



# 随机控制系统稳态 Kalman 滤波器新算法<sup>1)</sup>

邓自立

(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

刘玉梅

(中国民用航空学院航行系 天津 300300)

**摘 要** 应用现代时间序列分析方法,基于受控的自回归滑动平均(CARMA)新息模型,提出了随机控制系统稳态 Kalman 滤波器增益的两种新算法,避免了求解 Riccati 方程.为保证滤波器的渐近稳定性,给出了选择滤波初值的两个公式.仿真例子说明了新算法的有效性.

**关键词** 随机控制系统,稳态 Kalman 滤波器增益算法,渐近稳定性,现代时间序列分析.

## NEW ALGORITHMS OF STEADY-STATE KALMAN FILTER FOR STOCHASTIC CONTROL SYSTEMS

DENG Zili

(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080*)

LIU Yumei

(*Department of Aviation, Civil Aviation Institute of China, Tianjin 300300*)

**Abstract** Using the modern time series analysis method, based on the controlled autoregressive moving average(CARMA) innovation model, two new algorithms of steady-state Kalman filter gain for stochastic control systems are presented, where the solution of the Riccati equation is avoided. In order to ensure the asymptotic stability of the filter, two formulae of setting initial filtering estimate are given. A simulation example shows the effectiveness of the new algorithms.

**Key words** Stochastic control systems, algorithms of steady-state Kalman filter gain, asymptotic stability, modern time series analysis.

### 1 引言

许多不同类型随机最优控制器设计要求计算稳态 Kalman 滤波器<sup>[1]</sup>.但经典稳态

1) 国家自然科学基金资助项目(69774019).

Kalman 滤波器要求解复杂的 Riccati 方程. 对此, 本文用现代时间序列分析方法<sup>[2]</sup>, 以 CARMA 新息模型作为工具取代了 Riccati 方程, 提出了带控制项的稳态 Kalman 滤波器新算法. 考虑离散线性随机控制系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \Gamma \mathbf{w}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = H\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2)$$

其中状态  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ , 观测  $\mathbf{y}(t) \in R^m$ , 控制  $\mathbf{u}(t) \in R^p$ .

**假设1.**  $\mathbf{w}(t) \in R^r$  和  $\mathbf{v}(t)$  是带零均值的白噪声:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}'(j) \\ \mathbf{v}'(j) \end{bmatrix} \right\} = Q \delta_{tj}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S' & Q_v \end{bmatrix} > 0, \quad (3)$$

其中  $E$  为数学期望, ' 为转置号,  $\delta_u = 1, \delta_{ij} = 0 (t \neq j)$ .

**假设2.** 系统是完全可观的, 即

$$\text{rank}[H', (H\Phi)', \dots, (H\Phi^{\beta-1})'] = n, \quad (4)$$

其中  $\beta$  是可观测性指数. (4) 式等价于  $\Omega$  列满秩<sup>[3]</sup>,

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_n & -\Phi & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -\Phi \\ H & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & H \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (\beta-1)n \text{ rows,} \\ \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \beta m \text{ rows.} \end{array} \right\} \quad (5)$$

**假设3.**  $(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t-1), \dots)$  是已知的, 或  $\mathbf{u}(t)$  为反馈控制, 即  $\mathbf{u}(t)$  是  $(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-1), \dots)$  的线性函数.

问题是基于  $(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t-1), \dots; \mathbf{u}(t-1), \mathbf{u}(t-2), \dots)$  求  $\mathbf{x}(t)$  的稳态 Kalman 滤波器  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ .

## 2 CARMA 新息模型和引理

记  $I_i$  为  $i \times i$  单位阵, 由式(1)和式(2)有

$$\mathbf{y}(t) = [H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}Bq^{-1}, H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}] [\mathbf{u}'(t), \mathbf{w}'(t)]' + \mathbf{v}(t), \quad (6)$$

其中  $q^{-1}$  为单位滞后算子. 引入左素分解

$$[H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}Bq^{-1}, H(I_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}] = A^{-1}(q^{-1}) [P(q^{-1}), R(q^{-1})], \quad (7)$$

式中  $A(q^{-1}), P(q^{-1}), R(q^{-1})$  是形如  $X(q^{-1}) = X_0 + X_1 q^{-1} + \dots + X_{n_x} q^{-n_x}$ , 的多项式矩阵,  $X_i$  为系数阵,  $n_x$  为阶, 且  $A_0 = I_m, P_0 = 0, R_0 = 0$ . 将式(7)代入式(6)有 CARMA 新息模型

$$A(q^{-1})\mathbf{y}(t) = P(q^{-1})\mathbf{u}(t) + D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t), \quad (8)$$

