

卡尔曼滤波器在船用惯性导航系统中的应用

赵 希 人

(哈尔滨船舶工程学院)

摘要

本文详细地分析了把卡尔曼滤波器用于船用惯导系统的问题。文中给出了简化状态方程的条件,提出了测定常值漂移的统计公式及卡尔曼滤波器用于惯导系统的一种工程方案,并给出了仿真结果。

一、连续系统方程的线性分解

由力学建立的连续方程(Ψ 方程)为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{w}. \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\epsilon}_r \\ \boldsymbol{\epsilon}_c \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} V & I & I \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\phi}$ 为平台坐标系对于计算机坐标系角向量,对地理坐标系有 $\boldsymbol{\phi}^T = [\phi_x \phi_y \phi_z]$ 。 $\boldsymbol{\epsilon}_r$ 为陀螺随机漂移率向量 $\boldsymbol{\epsilon}_r^T = [\epsilon_{rx} \epsilon_{ry} \epsilon_{rz}]$ 。 $\boldsymbol{\epsilon}_c$ 为陀螺常值漂移率向量 $\boldsymbol{\epsilon}_c^T = [\epsilon_{cx} \epsilon_{cy} \epsilon_{cz}]$ 。 V 为 Ψ 方程系数矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\omega}$ 为地理坐标系相对于惯性空间的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}^T = [\omega_x \omega_y \omega_z]$, 矩阵 β 为

$$\beta = \begin{bmatrix} -\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_z \end{bmatrix}.$$

$\beta_i (i = x, y, z)$ 为陀螺随机漂移率分量反相关时间。 $\mathbf{w}^T = [w_x w_y w_z]$ 为零均值白噪声。 I 为 3×3 单位阵。分解方程(1)有

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\epsilon}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & I \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \epsilon_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_2 \\ \dot{\epsilon}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \epsilon_c \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (4)$$

其中, ϕ_1 为 ϕ 中仅由随机漂移率 ϵ_r 引起的分量, ϕ_2 为 ϕ 中仅由 ϵ_c 引起的分量.

二、离散时间状态方程的建立及简化

在通常情况下, 舰船速度 $v \leq 10$ 米/秒, 于是 Ψ 方程的系数矩阵 V 可近似为

$$V_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & Q \sin \varphi & -Q \cos \varphi \\ -Q \sin \varphi & 0 & 0 \\ Q \cos \varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中 Q 为地球自转角速度; φ 为舰船所在纬度.

为了利用离散时间的卡尔曼滤波公式, 首先应求出方程(2)的状态转移矩阵, 为此记

$$\mathbf{x}_{6 \times 1}^T \triangleq [\phi_1^T \epsilon_r^T] = [\phi_{1x} \phi_{1y} \phi_{1z} \epsilon_{rx} \epsilon_{ry} \epsilon_{rz}],$$

$$A_{6 \times 6} \triangleq \begin{bmatrix} V_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & \beta_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_{6 \times 1}^{*T} = [0 \ 0 \ 0 \ w_x \ w_y \ w_z].$$

其中 w_x, w_y, w_z 为互不相关的具有零均值的高斯白噪声. 于是方程(2)可写成

$$\dot{\mathbf{x}}_{6 \times 1} = A_{6 \times 6} \mathbf{x}_{6 \times 1} + \mathbf{w}_{6 \times 1}^{*}. \quad (6)$$

由于舰船在航行过程中可以近似认为在分段区间内纬度不变, 故可用拉氏变换法求出方程(6)的状态转移矩阵 $\Phi(t, 0)$, 其中,

$$\phi_{11}(t, 0) = \cos Qt, \quad (7.1)$$

$$\phi_{12}(t, 0) = \sin \varphi \sin Qt, \quad (7.2)$$

$$\phi_{13}(t, 0) = -\cos \varphi \sin Qt, \quad (7.3)$$

$$\phi_{14}(t, 0) = [\beta_x / (\beta_x^2 + Q^2)] [\cos Qt - e^{-\beta_x t} + (Q/\beta_x) \sin Qt], \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \phi_{15}(t, 0) = & [Q \sin \varphi / (Q^2 + \beta_y^2)] [e^{-\beta_y t} - \cos Qt \\ & + (\beta_y/Q) \sin Qt], \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \phi_{16}(t, 0) = & [-Q \cos \varphi / (Q^2 + \beta_z^2)] \\ & \cdot [e^{-\beta_z t} - \cos Qt + (\beta_z/Q) \sin Qt], \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\phi_{21}(t, 0) = -\sin \varphi \sin Qt, \quad (7.7)$$

