



# 具有左移左扇区稳定性的矩阵与 多项式的最大非线性摄动边界

赵克友

(青岛大学电气工程系 266071)

## 摘 要

分别考虑矩阵与多项式的  $m$  方摄动族的鲁棒稳定性, 稳定性区域为复平面上的左移左扇区, 给出了使上述族鲁棒稳定的参数最大摄动边界, 并附有演示算例。

**关键词:** 鲁棒稳定性, 非线性摄动, 矩阵, 多项式。

## 1 问题的叙述

定义稳定性区域为复平面  $\mathbf{C}$  上的左移左扇区, 如图 1 所示。

$$D_{\sigma, \varphi} \triangleq \left\{ s \in \mathbf{C} \mid \frac{1}{2} \pi + \varphi < \arg[s + \sigma] < \frac{3}{2} \pi - \varphi \right\}, \quad (1)$$

其中下标参量  $\sigma \geq 0, \varphi \in \left[ 0, \frac{1}{2} \pi \right)$ 。

如上定义的安全性区域有相当的一般性, 它包括 1)  $D_{\sigma, 0}$  左移左半复平面; 2)  $D_{0, \varphi}$  严格左扇区; 3)  $D_{0, 0}$  严格的左半复平面  $\mathbf{C}^-$ 。对控制系统而言,  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定性既保证系统有稳定度  $\sigma$ , 又具有阻尼比  $\zeta > \sin \varphi$  的性质<sup>[1]</sup>。

所谓谱集  $S_p(\cdot)$ , 对  $n$  阶方阵而言系指其特征值的全体; 对  $n$  阶多项式而言系指其根的全体。如一个  $n$  阶方阵  $A$  满足  $S_p(A) \subset D_{\sigma, \varphi}$ , 则称其为  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定的,  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定矩阵的全体记以  $\mathbf{H}(\sigma, \varphi)$ 。如一个  $n$  阶多项式  $f(s)$  满足  $S_p(f) \subset D_{\sigma, \varphi}$ , 则称其为  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定的,  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定多项式的全体记以  $\mathbf{HP}(\sigma, \varphi)$ 。

问题 1. 设有  $m$  方摄动矩阵(族)

$$A(r) = A_0 + rA_1 + r^2A_2 + \cdots + r^m A_m, \quad (2)$$

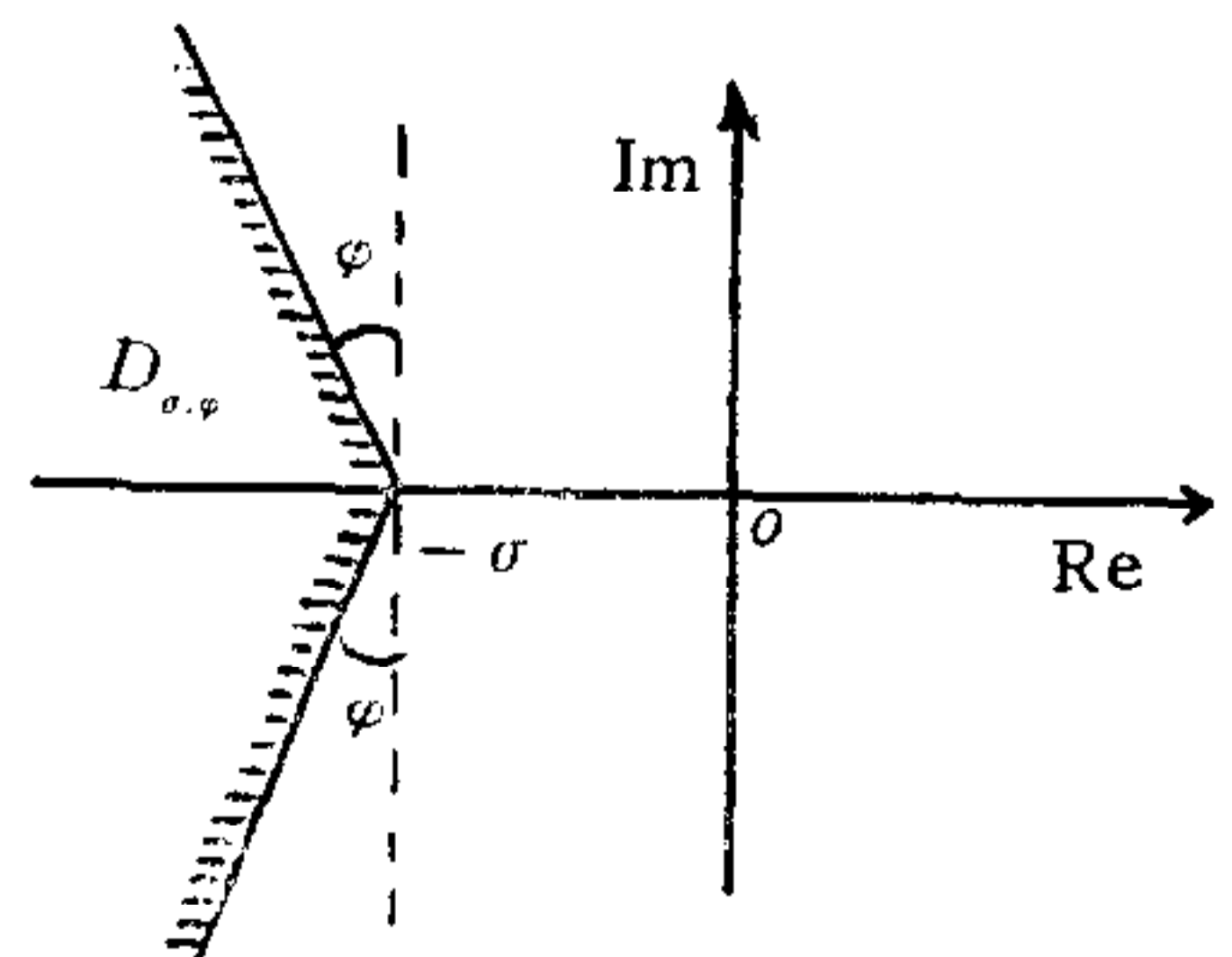


图 1 左移左扇区

其中  $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, i = 0, 1, \dots, m$ , 且  $A_0 \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)$ . 求边界点

