

# 多 变 量 过 程 的 鲁 棒 解 耦

陈苏平 孙优贤 周春晖

(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

## 摘 要

运用 Doyle 的结构奇异值理论,提出了不确定系统解耦控制器设计方法。该方法在保证闭环系统稳定性和动态性能前提下,使解耦控制器对范数约束的不确定系统作最大限度地解耦。仿真表明,这种鲁棒解耦控制器效果良好。

**关键词:** 多变量过程控制,鲁棒解耦,结构奇异值。

## 1 引言

解耦控制理论大都建立在模型精确完整的基础上,而解耦控制器对系统不确定性却往往比较敏感。文献[1]以几何方法研究了系统参数小扰动下的解耦问题;文献[2, 3]讨论了状态反馈对大扰动系统的解耦,却未考虑系统稳定性;文献[4]探讨了若干近似系统的同时解耦方法;文献[5]就结构参数型不确定性,提出了消除参数的鲁棒动态和鲁棒静态解耦方法;还有一些文章试图以近似解耦代替完全解耦以改善解耦控制系统的鲁棒性<sup>[6-8]</sup>。

总的来看,迄今所做的鲁棒解耦研究工作都只是针对特定系统讨论特殊的解耦设计方法,以减小解耦控制器对系统参数的敏感性,却未系统地解决一般不确定系统的鲁棒解耦问题,即怎样恰当设计解耦控制器,使之在满足稳定性和鲁棒性前提下,达到最大限度解耦。此外,解耦控制系统的动态性能和解耦性能往往是一对很突出的矛盾。怎样在保证起码的动态性能前提下,设计最佳解耦控制器;或者牺牲部分动态性能以换取解耦性能的改善,这些都是前人未曾涉足的领域。

## 2 鲁棒解耦理论基础

在解耦控制系统设计中,以存在输入不确定性的对象最为棘手<sup>[8]</sup>,本文就以这种情形为例,来说明鲁棒解耦的原理。假定控制系统如图 1。图中  $G_p(s)$  为真实对象,  $G(s)$  为