其中  $D(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) = R(q^{-1})\mathbf{w}(t) + A(q^{-1})\mathbf{v}(t)$ ,  $D(q^{-1})$  是稳定的<sup>[4]</sup>,  $D_0 = I_m$ , 新息  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  是零均值, 方差阵为  $Q_\varepsilon$  的白噪声.  $D(q^{-1})$  和  $Q_\varepsilon$  可用 Gevers 和 Wouters<sup>[2]</sup> 算法求得. 为保证  $D(q^{-1})$  的稳定性, 由谱分解定理<sup>[5]</sup>, 假设  $\text{rank}[R(q^{-1}), A(q^{-1})] Q^{\frac{1}{2}} = m$ , 且  $[R(q^{-1}), A(q^{-1})] Q^{\frac{1}{2}}$  无行列式零点在单位圆上的左因式.

$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  可由(8)式取初值  $(\boldsymbol{\varepsilon}(t_0-1), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}(t_0-n_d))$  递推计算为

$$\varepsilon(t) = A(q^{-1})y(t) - P(q^{-1})u(t) - D_1\varepsilon(t-1) - \dots - D_{n_d}\varepsilon(t-n_d), t = t_0, t_0 + 1, \dots \quad (9)$$

引理1<sup>[4]</sup>.  $E[y(t)\varepsilon'(t)] = Q_\varepsilon, E[y(t-i)\varepsilon'(t)] = 0 (i > 0)$ , 且

$$E[w(t)\varepsilon'(j)] = \Pi_{j-t}; E[v(t)\varepsilon'(j)] = \Lambda_{j-t}. \quad (10)$$

其中  $\Pi_i = Q_w F'_i + S G'_i, \Lambda_i = Q_v G'_i + S' F'_i$ ; 且有递推式

$$F_i = -D_1 F_{i-1} - \dots - D_{n_d} F_{i-n_d} + R_i, F_i = 0 (i < 0), R_i = 0 (i > n_r); \quad (11)$$

$$G_i = -D_1 G_{i-1} - \dots - D_{n_d} G_{i-n_d} + A_i, G_i = 0 (i < 0), A_i = 0 (i > n_a). \quad (12)$$

引理2<sup>[4]</sup>. 对任意整数  $N$ , 有白噪声估值器

$$\hat{w}(t|t+N) = \sum_{i=0}^N \Pi_i Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(t+i); \hat{v}(t|t+N) = \sum_{i=0}^N \Lambda_i Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(t+i). \quad (13)$$

引理3<sup>[6]</sup>. 状态  $x(t)$  有非递推表达式

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\beta-1} \Omega_i^{(1)} B u(t-i) + \sum_{i=1}^{\beta-1} \Omega_i^{(1)} \Gamma w(t-i) + \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i^{(2)} [y(t-i) - v(t-i)], \quad (14)$$

其中  $\Omega$  由式(5)定义, 且将伪逆  $\Omega^\# = (\Omega' \Omega)^{-1} \Omega'$  分块表示为

$$\Omega^\# = \left[ \begin{array}{cccccc} \Omega_1^{(1)} & \dots & \Omega_{\beta-1}^{(1)} & \Omega_0^{(2)} & \dots & \Omega_{\beta-1}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} \Omega_1^{(1)} & \dots & \Omega_{\beta-1}^{(1)} & \Omega_0^{(2)} & \dots & \Omega_{\beta-1}^{(2)} \end{array}} \right\} n \text{ rows} \quad (15)$$

若  $\Phi$  非异, 定义  $\Psi = \Phi^{-1}, T = -\Phi^{-1}B, L = -\Phi^{-1}\Gamma$ , 则有

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Theta_i [y(t-i) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} T u(t-j-1) - \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} L w(t-j-1) - v(t-i)]. \quad (16)$$

这里规定  $\Psi^i = 0 (i < 0)$ , 且  $j \geq 0$  的  $\Theta$  和  $\Theta_i$  定义为

$$\Theta = [H', (H\Psi)', \dots, (H\Psi^{\beta-1})']', \quad (17)$$

$$\Theta^\# = (\Theta' \Theta)^{-1} \Theta' = [\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{\beta-1}]. \quad (18)$$

### 3 主要结果

定理1. 系统(1)~(2)在假设1~3下, 稳态 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}(t|t) = \Phi \hat{x}(t-1|t-1) + B u(t-1) + \Gamma \hat{w}(t-1|t-1) + K \varepsilon(t), \quad (19)$$

$$\hat{w}(t-1|t-1) = S Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(t-1). \quad (20)$$

