第21卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 2
1995 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1995

短 文

对称系统可逆性的简化条件[1)]

赵 军　张嗣瀛
(东北大学自控系　沈阳　110006)

摘　　要

给出对称系统可逆性的一个充要条件. 用这个条件检验对称系统的可逆性，可不必计算包含在输出核中的最大能控性子分布,而只需计算较为简单的最大对称性子分布.

关键词: 非线性系统,对称性,可逆性.

1　引言

非线性系统的对称性对于系统的分析与综合有着独特的作用. 目前，在系统的结构分解[1]、局部可控性[2,3]与小时间可控性[4]、最优控制[5,6]及对称性群的构造[2)]等方面已得到了不少结果. 本文在此基础上讨论对称系统的可逆性.

检验可逆性可采用计算系统的 Fliess 秩或计算分布的办法. 前者对输入和输出的光滑度要求较高,这里考虑后者. 充要条件已由文[7]给出，但需计算包含在输出核中的最大能控性子分布,这常常是十分困难的. 本文旨在避开能控性子分布的计算,对于对称系统导出一个易于检验的条件.

2　对称性的几何描述

设M是一个 n 维流形，$V(M)$,$V^*(M)$ 和 $C^\infty(M)$ 分别是M上的向量场，微分一型和 C^∞ 函数构成的集合. G是一个 k 维连通 Lie 群，它在M上有一个自由和正常的左作用

$$\Phi: G \times M \to M,\ (g,x) \to \Phi(g,x) = \Phi_g x.$$

易见商空间 M/G 是一个 $n-k$ 维流形. 记 $P: M \to M/G$, $x \to \tilde{x}$ 为投影.

定义 2.1. M上的向量场 f，微分一型 w 和 C^∞ 函数 h 分别称为是对称的（相应于给定的G和 Φ)，如果下面三式分别成立:

---

1) 国家自然科学基金资助项目.

2) 洪奕光,程代展. 非线性系统线性对称性的几点注释. 控制理论及应用年会论文集,1991,484—487.

本文于 1992 年 9 月 24 日收到

$$(\Phi_g)_* f = f, \tag{2.1}$$
$$(\Phi_g)^* w = w, \tag{2.2}$$
$$(\Phi_g)^* h = h. \tag{2.3}$$

用 $SV(M)$，$SV^*(M)$ 和 $SC^\infty(M)$ 分别记M上对称向量场，对称微分一型和对称 C^∞ 函数的集合。依定义容易证明下面的三个命题。

命题 2.1. $SV(M)$ 按照 Lie 括号运算成为 $V(M)$ 的 Lie 子代数。

命题 2.2. 若 $f \in SV(M)$，$w \in SV^*(M)$，$h \in SC^\infty(M)$，则 $L_f w \in SV^*(M)$，$L_f h \in SC^\infty(M)$，$hf \in SV(M)$. 从而 $SV(M)$ 是环 $SC^\infty(M)$ 上的一个模。

命题 2.3. 若 $h \in SC^\infty(M)$，则 $dh \in SV^*(M)$.

在对称性的研究中，重要的是要和商流形相联系，在这方面有

命题 2.4. 映射 $\rho: f \to \tilde{f} = P_* f$ 是 $SV(M)$ 到 $V(M/G)$ 的 Lie 代数同态映射。

命题 2.5. 映射 $\gamma: h \to \tilde{h}$ 是 $SC^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M/G)$ 上的线性空间同构映射。其中 $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(P^{-1}(\tilde{x}))$.

以上命题证略。

命题 2.6. 对任意 $f \in SV(M)$，图 1 中的关系成立。

$$\begin{tikzcd}
SC^\infty(M) \arrow[r, "L_f"] & SC^\infty(M) \\
C^\infty(M/G) \arrow[u, "P^*"] \arrow[r, "L_{P_* f}"'] & C^\infty(M/G) \arrow[u, "P^*"']
\end{tikzcd}$$

图 1

证明. 由命题 2.5 及导出的映射性质即得证。

3 可逆性条件

考虑解析仿射系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = f(x) + g(x)u, \tag{3.1}$$
$$y = h(x) = (h_1(x), \cdots, h_s(x))^{\mathrm{T}}. \tag{3.2}$$