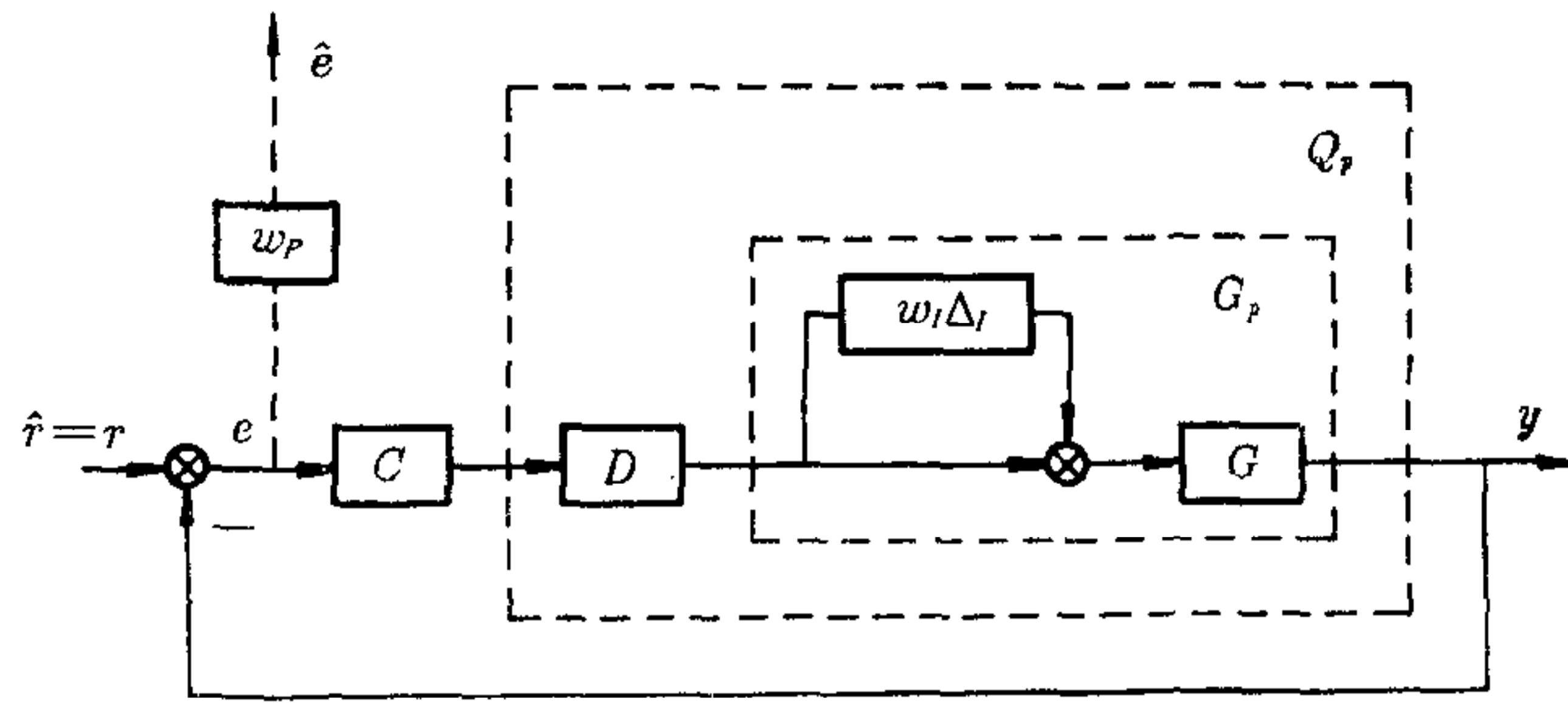


图1 解耦控制系统

名义对象;  $w_1(s)\Delta_1$  为  $G(s)$  的输入不确定性, 其中  $\bar{\sigma}(\Delta_1) \leq 1$ ,  $\Delta_1$  为对角阵,  $\bar{\sigma}(\cdot)$  表最大奇异值;  $C(s)$  为多回路控制器

$$C(s) = \text{diag}\{c_1(s), c_2(s), \dots, c_n(s)\}, \quad (1)$$

$D(s)$  为鲁棒解耦控制器, 并且, 假设  $D(s)$  与  $G_p(s)$  组成增广对象  $Q_p(s)$ , 即

$$Q_p(s) = G(s)(I + w_1(s)\Delta_1)D(s). \quad (2)$$

当  $w_1(s) \equiv 0$  时, 就构成名义增广对象

$$Q(s) = G(s)D(s), \quad (3)$$

这样, 就将原对象  $G_p(s)$  的解耦控制问题转化为增广对象  $Q_p(s)$  的分散控制问题。

为叙述方便, 引入记号  $\overline{A(s)}$  表示由  $A(s)$  对角元素组成的对角阵. 那么, 解耦控制系统设计就是通过加入解耦控制器  $D(s)$ , 以降低增广对象  $\overline{Q_p(s)}$  各子系统间的耦合. 随后, 对各子系统  $\overline{Q_p(s)}$  设计多回路控制器  $C(s)$ , 将一个多变量控制问题简化为单变量控制.

可见, 首先要解决的是增广对象  $Q_p(s)$  的耦合度量方法. 借鉴 Grosdidier 等人的设想<sup>[10]</sup>, 由于所能获得的只有名义对象  $G(s)$  和不确定性的摄动界  $w_1(s)$ , 因此, 将

$$\overline{Q(s)} = \overline{G(s)D(s)} \quad (4)$$

作为解耦后的近似增广对象, 多回路控制器  $C(s)$  将针对  $\overline{Q(s)}$  设计. 但事实上,  $Q(s)$  的关联作用以及不确定性  $w_1(s)\Delta_1$  所造成的影响又是不容忽略的. 纯粹按  $\overline{Q(s)}$  设计的  $C(s)$  往往动态性能很差, 甚至导致闭环系统失稳, 为此, 必须对  $C(s)$  或者对  $\overline{H(s)}$  的选择范围加以限制, 其中

$$\overline{H(s)} = \overline{Q(s)C(s)(I + \overline{Q(s)C(s)})^{-1}}. \quad (5)$$

这种约束条件本身就刻划了  $Q_p(s)$  的耦合强弱. 不同的解耦控制器  $D(s)$ , 约束条件不同. 鲁棒解耦设计的目的就是寻找最佳解耦控制器, 使上述条件最弱.