$$\phi_{22}(t, 0) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos Qt, \quad (7.8)$$

$$\phi_{23}(t, 0) = \sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos Qt), \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{24}(t, 0) = & [-Q \sin \varphi / (Q^2 + \beta_x^2)] \\ & \cdot [e^{-\beta_x t} - \cos Qt + (\beta_x/Q) \sin Qt], \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\phi_{25}(t, 0) = \cos^2 \varphi / \beta_y + [\sin^2 \varphi / (Q^2 + \beta_y^2)] [Q \sin Qt]$$

$$+ B_y \cos \Omega t] - [(\Omega^2 \cos^2 \varphi + \beta_y^2) / \beta_y (\Omega^2 + \beta_y^2)] e^{-\beta_y t}, \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \phi_{26}(t, 0) = & [\sin \varphi \cos \varphi / \beta_z - (\sin \varphi \cos \varphi) / (\Omega^2 + \beta_z^2)] \\ & \cdot [(\Omega^2 / \beta_z) e^{-\beta_z t} + \Omega \sin \Omega t + \beta_z \cos \Omega t], \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\phi_{31}(t, 0) = \cos \varphi \sin \Omega t, \quad (7.13)$$

$$\phi_{32}(t, 0) = \sin \varphi \cos \varphi [1 - \cos \Omega t], \quad (7.14)$$

$$\phi_{33}(t, 0) = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \Omega t, \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \phi_{34}(t, 0) = & [\Omega \cos \varphi / (\Omega^2 + \beta_x^2)] \\ & \cdot [e^{-\beta_x t} - \cos \Omega t + (\beta_x / \Omega) \sin \Omega t], \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \phi_{35}(t, 0) = & \sin \varphi \cos \varphi / \beta_y - [\sin \varphi \cos \varphi / (\Omega^2 + \beta_y^2)] \\ & \cdot [(\Omega^2 / \beta_y) e^{-\beta_y t} + \Omega \sin \Omega t + \beta_y \cos \Omega t], \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{36}(t, 0) = & (\sin^2 \varphi / \beta_z) + [\cos^2 \varphi / (\Omega^2 + \beta_z^2)] [\Omega \sin \Omega t \\ & + \beta_z \cos \Omega t] - [(\Omega^2 \sin^2 \varphi + \beta_z^2) / \beta_z (\Omega^2 + \beta_z^2)] e^{-\beta_z t}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

$\phi_{44}(t, 0) = e^{-\beta_x t}$, $\phi_{55}(t, 0) = e^{-\beta_y t}$, $\phi_{66}(t, 0) = e^{-\beta_z t}$, 其他各项均为零。再利用公式

$$\mathbf{x}_{6 \times 1}(t) = \Phi(t, 0) \mathbf{x}_{6 \times 1}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau, 0) \mathbf{w}_{6 \times 1}^*(\tau) d\tau \quad (8)$$

可求得方程(6)的离散时间状态方程

$$\mathbf{x}_{6 \times 1}(k) = \Phi_{6 \times 6} \mathbf{x}_{6 \times 1}(k-1) + \Gamma_{6 \times 6} \mathbf{w}_{6 \times 1}^*(k-1). \quad (9)$$

令 T_1 为采样周期并令(7)式中的 $t = T_1$, 则得 $\Phi_{6 \times 6}$, 而 $\Gamma_{6 \times 6}$ 中的各项为

