

控制系统校正网络参数最优化的 计算机辅助设计

章扬宗

(上海仪表厂)

摘 要

本文介绍一种由计算机实现的控制系统校正网络参数最优化的设计方法,算法简单、收敛、便于工程应用。经过计算机迭代计算后所设计的校正网络,在给定频率点上的幅相特性与期望校正特性趋于一致。该方法已在工程设计中使用。

对于某一控制系统,根据其稳定性和动态性能的设计指标,要求校正网络在给定的 n 个频率点上具有一定的幅值和相位,以对系统进行校正。

假定初始给出的校正网络传递函数为

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} \left(1 + \frac{1}{\omega_i} s\right) \prod_{k=1}^{m_3} \left[1 + 2 \frac{\xi_k}{\omega_k} s + \frac{1}{\omega_k^2} s^2\right]}{\prod_{j=1}^{m_2} \left(1 + \frac{1}{\omega_j} s\right) \prod_{l=1}^{m_4} \left[1 + 2 \frac{\xi_l}{\omega_l} s + \frac{1}{\omega_l^2} s^2\right]} \quad (1)$$

这个网络可以由设计者任意设定,也可以是经初步设计后所得到的结果。一般情况下,初始网络在给定频率点的频率特性并不满足期望校正特性的要求,两者相差甚远。因此网络设计中需要对该网络的参数进行逐次修正,经修正后的校正网络在给定频率点的频率特性与期望特性趋于一致。本文介绍一种采用现成的数学工具,由计算机实现校正网络参数的优化设计方法。

一、网络参数最优化的计算机辅助设计原理及程序框图

假定初始网络共有 m 个参数,分别为 u_1, u_2, \dots, u_m 。由(1)式可知,

$$m = m_1 + m_2 + 2m_3 + 2m_4. \quad (2)$$

设在第 k 个给定频率点上,该网络的幅值和相位分别为

$$L = L(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad (3)$$

$$\theta = \theta(u_1, u_2, \dots, u_m). \quad (4)$$

由于函数(3), (4)均为非线性函数,当 $\Delta u_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 取得很小时,参数修正后的网络在该频率点的幅值和相位,可近似用泰勒级数的前两项表示,即

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_m + \Delta u_m) \\
 &\doteq L(u_1, u_2, \dots, u_m) + \left(\frac{\partial L}{\partial u_{1,k}} \cdot \Delta u_1 + \frac{\partial L}{\partial u_{2,k}} \Delta u_2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial u_{m,k}} \Delta u_m \right), \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \theta(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2, \dots, u_m + \Delta u_m) \\
 &\doteq \theta(u_1, u_2, \dots, u_m) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_{1,k}} \Delta u_1 + \frac{\partial \theta}{\partial u_{2,k}} \Delta u_2 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \theta}{\partial u_{m,k}} \Delta u_m \right). \tag{6}
 \end{aligned}$$

所以在第 k 个频率点上, 参数修正后网络频率特性的增量为

$$\Delta L = L_1 - L = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial u_{i,k}} \cdot \Delta u_{i,k} \tag{7}$$

$$\Delta \theta = \theta_1 - \theta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \theta}{\partial u_{i,k}} \cdot \Delta u_{i,k} \tag{8}$$

其偏导数 $\frac{\partial L}{\partial u_{i,k}}$, $\frac{\partial \theta}{\partial u_{i,k}}$ 分别为当第 i 个网络参数变化时, 网络在第 k 个频率点上幅值和相位的变化率. 可以证明, 一阶环节的偏导数为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(s)}{\partial \omega} \Big|_{s=j\Omega} &= -4.343 \cdot \frac{2Q^2}{\omega(\omega^2 + Q^2)}, \\
 \frac{\partial \theta(s)}{\partial \omega} \Big|_{s=j\Omega} &= -\frac{Q}{\omega^2 + Q^2}; \tag{9-10}
 \end{aligned}$$

二阶环节的偏导数

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(s)}{\partial \omega} \Big|_{s=j\Omega} &= 4.343 \cdot \frac{4Q^2 \left(1 - 2\xi^2 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)}{\omega^3 \left[\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{Q^2}{\omega^2} \right]}, \\
 \frac{\partial \theta(s)}{\partial \omega} \Big|_{s=j\Omega} &= -2 \cdot \frac{\xi \frac{Q}{\omega^2} \left(1 + \frac{Q^2}{\omega^2} \right)}{\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{Q^2}{\omega^2}}, \\
 \frac{\partial L(s)}{\partial \xi} \Big|_{s=j\Omega} &= 4.343 \cdot \frac{8\xi \frac{Q^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{Q^2}{\omega^2}}, \\
 \frac{\partial \theta(s)}{\partial \xi} \Big|_{s=j\Omega} &= \frac{2 \frac{Q}{\omega} \left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)}{\left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{Q^2}{\omega^2}}. \tag{11-14}
 \end{aligned}$$