考虑到数学上的便利, 系统的动态性能通常以加权灵敏度算子的  $H^\infty$  范数来描述, 亦称鲁棒性能 RP(Robust Performance)

$$\text{RP} \iff \bar{\sigma}(W_1 S_p, W_2) \leq 1, \quad \forall \omega, \forall G, \quad (6)$$

其中

$$S_p = (I + G_p D C)^{-1}. \quad (7)$$

输入权重  $W_2(s)$  一般取决于对象的不确定性, 输出权重  $W_1(s)$  用来描述各频段的灵敏度要求以及各被控变量的重要性.

对于这类具有范数约束不确定性的鲁棒性能问题, 目前的有力工具之一是 Doyle 提出的结构奇异值 SSV (Structured Singular Value) 理论<sup>[11]</sup>.

根据 Doyle 的 SSV 理论, 令灵敏度算子输出权重为  $w_p(s)$  (参见图 1), 可得鲁棒性能充分必要条件

$$\text{RP} \iff \mu(M) < 1, \quad \forall \omega, \quad (8)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -w_1(I + DCG)^{-1}DCG & w_1(I + DCG)^{-1}DC \\ -w_p(I + GDC)^{-1}G & w_p(I + GDC)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$\mu(M)$  取决于  $M$  和扰动矩阵  $\Delta = \text{diag}\{\Delta_I, \Delta_P\}$  的结构, 这里  $\Delta_P$  为满阵. 进一步将  $M$  写成关于  $S$  和  $H$  的形式

$$M = \begin{bmatrix} -w_1G^{-1}HG & w_1G^{-1}H \\ -w_pSG & w_pS \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中

$$S = (I + GDC)^{-1}, \quad H = GDC(I + GDC)^{-1}. \quad (11)$$

再利用恒等式  $S + H = I$ , 将(10)式变换为  $H$  的线性分解变换 LFT (Linear Fractional Transformation) 形式, 得

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_pG & w_pI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -w_1G^{-1} \\ w_pI \end{bmatrix} H(G \quad -I). \quad (12)$$

类似地, 可以将(10)式变换为  $S$  的 LFT 形式

$$M = \begin{bmatrix} -w_1I & w_1G^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1G^{-1} \\ -w_pI \end{bmatrix} S(G \quad -I). \quad (13)$$

为了得到关于  $\overline{H}(s)$  或者  $\overline{S}(s)$  的约束条件, 可利用恒等式<sup>[12]</sup>

$$H = Q\overline{Q}^{-1}\overline{H}(I + E_H\overline{H})^{-1}, \quad (14)$$

$$S = \overline{S}(I - E_S\overline{S})^{-1}\overline{Q}Q^{-1}, \quad (15)$$

其中

$$E_H = (Q - \overline{Q})\overline{Q}^{-1}, \quad \overline{H} = \overline{GDC}(I + \overline{GDC})^{-1}, \quad (16)$$

$$E_S = (Q - \overline{Q})Q^{-1}, \quad \overline{S} = (I + \overline{GDC})^{-1}. \quad (17)$$

分别将式(14), (15)代入(12), (13), 得到关于  $\overline{H}(s)$  和  $\overline{S}(s)$  的 LFT 形式. 由 SSV 性质<sup>[12]</sup>, 可得鲁棒性能充分条件.

**定理.** 闭环系统若能满足条件

$$\overline{\sigma}(\overline{H}) \leq \overline{c}_H \quad \text{或} \quad \overline{\sigma}(\overline{S}) \leq \overline{c}_S, \quad \forall \omega, \quad (18)$$

则必然满足鲁棒性能条件(6), 其中  $\overline{c}_H$  和  $\overline{c}_S$  在各频率点上分别满足

$$\mu_{\Sigma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -w_1G^{-1}Q\overline{Q}^{-1} \\ -w_pG & w_pI & w_pQ\overline{Q}^{-1} \\ \overline{c}_HG & -\overline{c}_HI & -\overline{c}_HE_H \end{bmatrix} = 1, \quad (19)$$

$$\mu_{\bar{\Delta}} \begin{bmatrix} -w_I I & w_I G^{-1} & w_I G^{-1} \\ 0 & 0 & -w_P I \\ \bar{c}_S \bar{Q} Q^{-1} G & -\bar{c}_S \bar{Q} Q^{-1} & \bar{c}_S E_S \end{bmatrix} = 1, \quad (20)$$

其中  $\mu$  值由结构  $\bar{\Delta} = \text{diag}\{\Delta_I, \Delta_P, C\}$  计算,  $\Delta_P$  为满阵.