由文[7]知，系统(3.1)，(3.2)在正则点 x_0 可逆的充要条件是，存在 x_0 的邻域 U，使在U上包含在 $\ker h_*$ 中的最大能控性子分布为 $\mathbf{0}$. 而能控性子分布的构成形式为

$$R = S_p\{ad_{X_{i_1}} \cdots ad_{X_{i_t}} Y \mid X_{i_1}, \cdots, X_{i_t} \in \{\bar{f}, \bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_m\}, Y \in \bar{g}^A, t \leqslant n-1\}, \tag{3.3}$$

其中 $\bar{f} = f + g\alpha$，$\bar{g} = (\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_m) = (g_1, \cdots, g_m)\beta = g\beta$，$A$ 是 $\{1, \cdots, m\}$ 的一个子集，$\bar{g}^A = \{\bar{g}_i \mid i \in A\}$，$(\alpha, \beta)$ 是一个反馈律。

能控性子分布(3.3)的计算常常十分困难。但若系统具有对称性，则可不必计算(3.3)式。为此考虑商系统。如果 $f, g_i \in SV(M)$，$h_j \in SC^\infty(M)$，则系统(3.1)，(3.2)的商系统定义如下：

$$\dot{\tilde{x}} = P_* f(P^{-1}(\tilde{x})) + \sum_{i=1}^{m} u_i P_* g_i(P^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}(\tilde{x})u, \tag{3.4}$$

$$\tilde{y} = h(P^{-1}(\tilde{x})) = \tilde{h}(\tilde{x}). \tag{3.5}$$

由对称性易见这个商系统是唯一确定的。

由文[3]中的引理容易证明下面的定理。

定理 3.1. 若系统(3.1),(3.2)具有对称性，则此系统在 x_0 可逆的充要条件是其商系统(3.4),(3.5)在 $P(x_0)$ 可逆。

这一定理将 n 维系统(3.1),(3.2)的可逆性等价地转化为 $n-k$ 维系统(3.4),(3.5)的可逆性，而检验后者要容易得多。为了避开构造商系统，而将商系统可逆性的条件在原系统上反映出来,定义如下概念:

定义 3.1. 如果M上的一个分布Δ满足 $\Delta\subset SV(M)$，则称Δ为一个对称性分布。

M上的对称向量场族 $F=\{X_\lambda|\lambda\in K\}$ 在 $C^\infty(M)$ 上张成的分布 $S_p\{F\}$ 一般不是对称性分布。然而由命题 2.2 知,它在 $SC^\infty(M)$ 上张成的分布

$$SS_p\{F\}\triangleq\left\{\sum_{i<\infty}h_{\lambda_i}X_{\lambda_i}\,|\,X_{\lambda_i}\in F, h_{\lambda_i}\in SC^\infty(M)\right\}, \tag{3.6}$$

却是一个对称性分布,称之为由F张成的对称性分布。对于对称性分布,容易证明下面结果:

引理 3.1. 设Δ是一个对称性分布， $h_j\in SC^\infty(M)$。 则 $\Delta\subset\ker h_*$ 的充要条件是 $P_*\Delta\subset\ker\tilde{h}_*$。

若 α,β 的各分量均属于 $SC^\infty(M)$，定义分布

$$\begin{aligned} SR\triangleq SS_p\,\{&ad_{X_{i_1}}\cdots ad_{X_{i_t}}, Y\,|\,X_{i_1},\cdots,X_{i_t}\in\{\bar{f},\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m\}, \\ &Y\in\bar{g}^A,\ t\leqslant n-k-1\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

显然它是能控性子分布(3.3)的一个对称性子分布。 记形如(3.7)式的对称性分布的集合为 SRA，并记商系统(3.4),(3.5)的能控性子分布的集合为 $\widetilde{RA}$。

引理 3.2. $P_*SRA\triangleq\{P_*\Delta\,|\,\Delta\in SRA\}=\widetilde{RA}$。

证明。对于商系统(3.4),(3.5)的任意反馈律 $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ 和指标集 A，相应的能控性子分布为

$$\begin{aligned} \tilde{R}=S_p\{&ad_{\tilde{X}_{i_1}}\cdots ad_{\tilde{X}_{i_t}}\tilde{Y}\,|\,\tilde{X}_{i_1},\cdots,\tilde{X}_{i_t}\in\{P_*\bar{f},P_*\bar{g}_1,\cdots,P_*\bar{g}_m\}, \\ &\tilde{Y}\in P_*\bar{g}^A, t\leqslant \dim M/G-1=n-k-1\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