当网络的 m 个参数同时被修正时, 其频率特性的增量可以用向量形式表示

$$\begin{pmatrix} \Delta L_1 \\ \vdots \\ \Delta L_n \\ \Delta \theta_1 \\ \vdots \\ \Delta \theta_n \end{pmatrix} = \Delta u_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_{1,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial u_{1,n}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L}{\partial u_{1,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_{1,n}} \end{pmatrix} + \Delta u_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_{2,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial u_{2,n}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L}{\partial u_{2,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_{2,n}} \end{pmatrix} + \cdots + \Delta u_m \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_{m,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial u_{m,n}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L}{\partial u_{m,1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial u_{m,n}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

定义梯度矩阵

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \omega_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial \omega_{2,1}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \omega_{p,1}} \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_{1,2}} & \frac{\partial L}{\partial \omega_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \omega_{p,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_{1,n}} & \frac{\partial L}{\partial \omega_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \omega_{p,n}} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \xi_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial \xi_{2,1}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \xi_{q,1}} \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_{1,2}} & \frac{\partial L}{\partial \xi_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \xi_{q,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_{1,n}} & \frac{\partial L}{\partial \xi_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial \xi_{q,n}} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{1,1}} & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{2,1}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{p,1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{1,2}} & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{p,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{1,n}} & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \omega_{p,n}} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{1,1}} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{2,1}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{q,1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{1,2}} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{q,2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{1,n}} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{2,n}} & \cdots & \frac{\partial \theta}{\partial \xi_{q,n}} \end{pmatrix}.$$

式中 $p = m - (m_3 + m_4)$; $q = m_3 + m_4$. 由式 (15) 可知, 参数修正后, 网络频率特性的增量是 B 阵中的 m 列元素的线性组合. 显然, 如果由 B 阵 m 列元素线性组合所得到的频率特性增量, 能最佳逼近参数修正前网络幅相特性与期望特性在 n 个频率点的差值 $e_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$, 那么经过上述的参数修正, 这些差值就可得到最佳补偿, 网络特性与期望特性即趋于一致. 一般来说, 由公式 (9)~(14) 计算得到的 B 阵的 m 列元素是线性无关的. 因此上述问题的实质, 与在离散情况下用一组线性无关的函数组的线性组合最优逼近某一已知函数相同. 在函数逼近理论中, 求解这类问题的一种最直接的方法

是切比雪夫平方逼近法¹⁾。根据这种方法,如果由函数 $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ 组成的函数组,在 $2n$ 个离散点 x_1, x_2, \dots, x_{2n} 上对于权函数 $\lambda(x)$ 是正交的,即满足

$$\sum_{v=1}^{2n} \lambda(x_v) P_i(x_v) P_j(x_v) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \alpha_i \neq 0, & i = j, \end{cases} \quad (17)$$

则用该函数组的线性组合

$$\varphi_m(x) = a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots + a_m P_m(x) \quad (18)$$

带一权函数 $\lambda(x)$, 在 $2n$ 个离散点上平方逼近一已知函数 $f(x)$ 时,系数 a_1, a_2, \dots, a_m 可由下列公式确定:

$$a_k = \frac{\sum_{v=1}^{2n} \lambda(x_v) P_k(x_v) f(x_v)}{\sum_{v=1}^{2n} \lambda(x_v) P_k^2(x_v)}, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (19)$$

此时,

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\sum_{v=1}^{2n} \lambda(x_v) P_k(x_v) f(x_v)}{\sum_{v=1}^{2n} \lambda(x_v) P_k^2(x_v)} \right] \cdot P_k(x). \quad (20)$$

在 $2n$ 个离散点上对 $f(x)$ 的逼近是以 $\lambda(x_v)$ 为权的平方最优的。根据上述公式,计算机每次迭代修正参数时,网络参数的最优增量将按式(19)确定,相当于式(18)中系数 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 的确定。而 B 阵中每一列元素,对应于式(18)右端每一个函数在 $2n$ 个离散点上的一组取值。差值 e_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) 与函数 $f(x)$ 的 $2n$ 个离散值相对应。对照公式(15),(18)可以看出,按式(19)求出的参数增量 Δu_i ($i = 1, 2, \dots, m$),将使频率特性增量 $\Delta L_i, \Delta \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 最佳逼近差值 e_1, e_2, \dots, e_{2n} 。计算机按上述数学原理进行迭代计算,不断修正网络参数,从而实现网络参数的优化设计。

