第 15 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 15, No. 4
1989 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1989

非线性控制系统中的相对阶概念在线性系统中的反映

王胜国　　黄昌继

（西南交通大学）

摘　　要

相对阶（Relative Degree）概念是非线性系统控制中一个有用的概念，本文探讨了它在线性系统中的反映．用 Markov 参数矩阵的方法证明了它与一致秩（Uniform Rank）、级数指标、系统传递函数阵中元素的分母阶次与分子阶次之差、以及元素的极零点数之差的关系．证明了线性系统的相对阶对于任意状态反馈常值阵 K 和任意满秩的前馈常值阵 F 是一个不变量．当系统存在相对阶 $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$ 时，可通过 K 和 F 进行积分解耦而具有传递矩阵 $\mathrm{diag}\{s^{-r_1},\cdots,s^{-r_m}\}$．

关键词——非线性控制系统，线性系统，相对阶，一致秩，解耦．

一、引　　言

对于非线性控制系统的研究及应用的一个引人注意的途径就是对非线性对象或子系统通过反馈和坐标变换使之严格线性化[1,2]．而在线性化时，需要运用系统的相对阶概念．本文主要探讨相对阶概念在线性系统中的反映，以有助对相对阶概念的含义的理解，并引出一些新的关联和结果．

二、相对阶概念的回顾

首先，引入运算符号 $L_f\lambda(\boldsymbol{x})$ 如下：

$$L_f\lambda(\boldsymbol{x})\triangleq\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})]^T,\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{x}}=\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right]^T.$$

$$L_f^0\lambda(\boldsymbol{x})\triangleq\lambda(\boldsymbol{x}), \tag{2.2}$$

本文于 1987 年 12 月 7 日收到．

$$L_f^k\lambda(\boldsymbol{x})\triangleq L_f[L_f^{k-1}\lambda(\boldsymbol{x})],\ k=1,2,\cdots. \tag{2.3}$$

考虑 MIMO 非线性系统 Σ

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}). \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 m 维向量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[f_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ f_n(\boldsymbol{x})]^T$，$G(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x})]$，$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})=[g_{1j}(\boldsymbol{x}),\cdots,g_{nj}(\boldsymbol{x})]^T$，$1\leqslant j\leqslant m$，$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=[h_1(\boldsymbol{x}),\cdots h_m(\boldsymbol{x})]^T$.

定义 2.1. MIMO 非线性系统 Σ 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 处有一个相对阶向量 $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$，是指系统 Σ 满足如下两个条件:

(1) $L_{\boldsymbol{g}_j}L_f^kh_i(\boldsymbol{x})=0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m,\forall$ 非负整数 $k<r_i-1.$ (2.6)

对 $\boldsymbol{x}^0$ 的一个邻域内的所有 $\boldsymbol{x}$ 成立;

(2)

$$\Gamma(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{g}_1}L_f^{r_1-1}h_1(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_f^{r_1-1}h_1(\boldsymbol{x})\cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_f^{r_1-1}h_1(\boldsymbol{x}) \\ L_{\boldsymbol{g}_1}L_f^{r_2-1}h_2(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_f^{r_2-1}h_2(\boldsymbol{x})\cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_f^{r_2-1}h_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{\boldsymbol{g}_1}L_f^{r_m-1}h_m(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_f^{r_m-1}h_m(\boldsymbol{x})\cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_f^{r_m-1}h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ 处非奇异.

三、MIMO 线性系统的相对阶

考虑 MIMO 线性系统 Σ_0

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}. \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 m 维向量，A，B 和 C 分别是相应维数的矩阵，$B=[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m]$，$C=[\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_m]^T$. 由第二节有

$$L_{\boldsymbol{g}_j}L_f^kh_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}_i^TA^k\boldsymbol{b}_j, \tag{3.3}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{x})=\Gamma_r=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^TA^{r_1-1}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1^TA^{r_1-1}\boldsymbol{b}_2\cdots & \boldsymbol{c}_1^TA^{r_1-1}\boldsymbol{b}_m \\ \boldsymbol{c}_2^TA^{r_2-1}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_2^TA^{r_2-1}\boldsymbol{b}_2\cdots & \boldsymbol{c}_2^TA^{r_2-1}\boldsymbol{b}_m \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{c}_m^TA^{r_m-1}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_m^TA^{r_m-1}\boldsymbol{b}_2\cdots & \boldsymbol{c}_m^TA^{r_m-1}\boldsymbol{b}_m \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

系统 Σ_0 的传递函数阵

$$T(s)=C(sI-A)^{-1}B=\sum_{i=1}^{\infty}s^{-i}Q_i \tag{3.5}$$

$$=[t_{ij}(s)]_{1\leqslant i,j\leqslant m}=\left[\frac{p_{ij}(s)}{q_{ij}(s)}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant m}. \tag{3.6}$$

其中 $Q_i=CA^{i-1}B$ 为系统的 Markov 参数阵，$p_{ij}(s)$，$q_{ij}(s)$ 均为 s 多项式. 由定义 2.1 及 Markov 参数阵易证得如下一些结果:

定理 3.1. MIMO线性系统 Σ_0 有相对阶向量 $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$，即

$$\boldsymbol{c}_i^TA^k\boldsymbol{b}_j=0,\ 1\leqslant i,j\leqslant m,\ \forall\ \text{非负整数}\ k<r_i-1 \tag{3.7}$$

成立，且(3.4)式的矩阵 Γ_r 满秩.