$$\Gamma_{11} = (1/\Omega) \sin \Omega T_1, \quad (10.1)$$

$$\Gamma_{12} = (1/\Omega) \sin \varphi [1 - \cos \Omega T_1], \quad (10.2)$$

$$\Gamma_{13} = (1/\Omega) \cos \varphi [\cos \Omega T_1 - 1], \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{14} = & [\beta_x / (\beta_x^2 + \Omega^2)] [(\sin \Omega T_1) / \Omega + (1/\beta_x) (e^{-\beta_x T_1} - 1) \\ & - (1/\beta_x) (\cos \Omega T_1 - 1)], \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{15} = & [\Omega \sin \varphi / (\Omega^2 + \beta_y^2)] [(1/\beta_y) (1 - e^{-\beta_y T_1}) \\ & - (1/\Omega) \sin \Omega T_1 - (\beta_y / \Omega^2) (\cos \Omega T_1 - 1)], \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{16} = & [-\Omega \cos \varphi / (\Omega^2 + \beta_z^2)] [(1/\beta_z) (1 - e^{-\beta_z T_1}) \\ & - (1/\Omega) \sin \Omega T_1 - (\beta_z / \Omega^2) (\cos \Omega T_1 - 1)], \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\Gamma_{21} = [\sin \varphi / \Omega] [\cos \Omega T_1 - 1], \quad (10.7)$$

$$\Gamma_{22} = T_1 \cos^2 \varphi + (1/\Omega) \sin^2 \varphi \sin \Omega T_1, \quad (10.8)$$

$$\Gamma_{23} = \sin \varphi \cos \varphi [T_1 - (1/\Omega) \sin \Omega T_1], \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{24} = & [-\Omega \sin \varphi / (\Omega^2 + \beta_x^2)] [(1/\beta_x) (1 - e^{-\beta_x T_1}) \\ & - (1/\Omega) \sin \Omega T_1 - (\beta_x / \Omega^2) (\cos \Omega T_1 - 1)], \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{25} = & (T_1 / \beta_y) \cos^2 \varphi + [\sin^2 \varphi / (\Omega^2 + \beta_y^2)] [1 - \cos \Omega T_1 \\ & + (\beta_y / \Omega) \sin \Omega T_1] + [(\Omega^2 \cos^2 \varphi + \beta_y^2) / \beta_y^2 (\Omega^2 + \beta_y^2)] \\ & \cdot [e^{-\beta_y T_1} - 1], \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\Gamma_{26} = [T_1 \sin \varphi \cos \varphi / \beta_z] - [\sin \varphi \cos \varphi / (\Omega^2 + \beta_z^2)]$$

$$\cdot [(\Omega^2/\beta_z^2)(1 - e^{-\beta_z T_1}) + 1 - \cos \Omega T_1 + (\beta_z/\Omega) \sin \Omega T_1], \quad (10.12)$$

$$\Gamma_{31} = (\cos \varphi / \Omega)(1 - \cos \Omega T_1), \quad (10.13)$$

$$\Gamma_{32} = \sin \varphi \cos \varphi [T_1 - \sin \Omega T_1 / \Omega], \quad (10.14)$$

$$\Gamma_{33} = T_1 \sin^2 \varphi + (\cos^2 \varphi \sin \Omega T_1 / \Omega), \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{34} = & [\Omega \cos \varphi / (\beta_x^2 + \Omega^2)] [(1/\beta_x)(1 - e^{-\beta_x T_1}) \\ & - (\sin \Omega T_1 / \Omega) + (\beta_x / \Omega^2)(1 - \cos \Omega T_1)], \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{35} = & (T_1 \sin \varphi \cos \varphi / \beta_y) - [\sin \varphi \cos \varphi / (\Omega^2 + \beta_y^2)] \\ & \cdot [(\Omega^2 / \beta_y^2)(1 - e^{-\beta_y T_1}) + 1 - \cos \Omega T_1 + (\beta_y / \Omega) \sin \Omega T_1], \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{36} = & (T_1 \sin^2 \varphi / \beta_z) + [\cos^2 \varphi / (\Omega^2 + \beta_z^2)][1 - \cos \Omega T_1 \\ & + (\beta_z / \Omega) \sin \Omega T_1] + [(\Omega^2 \sin^2 \varphi + \beta_z^2) / \beta_z^2 (\Omega^2 + \beta_z^2)] \\ & \cdot [e^{-\beta_z T_1} - 1], \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$\Gamma_{44} = (1/\beta_x)(1 - e^{-\beta_x T_1}), \quad (10.19)$$

$$\Gamma_{55} = (1/\beta_y)(1 - e^{-\beta_y T_1}), \quad (10.20)$$

$$\Gamma_{66} = (1/\beta_z)(1 - e^{-\beta_z T_1}), \quad (10.21)$$

其他各项均为零。下面对状态方程(9)进行简化，为此有

结论 1. 如果采样周期 T_1 满足

$$T_1 \beta_x \gg 1, \quad T_1 \beta_y \gg 1, \quad T_1 \beta_z \gg 1, \quad (11)$$