以上得到了对任一给定解耦控制器  $D(s), \overline{H(s)}(\overline{S(s)})$  的约束条件, 接下来需要解决的是对于不同的  $D(s)$ , 怎样评价相应  $H(s)$  约束条件的相对强弱.

鉴于过程控制中, 往往期望最终的闭环特性接近一阶或二阶系统, 具有良好的动态特性且无静差, 因此, 可用一阶或二阶系统

$$\overline{H_1(s)} = \frac{1}{T_s + 1} I \quad (21)$$

或

$$\overline{H_2(s)} = \frac{1}{(T_s + 1)^2} I \quad (22)$$

来近似真实系统. 然后, 寻找满足条件(18)的最小值  $T_{\min}$ , 作为衡量上述约束条件的尺度. 不同的  $D(s)$ , 相对地就有不同的  $T_{\min}$ . 鲁棒解耦设计就是优化  $D(s)$ , 使  $T_{\min}$  最小. 至于究竟取一阶或二阶系统, 应视具体对象以及  $\bar{c}_H$  和  $\bar{c}_S$  特点而定.

鲁棒解耦控制器  $D(s)$  除了满足上述鲁棒性能要求, 还得保证名义稳定 NS(Nominal Stability).

**引理 1<sup>[12]</sup>**. 假定  $\overline{H(s)}$  稳定,  $Q(s)$  和  $\overline{Q(s)}$  拥有相同数目右半平面极点, 则当

$$\bar{\sigma}(\bar{H}) \leq \mu_{\bar{c}}^{-1}(E_H), \quad \forall \omega \quad (23)$$

时,  $H(s)$  亦稳定.

**引理 2<sup>[12]</sup>**. 假定  $\overline{S(s)}$  稳定,  $Q(s)$  和  $\overline{Q(s)}$  拥有相同数目右半平面零点, 则当

$$\bar{\sigma}(\bar{S}) \leq \mu_{\bar{c}}^{-1}(E_S), \quad \forall \omega \quad (24)$$

时,  $S(s)(H(s))$  亦稳定.

解耦控制器设计已有各种各样的方法, 问题是怎样改善其鲁棒性. 对于存在输入不确定性的对象, 降低解耦控制器的状态数是有效的方法之一. 假设确定性系统的解耦控制器为  $D_1(s)$ . 对它作奇异值分解

$$D_1(s) = U(s) \Sigma_1(s) V(s)^H. \quad (25)$$

选择对角阵  $\Sigma_2(s)$  代替  $\Sigma_1(s)$ , 使  $\kappa(\Sigma_2) < \kappa(\Sigma_1)$ ,  $\kappa(\cdot)$  表示状态数, 则解耦控制器变为

$$D_2(s) = U(s) \Sigma_2(s) V(s)^H. \quad (26)$$

状态数的最佳值由条件(18)和  $T_{\min}$  决定.

### 3 鲁棒解耦设计过程

以一简单仿真例子说明本文所述鲁棒解耦设计过程及取得的效果. 设一双输入双输出对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{75s + 1} \begin{bmatrix} 0.7484 & -0.4143 \\ 0.6034 & -0.4491 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

输入不确定性和鲁棒性能的权重分别为

$$w_I(s) = 0.2 \frac{5s + 1}{0.25s + 1}, \quad (28)$$

$$w_P(s) = 0.05 \frac{10s + 1}{10s}. \quad (29)$$

若  $w_I(s) \equiv 0$ , 则只要取  $D_1(s) = \frac{1}{s} G^{-1}(s)$ , 即

$$D_1(s) = \frac{75s + 1}{s} \begin{bmatrix} 5.2151 & -4.8111 \\ 7.0068 & -8.6909 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

