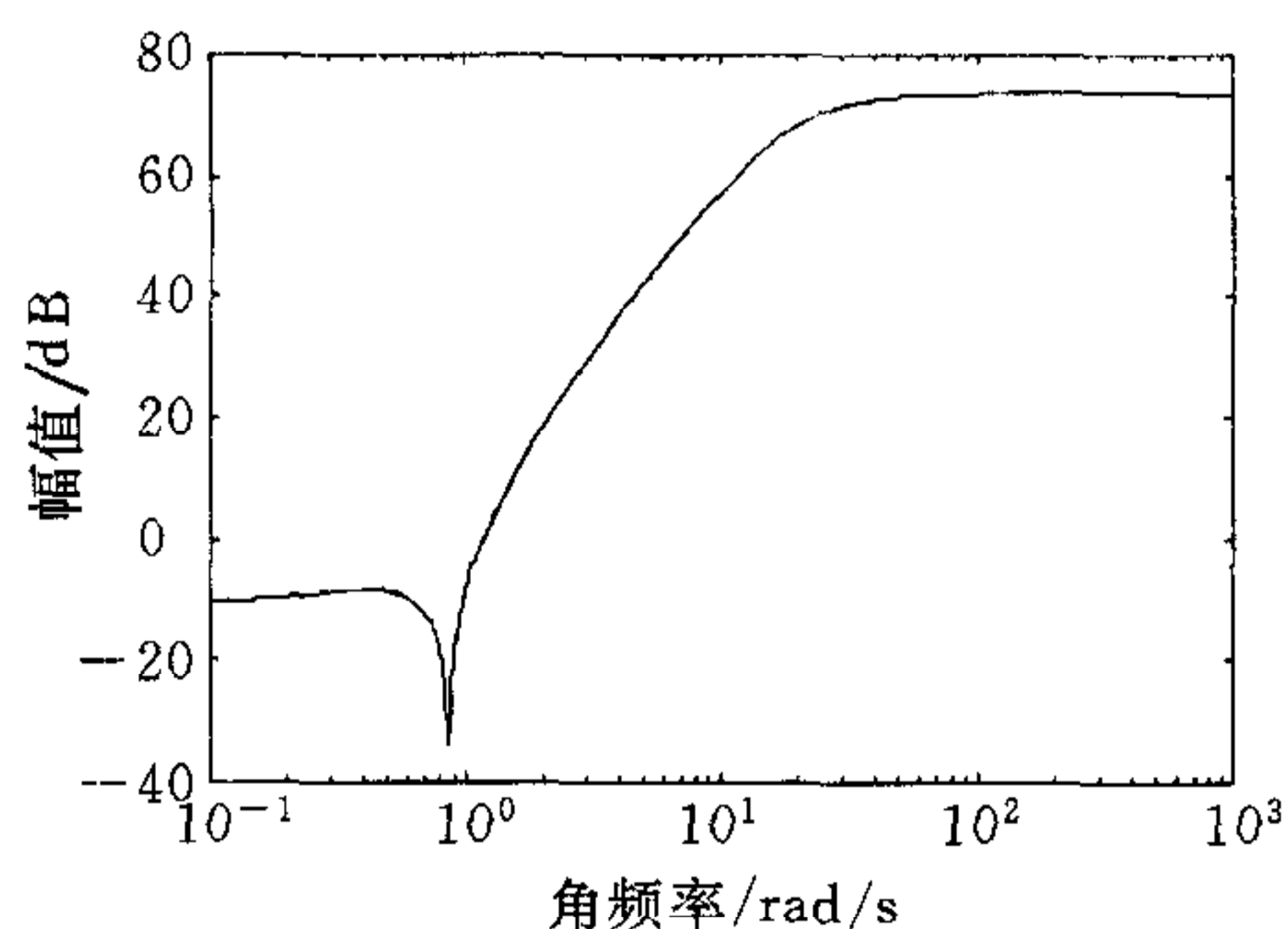


图 2 控制器的频率特性

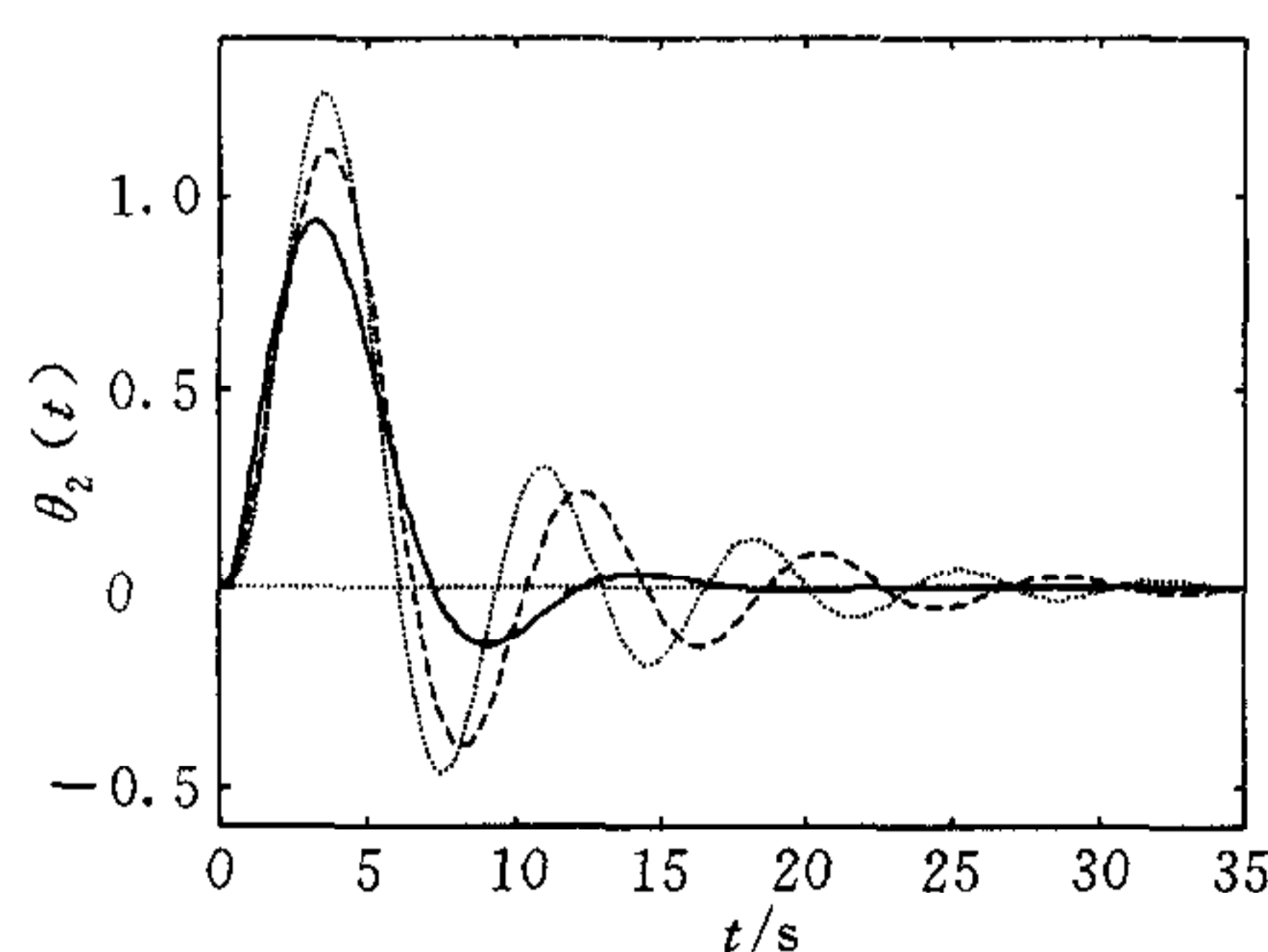


图 3 不同参数下对输入端扰动的单位脉冲响应

5 结 论

1) 实际的鲁棒镇定问题是一种有约束的 H_∞ 优化问题. 鲁棒稳定性的小增益条件是第一个约束,第二个约束是伺服刚度,反映系统对对象输入端扰动的抑制能力,设计应在满足这两个约束条件下使控制输入 u 最小.

2) 对于多目标问题,只要能各个设计要求/约束写成 H_∞ 范数条件($\leq \gamma$),就可以列写出相应的式(6),并利用定理 1 求得 H_∞ 控制器.

参 考 文 献

- 1 Franklin G J, Powell J D, Emami-Naeini A. Feedback Control of Dynamic Systems. USA Massachusetts: Addison-Wesley, 1986, 447~474
- 2 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 1994, 4(1):421~448
- 3 Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, 42(7):896~911
- 4 Chilali M, Gahinet P, Apkarian P. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, 44(12):2257~2270
- 5 Doyle J, Stein G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, 26(1):4~16
- 6 Gahinet P, Nemirovski A *et al.* LMI Control Toolbox. USA Natick, Mass.; The Mathworks Inc. 1995