则系统状态方程(9)可简化为

$$\mathbf{x}_1(k) = \Phi_{3 \times 3} \mathbf{x}_1(k-1) + \Gamma_{3 \times 3} \boldsymbol{\varepsilon}_r(k-1). \quad (12)$$

其中

$$\Phi_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1^T(k) = [\phi_{1x}(k) \phi_{1y}(k) \phi_{1z}(k)],$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r^T(k-1) = [\varepsilon_{rx}(k-1) \varepsilon_{ry}(k-1) \varepsilon_{rz}(k-1)].$$

证明。条件(11)式成立时，由(9)式可有

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rx}(k) &= \phi_{44} \varepsilon_{rx}(k-1) + \Gamma_{44} w_x(k-1) \\ &= e^{-\beta_x T_1} \varepsilon_{rx}(k-1) + \frac{1}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x T_1}) w_x(k-1) \\ &\cong \frac{1}{\beta_x} w_x(k-1), \end{aligned}$$

且有 $\varepsilon_{rx}(k) \cong \varepsilon_{rx}(k-1+0)$ 。又由陀螺随机漂移率 ε_{rx} 的物理特性可知， $\varepsilon_{rx}(k-1+0) \cong \varepsilon_{rx}(k-1)$ ，由以上三式得

$$\varepsilon_{rx}(k-1) \cong (1/\beta_x) w_x(k-1). \quad (13.1)$$

同理，

$$\varepsilon_{ry}(k-1) \cong (1/\beta_y) w_y(k-1), \quad (13.2)$$

$$\varepsilon_{rz}(k-1) \cong (1/\beta_z) w_z(k-1). \quad (13.3)$$

再由方程(7.4),(10.4)及(13.1)可导出

$$\phi_{14}\varepsilon_{rx}(k-1) + \Gamma_{14}w_x(k-1) = \Gamma_{11}\varepsilon_{rx}(k-1). \quad (14.1)$$

同理有

$$\phi_{15}\varepsilon_{ry}(k-1) + \Gamma_{15}w_y(k-1) = \Gamma_{12}\varepsilon_{ry}(k-1), \quad (14.2)$$

$$\phi_{16}\varepsilon_{rz}(k-1) + \Gamma_{16}w_z(k-1) = \Gamma_{13}\varepsilon_{rz}(k-1), \quad (14.3)$$

$$\phi_{24}\varepsilon_{rx}(k-1) + \Gamma_{24}w_x(k-1) = \Gamma_{21}\varepsilon_{rx}(k-1), \quad (14.4)$$

$$\phi_{25}\varepsilon_{ry}(k-1) + \Gamma_{25}w_y(k-1) = \Gamma_{22}\varepsilon_{ry}(k-1), \quad (14.5)$$

$$\phi_{26}\varepsilon_{rz}(k-1) + \Gamma_{26}w_z(k-1) = \Gamma_{23}\varepsilon_{rz}(k-1), \quad (14.6)$$

$$\phi_{34}\varepsilon_{rx}(k-1) + \Gamma_{34}w_x(k-1) = \Gamma_{31}\varepsilon_{rz}(k-1), \quad (14.7)$$

$$\phi_{35}\varepsilon_{ry}(k-1) + \Gamma_{35}w_y(k-1) = \Gamma_{32}\varepsilon_{ry}(k-1), \quad (14.8)$$

$$\phi_{36}\varepsilon_{rz}(k-1) + \Gamma_{36}w_z(k-1) = \Gamma_{33}\varepsilon_{rz}(k-1). \quad (14.9)$$

把方程(14.1)至(14.9)代入(9)式得(12)式。

由结论 1 可知,只要适当选择采样间隔 T_1 ,就能把方程(9)所描述的六阶系统简化为三阶系统(12)式。

把方程(3)展开有 $\dot{\boldsymbol{\phi}}_2 = V\boldsymbol{\phi}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_c$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = 0$. 如果记 $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\phi}_2$, 则可写成

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = V\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_c. \quad (15)$$

按同样方法可求出方程(15)的离散时间状态方程为

$$\mathbf{x}_2(k) = \Phi_{3 \times 3}\mathbf{x}_2(k-1) + B_{3 \times 3}\boldsymbol{\varepsilon}_c. \quad (16)$$