应该指出,式(19)中的权函数 $\lambda(x)$ 具有十分确切的物理含义。 $\lambda(x)$ 在每个给定频率点上的值反映了设计者对该点频率特性要求的重视程度,因此 $\lambda(x)$ 的 $2n$ 个值应在网络设计时首先加以确定。一旦确定之后,对于权函数 $\lambda(x)$ 的正交化由式(17)定义。

本文介绍的用函数逼近理论来设计网络参数的方法,一般来说其解是收敛的。因此即使当初始网络的频率特性与期望特性相差很远时,用这一方法也能找到一组最优参数,使该网络的频率特性与期望特性是最接近的。当用低阶网络无法实现期望的频率特性时,则需要增加网络的参数,用高阶网络来实现。在运算速度为每秒 10 万次的计算机上用该方法设计一个六阶至十阶的网络,一般半小时内就可完成。因此从工程的观点来看,该方法所包含的计算量也是完全可以接受的。

参数优化设计的程序框图见图 1。

1) 中国科学院计算技术研究所,计算方法讲义。

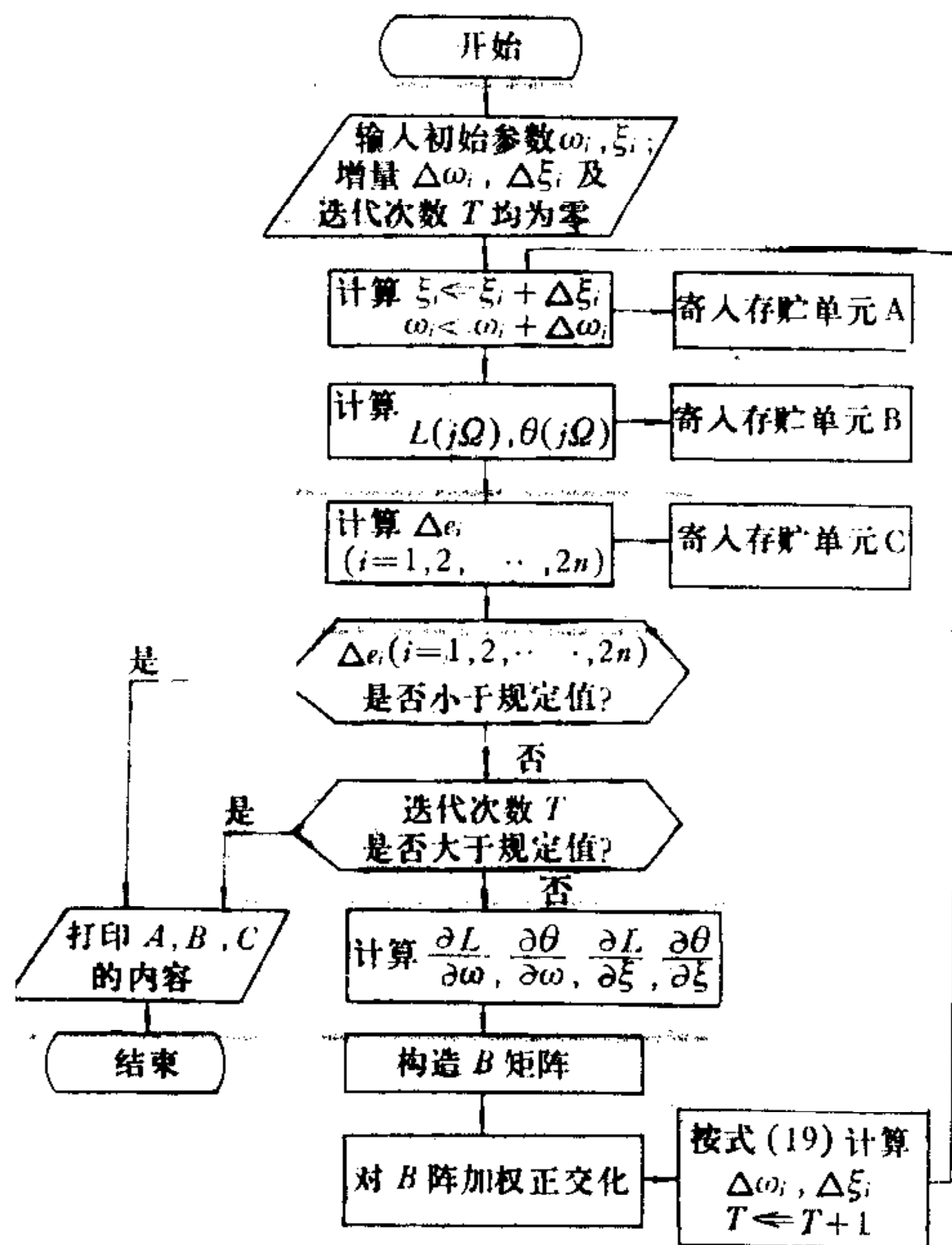


图 1

二、实 例

设一控制系统, 根据其设计指标的综合结果, 要求校正网络具有表 1 所示的校正特性。

表 1

ω (弧度/秒)	0.2	1.7	5.8	9.2	11	27	39	63	79
$ W(j\omega) $ (分贝)	0 ± 0.5	-0.4 ± 0.5	< -4	-8.4 ± 1	-10.8 ± 1	< -39	< -22	< -32	< -20
$\angle W(j\omega)$ (度)	-5 ± 5	> -24	-70 ± 5	-120 ± 30	-110 ± 20	—	—	—	—

表 1 中, 第一行是给定的频率点, 第二、第三行分别为在该频率点上期望的幅值、相位及其允许偏差。假定初始网络是任意设置的, 其传递函数为

$$W(p) = \frac{\left(\frac{p}{20} + 1\right)\left(\frac{p}{50} + 1\right)\left[\left(\frac{p}{20}\right)^2 + \frac{2 \times 0.2}{20}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{60}\right)^2 + \frac{2 \times 0.3}{60}p + 1\right]}{\left[\left(\frac{p}{15}\right)^2 + \frac{2 \times 0.6}{15}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{40}\right)^2 + \frac{2 \times 0.6}{40}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{80}\right)^2 + \frac{2 \times 0.5}{80}p + 1\right]}$$

取 $\lambda(x) = 1$, 经过计算机的参数优化设计后得到的校正网络为