这里, 稳态 Kalman 滤波器增益  $K$  的两种新算法为

$$K = \sum_{i=1}^{\beta-1} \Omega_i^{(1)} \Gamma \Pi_i Q_\varepsilon^{-1} + \Omega_0^{(2)} [I_m - Q_v Q_\varepsilon^{-1}] - \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i^{(2)} \Lambda_i Q_\varepsilon^{-1}, \quad (21)$$

$$K = \Theta_0 [I_m - Q_v Q_\varepsilon^{-1}] - \sum_{i=1}^{\beta-1} \Theta_i \left[ \sum_{j=0}^{i-1} H \Psi^{i-1-j} L \Pi_{j+1} - \Lambda_i \right] Q_\varepsilon^{-1}. \quad (22)$$

证明. 由式(1)和射影公式<sup>[2]</sup>有

$$\hat{x}(t|t-1) = \Phi \hat{x}(t-1|t-1) + B u(t-1) + \Gamma \hat{w}(t-1|t-1), \quad (23)$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K \varepsilon(t), \quad (24)$$



$$K = E[\mathbf{x}(t)\boldsymbol{\varepsilon}'(t)]\mathbf{Q}_\varepsilon^{-1}. \quad (25)$$

将式(24)代入式(23)得式(19). 由式(13)得式(20). 将式(14)和(16)代入式(25)并利用引理1得式(21)和(22).

由式(19)和(9)看到,  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  的计算与滤波初值  $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$  和新息初值  $(\boldsymbol{\varepsilon}(t_0-1), \dots, \boldsymbol{\varepsilon}(t_0-n_d))$  两者有关. 可证明: 若  $\Phi$  是稳定的矩阵, 则  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  关于这两种初值是渐近稳定的, 即它渐近地与这两种初值选取无关, 从而可任意设置这两种初值. 假如  $\Phi$  是不稳定矩阵, 则可适当选择滤波初值  $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$  使  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  关于新息初值是渐近稳定的.

**定理2.** 在定理1的条件下, 对应于增益  $K$  的算法式(21)或(22), 若取式(19)的初值  $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$  为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0) = & \sum_{i=1}^{\beta-1} \Omega_i^{(1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(t_0 - i) + \sum_{i=1}^{\beta-1} \Omega_i^{(1)} \Gamma \hat{\mathbf{w}}(t_0 - i|t_0) + \\ & \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i^{(2)} [\mathbf{y}(t_0 - i) - \hat{\mathbf{v}}(t_0 - i|t_0)], \end{aligned} \quad (26)$$

或

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0) = & \sum_{i=0}^{\beta-1} \Theta_i [\mathbf{y}(t_0 - i) - \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{H} \Psi^{i-1-j} \mathbf{T} \mathbf{u}(t_0 - j - 1) - \\ & \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{H} \Psi^{i-1-j} \mathbf{L} \hat{\mathbf{w}}(t_0 - j - 1|t_0) - \hat{\mathbf{v}}(t_0 - i|t_0)], \end{aligned} \quad (27)$$

则式(19)关于新息初值是渐近稳定的.

证明. 类似于文献[3]的证明, 从略.

注意式(20), (23), (24)和  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ , 还可得到稳态 Kalman 预报器新算法, 推导留给读者.

## 4 仿真例子

应用式(19), (20), (30), (31)的仿真结果如图1和图2所示.