其中 $\Phi_{3 \times 3}$ 和 $B_{3 \times 3}$ 分别与(12)式 $\Phi_{3 \times 3}$ 和 $\Gamma_{3 \times 3}$ 相同。

由方程(4),(12)及(16)可得一般情况下的离散时间状态方程为

$$\mathbf{x}_k \triangleq \boldsymbol{\phi}(k) = \boldsymbol{\phi}_1(k) + \boldsymbol{\phi}_2(k) = \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{x}_2(k) \quad (17)$$

$$= \Phi_{3 \times 3}\mathbf{x}_1(k-1) + \Gamma_{3 \times 3}\boldsymbol{\varepsilon}_r(k-1) + \Phi_{3 \times 3}\mathbf{x}_2(k-1) \\ + B_{3 \times 3}\boldsymbol{\varepsilon}_c = \Phi\mathbf{x}_{k-1} + \Gamma\boldsymbol{\varepsilon}_{rk-1} + B\boldsymbol{\varepsilon}_c. \quad (18)$$

其中 $E[\boldsymbol{\varepsilon}_{rk}] = 0$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}_{rk}\boldsymbol{\varepsilon}_{rj}^T] = Q_k\delta_{kj}$, $k, j = 0, 1, \dots$

至此,由九阶微分方程(1)所描述的系统在一定条件下可简化为三阶离散时间状态方程(18)。

三、测量方程及滤波方程

惯导系统在水平阻尼工作状态下的测量方程为

$$\mathbf{z}_k = H_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \quad (19)$$

二维测量时 $\mathbf{z}_k^T = [\delta_{\varphi k} \delta_{\lambda k}]$ 为纬度、经度测量值与计算值之差, $H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sec\varphi_k & 0 \end{bmatrix}$ 为系数矩阵, $\mathbf{v}_k^T = [v_{\varphi k} v_{\lambda k}]$ 为测量误差。三维测量时 $\mathbf{z}_k^T = [\delta_{\varphi k} \delta_{\lambda k} \delta_{Fk}]$, δ_{Fk} 为方位测量值与计算值之差,而且

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sec\varphi_k & 0 \\ 0 & -\tan\varphi_k & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_k^T = [v_{\varphi k} v_{\lambda k} v_{Fk}]$$

而 v_{Fk} 为方位测量误差。假设 $E[v_k] = 0$, $E[v_k v_i^T] = R_k \delta_{ki}$, $E[\epsilon_{rk} v_i^T] = 0$ ($k, l = 0, 1, \dots$), 不难证明, 如果 $\varphi_k \neq 90^\circ$, $0 < T_1 < 12$ 小时(这个条件通常能得到满足), 则上述系统是完全能观测的。

利用以上结果可写出最优滤波方程:

$$\text{状态方程 } \dot{\mathbf{x}}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + B \boldsymbol{\epsilon}_c + \Gamma \boldsymbol{\epsilon}_{rk-1},$$

$$\text{测量方程 } \mathbf{z}_k = H \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

$$\text{滤波方程 } \dot{\hat{\mathbf{x}}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k (\mathbf{z}_k - H \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}), \quad (20.1)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + B \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c, \quad (20.2)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H^T (H P_{k/k-1} H^T + R_k)^{-1}, \quad (20.3)$$

$$P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1} \Phi^T + \Gamma Q_k \Gamma^T, \quad (20.4)$$

$$P_k = (I - K_k H) P_{k/k-1}. \quad (20.5)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_0 = E\mathbf{x}_0$, $P_0 = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$, $Q_k = E[\epsilon_{rk} \epsilon_{rk}^T]$, $R_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$. 容易证明, 如果 $R_k = 0$, 则

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k, \quad P_k = 0 \quad (21)$$

四、统计测漂法

利用方程(20)对系统状态进行最优估计时, 首先应求出 $\boldsymbol{\epsilon}_c$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c$ 。本文提出一个统计测漂方法。

结论 2. 如果系统处于定常且 $v_k = 0$, 则

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c = B^{-1}(E\hat{\mathbf{x}}_k - \Phi E\hat{\mathbf{x}}_{k-1}). \quad (22)$$

证明. 对状态方程两边取均值有 $E\mathbf{x}_k = \Phi E\mathbf{x}_{k-1} + B \boldsymbol{\epsilon}_c + \Gamma E \boldsymbol{\epsilon}_{rk-1}$. 由 $E \boldsymbol{\epsilon}_{rk-1} = 0$ 及(21)式得(22)式. 上述公式适合于舰船在码头测漂。