这里 S_p 表示在 $C^\infty(M/G)$ 上张成。

由命题 2.5 知,存在各分量均属于 $SC^\infty(M)$ 的 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, 使 $P^*\tilde{\alpha}=\alpha$, $P^*\tilde{\beta}=\beta$，并由 $\tilde{\beta}$ 的非奇异性知 β 也是非奇异的。 于是 (α,β) 是系统(3.1),(3.2)的一个反馈律,相应的对称性分布仍用(3.7)式表示。

对任意 $X,Y\in SV(M)$, $l\in SC^\infty(M)$，易知

$$P_* l\, ad_X Y=\tilde{l}\, ad_{\tilde{X}}\tilde{Y}. \tag{3.9}$$

任取 $\tilde{R}$ 中元 $\sum_{i<\infty}\tilde{l}_i\tilde{z}_i$，其中每个 $\tilde{z}_i$ 是形如 $ad_{\tilde{X}_{i_1}}\cdots ad_{\tilde{X}_{i_t}}\tilde{Y}$ 的向量。由(3.9)式及命题 2.4 知

$$\sum_{i<\infty}\tilde{l}_i\tilde{z}_i = P_*\sum_{i<\infty} l_i z_i, \tag{3.10}$$

其中 z_i 是与 $\tilde{z}_i$ 相应的形如 $ad_{X_{i_1}}\cdots ad_{X_{i_t}}Y$ 的向量，$l_i = P^*\tilde{l}_i$. 从而 $\sum_{i<\infty}\tilde{l}_i\tilde{z}_i \in P_*SR$,所以 $P_*SR\supset\tilde{R}$. 类似地可证明反包含关系. 于是 $P_*SR=\tilde{R}$. 这说明 $P_*SRA\supset\widetilde{RA}$. 同理可证 $P_*SRA\subset\widetilde{RA}$.

定理 3.2. 若系统(3.1),(3.2)具有对称性，则它在正则点 x_0 可逆的充要条件是存在 x_0 的邻域 U，使在 U 上包含在 $\ker h_*$ 中的最大的形如(3.7)式的对称性分布为

证明. 由引理 3.1,引理 3.2 及定理 3.1 即得证.

比较(3.7)式和(3.3)式知,(a)两者生成向量的形式完全相同,但前者较后者的 Lie 括号重数减少了 k 个;(b) SR 是在 $SC^\infty(M)$ 上张成的,而 R 是在 $C^\infty(M)$ 上张成的.

众所周知，随着 Lie 括号重数的增加，运算的难度和计算量将急聚增加. 加之 $SC_\infty(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 的一个真子环，SR 要比 R 的生成系数少相当多，因而计算 SR 要比计算 R 容易得多,计算量也要少许多. 这就是定理 3.2 的优越之处.

参　考　文　献

[1] Grizzle J W, Marcus S I. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1985, **AC-30**: 248—258.

[2] Crouch P E and Byrnes C I. Symmetries and local controllability in Algebraic and Geometric Metrods in nonlinear control theory, edited by Fliess M and Hazewinbel M D. Reidel Publishing Company, Holland, 1986, 55—75.

[3] 赵军,张嗣瀛. 非线性控制系统的广义对称性与可控性,科学通报,1991, **36**(18): 1429—1431.

[4] Zhao Jun, Zhang Siying. On the controllability of nonlinear systems with symmetry. *Systems & Control Letters*, 1992, **18**: 445—448.

[5] Van der schaft A J. On symmetries in optimal control. Proc. 25nd IEEE Conf. Decision and Contr., 1986, 482—486.

[6] Grizzle J W, Marcus S I. Optimal Control of system possessing symmetries, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1984, **AC-29**:1037—1040.

[7] 程代展,非线性系统的几何理论,北京: 科学出版社,1988.

A SIMPLIFIED CONDITION FOR THE INVERTIBILITY OF SYMMETRIC SYSTEMS

ZHAO JUN ZHANG SIYING
(Department of Automatic control, Northeastern University Shenyang 110006)

ABSTRACT

A sufficient and necessary condition for the invertibility of symmetric systems is presented in this paper. In order to check the invertibility of symmetric systems by this condition, instead of calculating the largest controllability subdistribution included in the kernel of the outputs, what we need to do is just to find the largest symmetry subdistribution included in the kernel of the outputs.

Key words: Nonlinear systems, symmetries, invertibility.