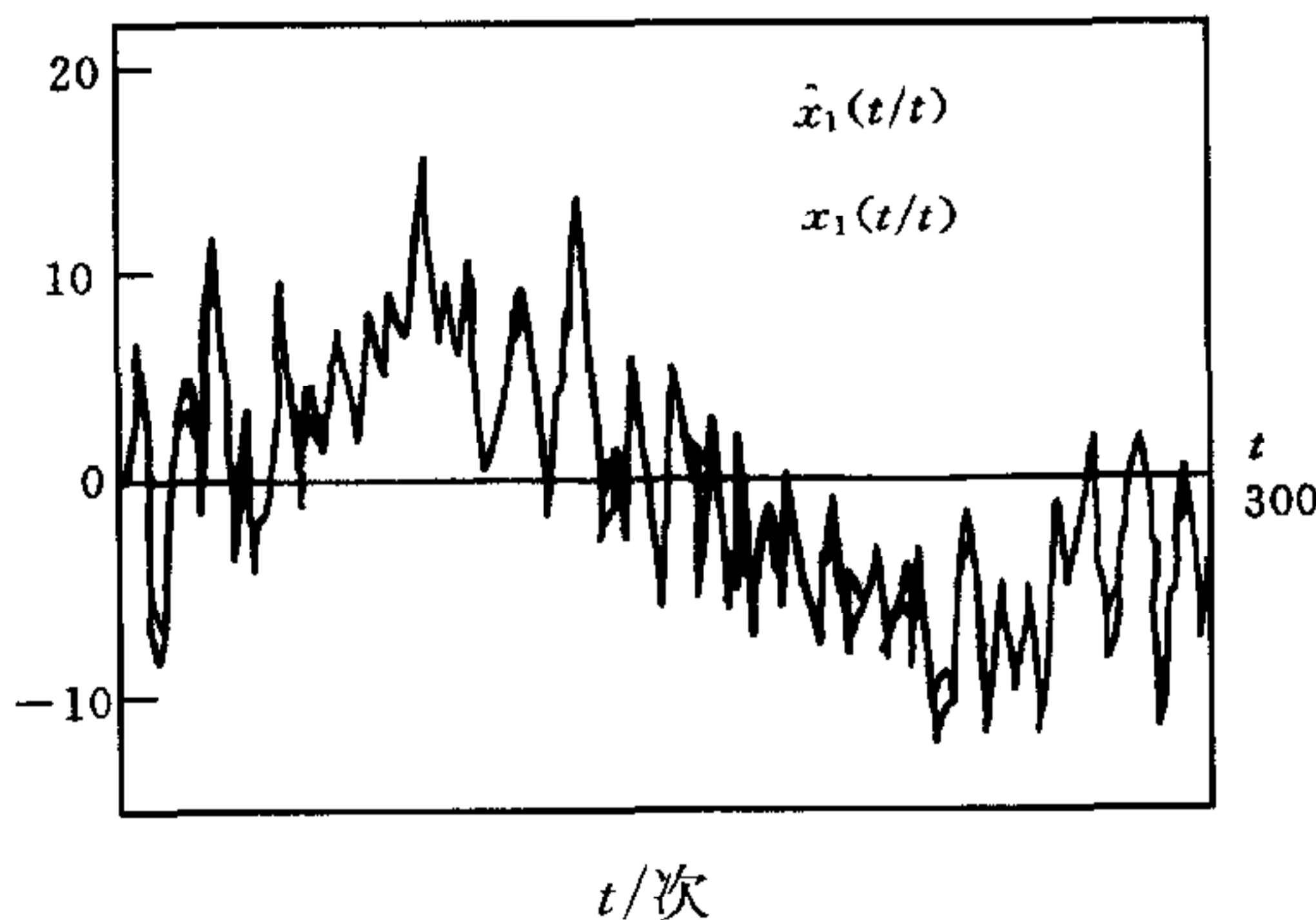


图1  $x_1(t)$ 和稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_1(t|t)$

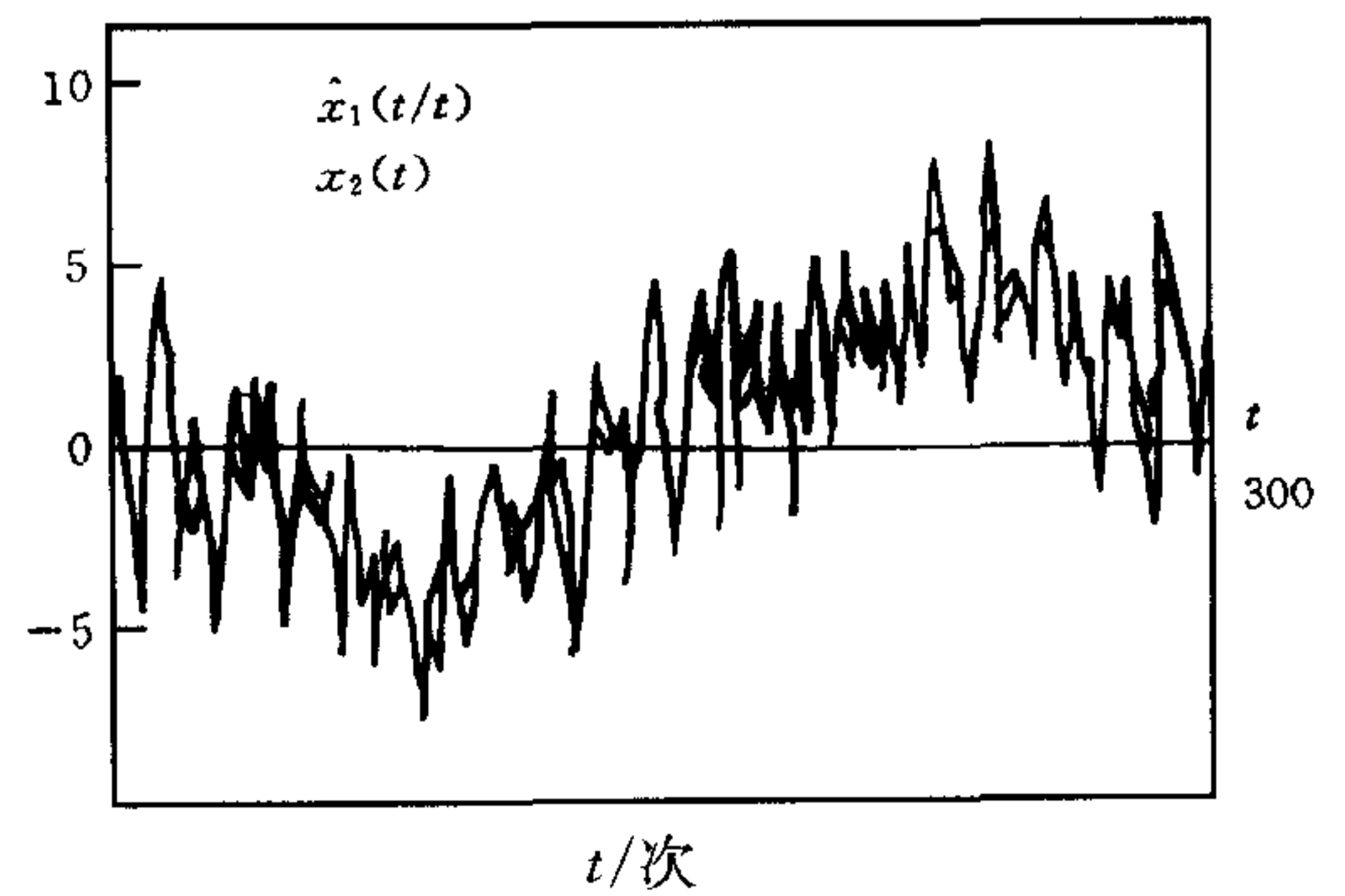


图2  $x_2(t)$ 和稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_2(t|t)$

考虑随机控制系统(1)~(2), 其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]'$ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = [1 \ 0], \quad (28)$$

$$\mathbf{v}(t) = 0.1\mathbf{w}(t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{u}(t) = 2\sin(2\pi t/300). \quad (29)$$

上式中  $w(t)$  和  $\xi(t)$  是零均值、方差为  $\sigma_w^2=1$  和  $\sigma_\xi^2=1.3$  的独立高斯白噪声. 易知  $S=0.1$ . CARMA 新息模型为

$$(1 - 1.2q^{-1} + 0.5q^{-2})y(t) = u(t - 1) + (1 - 0.243865q^{-1} + 0.153813q^{-2})\varepsilon(t), \quad (30)$$

且新息方差  $\sigma_\varepsilon^2=4.876061$ . 由式(21)和(26)可求得