定理 3.2. Σ_0 有相对阶向量 $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$ 的充要条件为

$$r_i=\min\{\deg p_{ij}(s)-\deg q_{ij}(s)\,|\,j=1,\cdots,m\},\quad i=1,\cdots,m, \tag{3.8}$$

且(3.4)式的 Γ_r 满秩.

所以 $\boldsymbol{r}$ 的分量 r_i，$1\leqslant i\leqslant m$，就是 $T(s)$ 的第 i 行(亦即系统第 i 个输出分量的传递阵)中的各传递函数的分母阶次和分子阶次之差的最小值. 对 SISO 线性系统，即 $r=\deg p(s)-\deg q(s)$.

定理 3.3. Σ_0 的相对阶向量 $\boldsymbol{r}$ 的分量 r_i，$1\leqslant i\leqslant m$，即系统第 i 个输出的各传递函数的极零点数之差的最小值.

当系统有一致秩 (Uniform Rank)[3] ρ 时，即 $Q_i=0$，$0\leqslant i<\rho$，而 $Q_\rho\neq 0$，且 $|Q_\rho|\neq 0$，于是有如下定理.

定理 3.4. Σ_0 有一致秩 ρ 时，则必存在相对阶向量 $\boldsymbol{r}=[\rho,\cdots,\rho]^T$，且 $\Gamma_r=Q_\rho=CA^{\rho-1}B$.

定理 3.5. Σ_0 的相对阶向量 $\boldsymbol{r}$ 独立于状态变量 $\boldsymbol{x}$，对整个状态空间而言，是一常值向量.

定理 3.6. $\boldsymbol{r}=-[\partial_{r1}T(s),\cdots,\partial_{rm}T(s)]^T$, (3.9)

$$T(s)=\begin{bmatrix} s^{-r_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & s^{-r_m}\end{bmatrix}\Gamma_r+\begin{bmatrix} \boldsymbol{o}(s^{-r_1-1})\\ \vdots \\ \boldsymbol{o}(s^{-r_m-1})\end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

其中 $T(s)$ 的各行向量的 s 最高次幂系数组成的矩阵 Γ_r 满秩，$\partial_{ri}T(s)$ 是 $T(s)$ 第 i 行元素的最高级数指标[4]或最高阶次，$i=1,\cdots,m$.

再考虑系统 Σ_0 在前馈和状态反馈下(图 1)，相对阶向量 $\boldsymbol{r}$ 及 Γ_r 阵的变化情况.

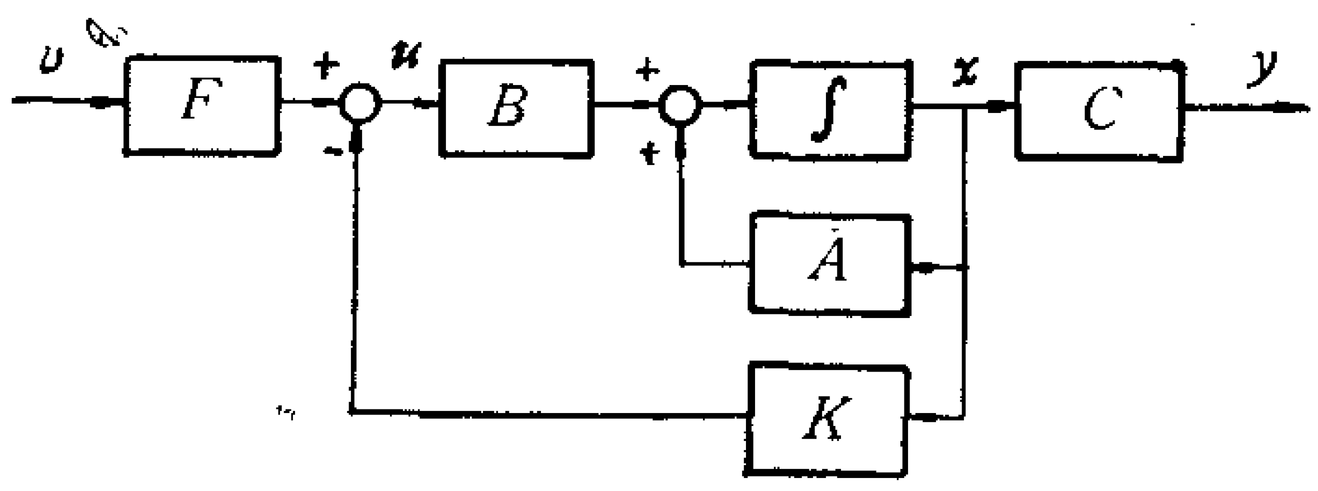

图 1　带前馈和状态反馈的线性系统

定理 3.7. MIMO 线性系统 Σ_0 的相对阶向量 $\boldsymbol{r}$，对于任意常值状态反馈阵 K 和任意满秩常值前馈阵 F 而言，是一个不变量；Γ_r 对于 K 亦是不变阵，在 F 作用下为 $\Gamma_{rKF}=\Gamma_rF$.