结论 3. 如果系统处于定常, 则

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c &= B^{-1}(K_c H)^{-1}[E\hat{\mathbf{x}}_k + (K_c H \Phi - \Phi)E\hat{\mathbf{x}}_{k-1}] \\ &\quad - B^{-1}\Phi(K_c H)^{-1}[E\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (K_c H \Phi - \Phi)E\hat{\mathbf{x}}_{k-2}]. \end{aligned} \quad (23)$$

其中 K_c = 常阵, 为次优滤波器增益矩阵。

证明. 卡尔曼滤波器的过渡过程结束以后, 令 $K_c = K_k$ = 常阵, 则有

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_c (\mathbf{z}_k - H \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1}). \quad (24)$$

把方程(19)代入(24)式, 则得

$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_c (H \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - H \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$. 对上式两边取均值, 注意到 $E \mathbf{v}_k = 0$, 经整理有 $E\mathbf{x}_k = (K_c H)^{-1}[E\hat{\mathbf{x}}_k + (K_c H \Phi - \Phi)E\hat{\mathbf{x}}_{k-1}]$. 同理 $E\mathbf{x}_{k-1} = (K_c H)^{-1}[E\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + (K_c H \Phi - \Phi)E\hat{\mathbf{x}}_{k-2}]$. 把以上两式代入(23)式可得(24)式。

公式(24)适合于舰船在等纬度航行时测漂, 但这时应是三维测量。如果船舶处于任意航行时进行测漂, 可采用近似计算

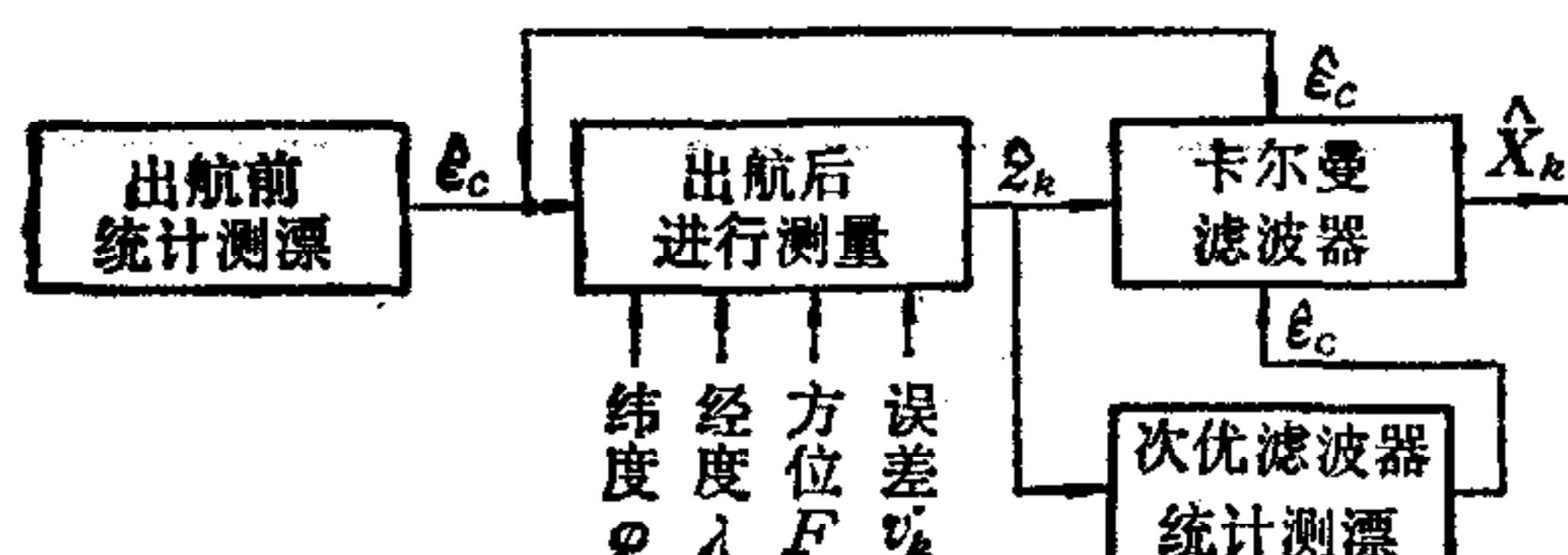


图 1 卡尔曼滤波器用于船用惯导系统方框图

方法。由于系统可近似看成是分段定常的，故在每个区段内按(24)式计算 $\hat{\epsilon}_{ci}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，则

$$\hat{\epsilon}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\epsilon}_{ci}, m = 1, 2, \dots, n.$$