$$W^*(p) = \frac{\left(\frac{p}{51} + 1\right)\left(\frac{p}{79} + 1\right)\left[\left(\frac{p}{29}\right)^2 + \frac{2 \times 0.08}{29}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{57}\right)^2 + \frac{2 \times 0.605}{57}p + 1\right]}{\left[\left(\frac{p}{7.5}\right)^2 + \frac{2 \times 0.86}{7.5}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{51}\right)^2 + \frac{2 \times 0.91}{51}p + 1\right]\left[\left(\frac{p}{49}\right)^2 + \frac{2 \times 0.83}{49}p + 1\right]}$$

$W(p)$ 与 $W^*(p)$ 在各个给定频率点的幅、相值与期望特性的差值分别示于表 2、表 3。

表中 $\Delta L, \Delta \theta$ 为网络 $W(p)$ 与期望特性的差值, $\Delta L^*, \Delta \theta^*$ 为网络 $W^*(p)$ 与期望特性的差值, 从表

表 2

ω	0.2	1.7	5.8	9.2	11	27	39	63	79
$ \Delta L $	0	0	4	6.8	8.4	33.8	20.18	30.46	21.48
$ \Delta L^* $	0	0	0.728	0	0	0.85	0	0.98	0

表 3

ω	0.2	1.7	5.8	9.2	11	27	39	63	79
$ \Delta\theta $	0	0	55.5	71	65.3	—	—	—	—
$ \Delta\theta^* $	0	0	1.616	0	0	—	—	—	—

2,表 3 的比较结果可以看出,参数优化后网络的幅相特性与原来的网络相比,得到了明显的改善。

王培垣、孙显桐、顾传玉、陈百初等同志曾给予很多指导和帮助,在此特向这些同志致以谢意。

AN OPTINIZING DESIGN METHOD OF CORRECTIVE NETWORK PARAMETER IN CONTROL SYSTEMS

ZHANG YANGZONG

ABSTRACT

A computer-implemented optimizing design method of the corrective network parameter in control systems is introduced in this paper. Its algorithm is simple, convergent and can be easily used in engineering applications.

Through the iterative calculation of the computer, the amplitude-phase characteristics of the designed corrective network and the expected characteristics at the given frequency point will reach unanimity.

This method is now being used in project design.