附 录

卫星姿态的控制问题.

设卫星系统由主舱和仪器舱经柔性臂连接组成^[1]. 柔性臂可以看成是弹性系数为 k 、粘滞摩擦系数为 d 的弹簧, θ_1 和 θ_2 分别为主舱和仪器舱的姿态角.

设控制力矩 $T = u$, J_1 和 J_2 为转动惯量. 选状态变量 $x^T = [\theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1]$, 则状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_2} & -\frac{d}{J_2} & \frac{k}{J_2} & \frac{d}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_1} & \frac{d}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{d}{J_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix} u.$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x.$$

当 $J_1 = 1, J_2 = 0.1$ 时的传递函数为

$$G(s) = \frac{10ds + 10k}{s^2(s^2 + 11ds + 11k)}.$$

由于受温度波动的影响, k 和 d 在一定范围内变化, 即 $0.09 \leq k \leq 0.4$, $0.0038 \leq d \leq 0.04$, 导致对象的谐振频率 ω_0 将在 1rad/s 和 2rad/s 之间变化, 以及相应的阻尼比变化.

控制的任务就是要求在参数摄动下保持姿态角 θ_2 稳定.

王广雄 教授, 博士生导师. 主要研究方向为 H_∞ 控制理论及应用、高精度伺服系统设计.

王新生 1995 年于哈尔滨工业大学获硕士学位, 现在哈尔滨工业大学攻读博士学位. 主要研究方向为鲁棒控制系统设计.