随着测定时间的增长， $\hat{\epsilon}_c$ 的精度越来越高。

综上所述，卡尔曼滤波器用于船用惯导系统的原理方框图如图 1 所示。

五、仿 真 结 果

为了进行系统的仿真研究，须要用数学方法根据一定的统计要求模拟以下三个量：陀螺常值漂移向量 ϵ_c ，假定每个分量均小于 0.01 度/小时；陀螺随机漂移率向量 ϵ_r ，假定每个分量都是指数相关的高斯-马尔可夫序列；测量误差向量 v_k ，假定每个分量都是白色高斯序列。在通常情况下，还假定上述三个向量的各个分量之间彼此互不相关。根据某些二自由度液浮陀螺的实验结果^[7]，选采样间隔 $T_1 = 1$ 小时。

为简单起见，本文把三维测量方程，六维状态方程的卡尔曼滤波器简称为六维滤波器。把三维测量方程、三维状态方程的卡尔曼滤波器简称为三维滤波器。把二维测量方程、三维状态方程的卡尔曼滤波器简称为二维滤波器。把随机漂移率 ϵ_r 各分量的相关时间记为 T_x, T_y, T_z 。把 ϵ_c 各分量的方差记为 P_x, P_y, P_z 。测量误差向量 v_k 中的三个分量是纬度误差 v_φ ，经度误差 v_λ ，方位误差 v_F 。采样间隔为 T_1 小时，常值漂移率 ϵ_c 各分量记为 $\epsilon_{cx}, \epsilon_{cy}, \epsilon_{cz}$ ，在模拟实验中可假定为任意常值。测漂输出为 $\hat{\epsilon}_c$ ，状态最优估计值 \hat{x}_k 各分量的理论推算方差为 $P_{\psi x}, P_{\psi y}, P_{\psi z}$ ，其滤波过程的统计方差记为 $\sigma_{\psi x}^2, \sigma_{\psi y}^2, \sigma_{\psi z}^2$ 。模拟实验是在 TQ-16 计算机上进行的。

1. 测漂实验

设 $T_x = T_y = T_z = 0.1$ 小时， $P_x = P_y = P_z = 36^2$ 角秒²/小时， $v_\varphi = v_\lambda = v_F = 0$ ， $\varphi = 30$ 度， $T_1 = 1$ 小时， ϵ_c 的装定量是 $\epsilon_{cx} = 36$ 角秒/小时， $\epsilon_{cy} = 12$ 角秒/小时， $\epsilon_{cz} = -36$ 角秒/小时，采用三维滤波器的结果见表 1。结果表明，利用(22)式可以实现测漂。进一步假设 $T_x = T_y = T_z = 4$ 小时 $P_x = P_y = P_z = 36^2$ 角秒²/小时， $v_\varphi = v_\lambda = 40$ 角秒， $v_F = 320$ 角秒， $\epsilon_{cx} = 36$ 角秒/小时， $\epsilon_{cy} = 12$ 角秒/小时， $\epsilon_{cz} = -36$ 角秒/小时， $T_1 = 1$ 小时， $\varphi = 30$ 度，用同样滤波器测漂的结果见表 2。实验结果表明，利用(24)式可以实现测漂。

表 1

次 数 n	100	150	200	250	300	350	400
$\hat{\epsilon}_{cx}$ (角秒/小时)	32.50	32.13	32.27	33.67	34.93	35.50	36.08
$\hat{\epsilon}_{cy}$ (角秒/小时)	19.90	16.50	15.36	13.46	14.87	14.03	12.99
$\hat{\epsilon}_{cz}$ (角秒/小时)	-33.20	-34.40	-34.17	-35.30	-35.27	-35.13	-35.77