然而, 由于存在输入不确定性  $w_I(s)\Delta_I$ , 这样设计的解耦控制器就不是最佳的. 采用降低解耦控制器状态数的办法提高其解耦鲁棒性后得到

$$D_2(s) = \frac{75s + 1}{s} \begin{bmatrix} 2.1108 & -1.2766 \\ 2.1000 & -3.1039 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

以一阶系统近似真实闭环系统, 图 2(a) 中  $T_{1\min} = 14\text{min}$ , 而图 2(b) 中  $T_{2\min} = 7.5\text{min}$ . 也就是说, 后者的允许前向传递函数增益是前者的 1.87 倍. 它们所对应的多回路控制器分别为

$$C_1(s) = \begin{bmatrix} 0.0714 & 0 \\ 0 & 0.0714 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$C_2(s) = \begin{bmatrix} 0.1879 & 0 \\ 0 & 0.2138 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

为叙述方便, 以下称由  $C_1(s), D_1(s)$  组成的闭环系统为系统 I; 相应地,  $C_2(s), D_2(s)$  组成系统 II.

应说明的是, 由于条件(18)只是充分条件, 在  $\bar{c}_H$  和  $\bar{c}_S$  都接近于 1 的交接频段, 条

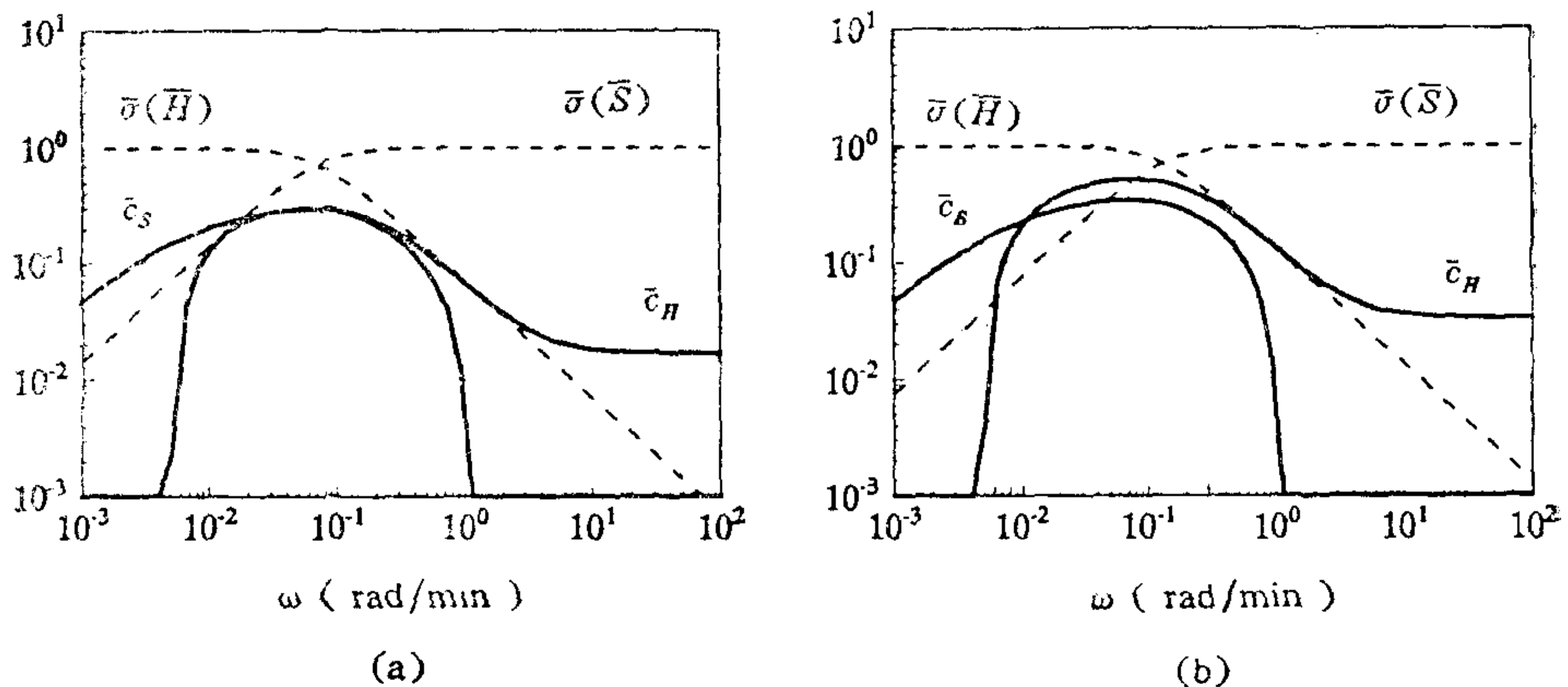


图 2  $\bar{\sigma}(\bar{H})$  和  $\bar{\sigma}(\bar{S})$  约束条件  
(a)  $D_1(s)$ ; (b)  $D_2(s)$

件(18)保守性较大。因此,尽管在该频段可能无法满足条件(18),但仍能满足鲁棒性能的充分必要条件(8)。

假定输入不确定性为

$$w_1(s)\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \frac{5s+1}{0.25s+1} & 0 \\ 0 & -0.2 \frac{5s+1}{0.25s+1} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

考察阶跃响应情况,如图 3 所示,实线表示系统 II,虚线表示系统 I。

很明显,尽管在模型精确情形下,系统 I 能完全解耦,但存在输入不确定性时,系统 II 的动态性能和关联性均优于系统 I。由于实际上无法得到被控过程的精确模型,因此,采用鲁棒解耦控制器  $D_2(s)$  更为合理。