证明.

$$(A,B,C)\xrightarrow{K,F}(A-BK,BF,C).$$

图 1 的传递矩阵用 Markov 参数阵表示为

$$T_{KF}(s)=C(sI-A+BK)^{-1}BF=\sum_{k=1}^{\infty}C(A-BK)^{k-1}BFs^{-k}. \tag{3.11}$$

设 Σ_0 有相对阶向量 $\boldsymbol{r}$，则 $\mathbf{c}_i^TA^{k-1}B=0$，$k=1,\cdots,r_i-1$，而 $\mathbf{c}_i^TA^{r_i-1}B\neq 0$，$i=$

$1,\cdots,m$. 于是 $\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{k-1}B=0$, $k=1,\cdots,r_i-1$, 故 $\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{k-1}BF=0$. 而 $\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{r_i-1}BF=\mathbf{c}_i^T A(A-BK)^{r_i-2}BF=\mathbf{c}_i^T A^{r_i-1}BF \neq 0$. 由(3.4)式，可见 $\Gamma_{rK}=\Gamma_r$, $\Gamma_{rKF}=\Gamma_r F$. 所以当 Σ_0 存在相对阶向量 $\boldsymbol{r}$ 时，则在 K 和满秩 F 变换下，新系统的相对阶向量亦存在，并且为 $\boldsymbol{r}$ 不变；反之亦然．证毕．

可见，$\boldsymbol{r}$ 为 Σ_0 在 K 和 F 变换下的一类系统所共有的不变量．

定理 3.8. Σ_0 有相对阶向量 $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$ 时，则 Σ_0 可通过前馈 $F=\Gamma_r^{-1}$ 和状态负反馈 $K=\Gamma_r^{-1}L$ 而化成积分解耦型．即新系统的传递函数阵为

$$T_{KF}(s)=\mathrm{diag}\{s^{-r_1},s^{-r_2},\cdots,s^{-r_m}\}. \tag{3.12}$$

其中

$$L=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1^T A^{r_1}\\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^T A^{r_m}\end{bmatrix}.$$

证明．$\boldsymbol{r}$ 存在时，则 Γ_r^{-1} 存在，上述 K 和 F 变换存在．由定理 3.7，$\boldsymbol{r}$ 是不变量．由定理 3.1，$\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{k-1}BF=0$, $k<r_i-1$. 另外，$\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{r_i}=\mathbf{c}_i^T A^{r_i}-\mathbf{c}_i^T A^{r_i-1}BK=\mathbf{c}_i^T A^{r_i}-\mathbf{e}_i^T\Gamma_r\Gamma_r^{-1}L=0$, 其中 $\mathbf{e}_i^T$ 是第 i 个元为 1 的单位行向量．所以 $\mathbf{c}_i^T(A-BK)^{k-1}BF=0$, $k>r_i$. 由定理 3.7，$\Gamma_{rKF}=\Gamma_r F=I_m$. 于是由 Markov 阵得证．

参 考 文 献

[1] Isidori, A., Nonlinear Control Systems: An Introduction, Springer-Verlag (1985).

[2] Cheng Daizhan, Tarn Tzyh-Jong and Isidori, A., Global Feedback Linearization of Nonlinear Systems, Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control, (1984), pp. 74—83.

[3] Owens, D. H., Feedback and Multivariable Systems, Peter Peregrinus (1978).

[4] 王胜国、张念村，带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹，自动化学报，**11**(1985), Suppl. No. 1, 8—16.

THE REFLECTION OF RELATIVE DEGREE CONCEPT OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS IN LINEAR SYSTEMS

WANG SHENGGUO HUANG CHANGJI

(*Southwest Jiaotong University*)

ABSTRACT

The relative degree is a useful concept in nonlinear control systems. This paper discusses its reflection in linear systems. By using Markov its parameter matrices, some results are given and relationship with the following has been proved: the uniform rank, the series indices of transfer matrix, degree differences between denominators and numerators of transfer matrix elements, and the pole-zero number differences of transfer matrix elements. The relative degree of linear time-invariant system is invariant under any state feedback K and any full rank feedforward F is also proved. If a linear system has relative degree $\boldsymbol{r}=[r_1,\cdots,r_m]^T$, this system can be decoupled with the transfer matrix diag $\{s^{-r_1},\cdots,s^{-r_m}\}$by K and F.

Key words ——Nonlinear control systems; linear systems; relative degree; uniform rank; decoupling.