$$K = [0.731341, 0.067292]', \hat{x}(1|1) = [0, 0.088318]'. \quad (31)$$

### 参 考 文 献

- 1 Vu K M. Discrete optimal stochastic controllers and its forms. *Int. J. Systems Science*, 1990, **21**(3):567~577
- 2 邓自立, 郭一新. 现代时间序列分析及其应用. 北京: 知识出版社, 1989, 54~70
- 3 邓自立, 刘玉梅. 一类稳态 Kalman 滤波器及其渐近稳定性. 信息与控制, 1998, **27**(1):26~31
- 4 Deng Z L, Zhang H S *et al.* Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996, **32**(2):199~216
- 5 Newmann M M, Roberts A P. Polynomial optimization of stochastic discrete time control for unstable plants. *Int. J. Control*, 1996, **51**(6):1363~1386
- 6 邓自立, 胡萍等. 非递推最优状态估计的几种统一算法. 见: 1998中国控制与决策学术年会论文集. 大连: 大连海事大学出版社. 1998, 250~254

**邓自立** 1938年生, 1962年毕业于黑龙江大学数学系, 现为黑龙江大学应用数学研究所教授. 主要研究领域为状态估计, 最优滤波, 信号处理, 反卷积等. 发表论文150余篇.

**刘玉梅** 1971年生, 1997年于黑龙江大学获自动控制理论及应用专业硕士学位, 现为中国民航学院航行系教师, 主要研究领域为状态估计, Kalman 滤波等.