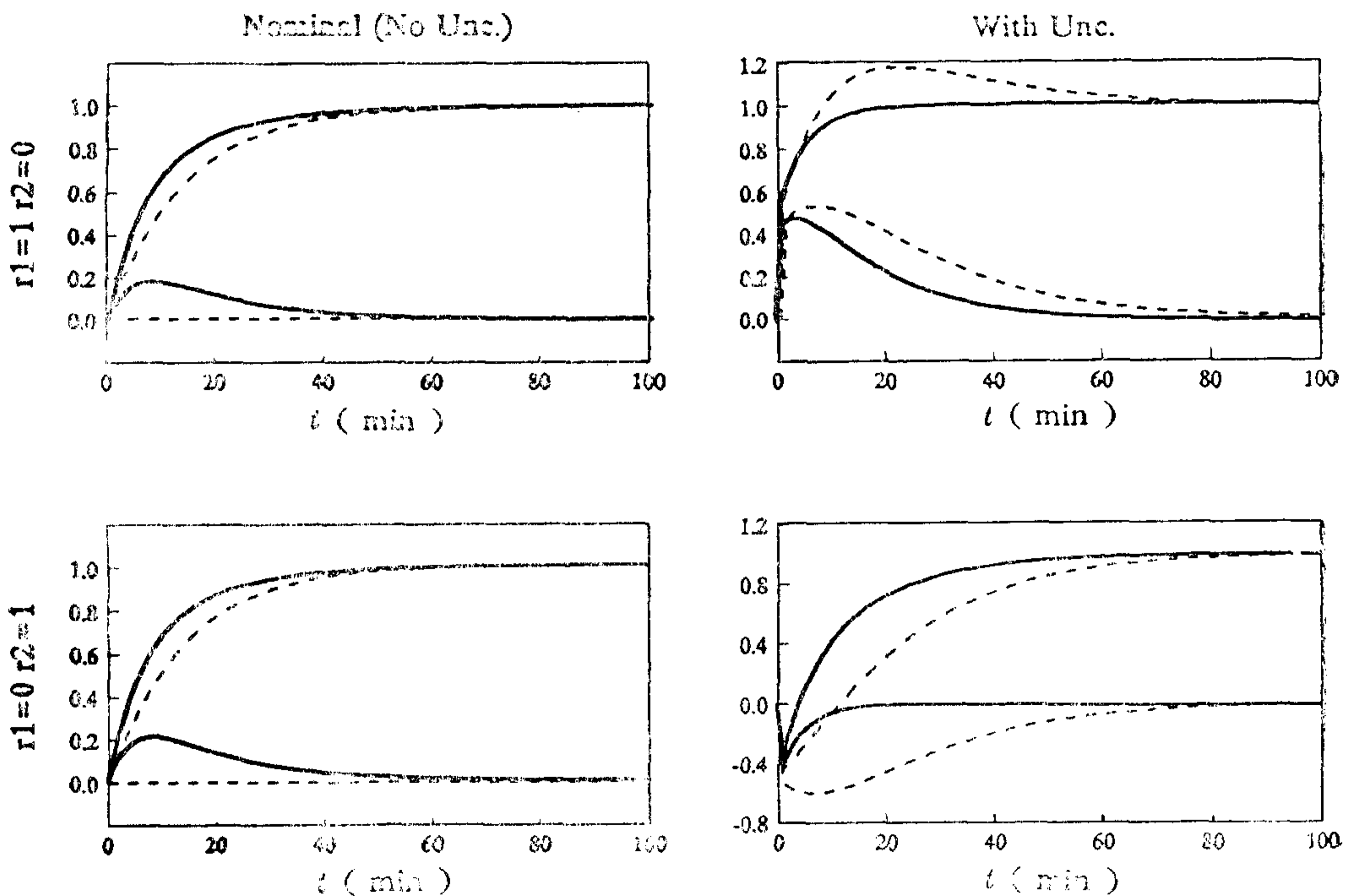


图 3 系统 I 和 II 的阶跃响应  
系统 I——虚线, 系统 II——实线

## 4 结语

本文提出的多变量过程鲁棒解耦控制器性能评价方法以及基于该方法设计的鲁棒解耦控制器能够在保证系统稳定性、鲁棒性和动态性能前提下,达到最大限度地解耦。仿真表明,该解耦控制器鲁棒性强,比全解耦控制器更适于过程控制。

## 参 考 文 献

- [1] Fabian E and Wonham W M. Decoupling and Data Sensitivity. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1975, **AC-20**: 338—344.
- [2] Alonso-Concheiro A. Decoupling and Parameter Variations. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1976, **AC-21**:783—785.
- [3] Tjafestas S G and Paraskevopoulos P N, Sensitive Decoupling Control of Linear Disturbed-parameter Systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, 1975, **AC-20**: 151—153.
- [4] Dorato P, Wang S and Asher R. Perfect Decoupling of Linear Systems with Discrete Parameter Uncertainties, *IEEE Trans. Aut. Control*, 1977, **AC-22**: 498—500.
- [5] Djaferis T E. Robust Decoupling for Systems with Parameters. *Modelling, Identification and Robust Control*, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 1986, 457—470.
- [6] Van de Vegte J and Argoun M, Near-decoupling by Constant Compensation. *IFAC Computer Aided Design*, Indiana, USA, 1982, 475—479.
- [7] Argoun M B. Near-decoupling of Linear Multivariable Systems, *Int. J. Control*, 1986, **43**: 1215—1227.
- [8] Perng M H. Nearly Decoupled Multivariable Control System Design, Part 1. Single—loop Control System Design. *Int. J. Control*, 1989, **50**: 1103—1120.
- [9] Morari M and Zafiriou E. *Robust Process Control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, USA, 1989.
- [10] Grosdidier P and Morari M. Interaction Measures for Systems under Decentralized Control. *Automatica*, 1986, **22**: 309—319.
- [11] Doyle J, Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties. *IEE Proc. Pt. D*, 1982, **129**: 242—250.
- [12] Skogestad S and Morari M. Robust Performance of Decentralized Control Systems by Independent Design, *Automatica*, 1989, **25**: 119—125.

## ROBUST DECOUPLING OF MULTIVARIABLE PROCESS

CHEN SUPING      SUN YOUXIAN      ZHOU CHUNHUI

*(Institute of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027)*

## ABSTRACT

In this paper, a robust decoupling method is developed in the context of Doyle's structured singular value (SSV) theory. The decoupler based on this method can decouple a plant with normbounded uncertainties as complete as possible, while closed-loop stability and robust performance are satisfied. Simulations show that the robust decoupler is applicable to real process control.

**Key words:** Multivariable process, robust decoupling, structured singular value.