表 2

次数 n	100	200	300	400	500	600	700
$\hat{\varepsilon}_{cx}$ (角秒/小时)	31	32	33	38	40	40	38
$\hat{\varepsilon}_{cy}$ (角秒/小时)	32	22	19	15.4	14.7	14	11.8
$\hat{\varepsilon}_{cz}$ (角秒/小时)	-21	-28	-29	-31.3	-29	-32	-33

2. 相关漂移时的滤波实验

为了考察结论1, 现以六维滤波器的理论推算值作为标准, 并把六维、三维和二维滤波器经1000次实验进行统计。实验条件是 $P_x = P_y = P_z = 36^2$ 角秒 2 /小时, $T_1 = 1$ 小时, $v_\varphi = v_\lambda = 40$ 角秒, $v_F = 320$ 角秒, $\varepsilon_{cx} = \varepsilon_{cy} = \varepsilon_{cz} = 0$ 。结果见表3。实验结果表明, 当 $T_1 \geq T_{er}$ 时, 三种滤波器的实验统计值与考虑相关性的最佳理论推算值很接近。这就是说, 当 $T_1 \geq T_{er}$ 时, 从工程简化观点可以不必考虑 ε_r 的相关性, 而用三维或二维滤波器同样可以达到最佳的滤波效果。于是结论1得到验证。

表 3

$T_x = T_y = T_z = T_{er}$	0.1	1	4	16
六维 $P_{\phi x}$ $P_{\phi y}$ $P_{\phi z}$	732 980 5559	746 1003 8616	745 996 13370	655 883 12700
六维 $\sigma_{\phi x}^2$ $\sigma_{\phi y}^2$ $\sigma_{\phi z}^2$	851 969 5451	872 989 8493	869 963 13065	780 835 11884
三维 $\sigma_{\phi x}^2$ $\sigma_{\phi y}^2$ $\sigma_{\phi z}^2$	869 996 5584	961 1067 9003	1074 1107 17505	1072 1106 24057
二维 $\sigma_{\phi x}^2$ $\sigma_{\phi y}^2$	867 1013 6012	959 1099 10635	1070 1164 22641	1067 1175 32363

3. 滤波效果实验

假定 $T_x = T_y = T_z = T_{er} = 0.1$ 小时, $P_x = P_y = P_z = 36^2$ 角秒 2 /小时, $T_1 = 1$ 小时, $\varphi = 30$ 度, $v_\varphi = v_\lambda = 40$ 角秒, $v_F = 320$ 角秒, $\varepsilon_c = 0$, 经滤波器以后, 提高了精度, 见表4。

表 4

	纬度精度 σ_φ^2	经度精度 σ_λ^2	方位精度 σ_F^2
不用滤波器	1600 (角秒 2)	1600 (角秒 2)	102400 (角秒 2)
六维滤波器	980	969	5708
三维滤波器	1006	1002	5842
二维滤波器	1026	1004	

六、结语

把卡尔曼滤波器用于船用惯导系统,可提高定位精度。当采样周期 T_1 不小于陀螺随机漂移率相关时间 T_{er} 时,可以简化状态方程。利用本文公式(22)及(24)可以测定陀螺常值漂移率 ε_c 。仿真表明,图 1 表示的是一种可行的工程方案。

参 考 文 献

- [1] 雷渊超编著,惯性导航系统,哈尔滨船舶工程学院出版社,1978。
- [2] 中国科学院数学所概率组,离散时间系统滤波的数学方法,国防工业出版社,1975。
- [3] 王梓坤,概率论基础及其应用,科学出版社,1976。
- [4] J. S. Medith, Stochastic Optimal linear estimation and control, 1969.
- [5] 敬喜编,卡尔曼滤波器及其应用基础,国防工业出版社,1973。
- [6] 哈尔滨船舶工程学院数学教研室,卡尔曼滤波器在舰船导航中应用,船工科技,1974 年第四期。
- [7] 饶曹基,张卫邦,陀螺随机漂移率统计特性的分析,华南工学院,1979。

THE APPLICATION OF KALMAN FILTER TO INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS ON A SHIP

ZHAO XIREN

(*Harbin Shipbuilding Engineering Institute*)

ABSTRACT

The application of Kalman filter to inertial navigation systems on board a ship is analysed in detail in this paper. The condition for simplifying state equation is given. The stochastic formulas for determining constant shift are raised and an engineering plan applying Kalman filter to inertial navigation systems is put forward. Furthermore, analogous results are also given.