$$r_{\min} = \inf\{r \in \mathbf{R} \mid A(r) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)\}, \quad (3a)$$

$$r_{\max} = \sup\{r \in \mathbf{R} \mid A(r) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)\}. \quad (3b)$$

显然  $(r_{\min}, r_{\max})$  是参数  $r$  的最大允许摄动区间, 在其上  $A(r)$  是  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定的.

问题 2. 设有  $m$  方摄动多项式(族)

$$f(s, p) = f_0(s) + pf_1(s) + p^2f_2(s) + \dots + p^mf_m(s), \quad (4)$$

其中  $f_0(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} f_{0i}s^i, f_k(s) = \sum_{i=0}^{n-1} f_{ki}s^i, k = 1, 2, \dots, m$  皆为实系数多项式, 且

$f_0(s) \in \mathbf{HP}(\sigma, \varphi)$ . 求边界点

$$p_{\min} = \inf\{p \in \mathbf{R} \mid f(s, p) \in \mathbf{HP}(\sigma, \varphi)\}, \quad (5a)$$

$$p_{\max} = \sup\{p \in \mathbf{R} \mid f(s, p) \in \mathbf{HP}(\sigma, \varphi)\}. \quad (5b)$$

显然  $(p_{\min}, p_{\max})$  是使  $f(s, p)$  保持  $D_{\sigma, \varphi}$  稳定的  $r$  的最大摄动区间.

文[2]讨论的问题是上述问题的特例, 即  $m = 1, \sigma = 0$  及  $\varphi = 0$ . 文[3]在矩阵稳定鲁棒性方面给出了领先的方法与结论, 但不涉及非线性摄动界.

## 2 问题的转化

问题 2 可完全转化为问题 1. 由(4)式中的  $f_0(s)$  及  $f_i(s), i = 1, 2, \dots, m$ , 可确定  $n \times n$  维矩阵

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -f_{00} & -f_{01} & -f_{02} & \dots & -f_{0,n-1} \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -f_{i0} & -f_{i1} & -f_{i2} & \dots & -f_{i,n-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

令

$$F(p) = F_0 + pF_1 + p^2F_2 + \dots + p^mF_m. \quad (7)$$

注意,  $|sI - F(p)| = f(s, p)$ , 此处  $|\cdot|$  表行列式, 即有  $S_p(f(s, p)) = S_p(F(p)), \forall p \in \mathbf{R}$ . 据此可将问题 2 转化为问题 1. 引入矩阵变换  $T_{\sigma, \varphi}$ :

$$\mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{C}^{n \times n},$$

$$T_{\sigma, \varphi}(A) \triangleq e^{-i\varphi}(A + \sigma I) \otimes I + e^{i\varphi}I \otimes (A + \sigma I), \quad (8)$$

式中  $i$  为虚单位,  $I$  为  $n$  阶单位阵,  $\otimes$  为 Kronecker 矩阵积, 变换前后矩阵特征值  $\lambda[\cdot]$  间有如下关系<sup>[3,4]</sup>:

$$\lambda_j[T_{\sigma, \varphi}(A)] = e^{-i\varphi}(\lambda_k[A] + \sigma) + e^{i\varphi}(\lambda_l[A] + \sigma), \quad (9)$$

$$j = 1, 2, \dots, n^2; k, l = 1, 2, \dots, n.$$

**引理 1.** 若  $A(0) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)$ , 则必存在含 0 为内点的区间  $(r^-, r^+)$ , 在其上  $A(r) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)$ , 从而  $|T_{\sigma, \varphi}(A(r))| \neq 0$ ; 反之, 若存在  $(r^-, r^+)$  使  $|T_{\sigma, \varphi}(A(r))| \neq 0, \forall r \in (r^-, r^+)$ , 则由  $A(0) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)$  知,  $A(r) \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi), \forall r \in (r^-, r^+)$ .

证明. 见附录.

对(2)式做变换  $T_{\sigma,\varphi}$  可得

$$T_{\sigma,\varphi}(A(r)) = T_{\sigma,\varphi}(A_0) + rT_{0,\varphi}(A_1) + r^2T_{0,\varphi}(A_2) + \cdots + r^mT_{0,\varphi}(A_m), \quad (10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} T_{\sigma,\varphi}(A_0) &= [(A_0 + \sigma I) \otimes I + I \otimes (A_0 + \sigma I)] \cos \varphi \\ &\quad - i[(A_0 + \sigma I) \otimes I - I \otimes (A_0 + \sigma I)] \sin \varphi, \\ T_{0,\varphi}(A_k) &= (A_k \otimes I + I \otimes A_k) \cos \varphi - i(A_k \otimes I - I \otimes A_k) \sin \varphi, \\ &\quad K = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

至此问题 1 等价地转化为

问题 1'. 已知  $|T_{\sigma,\varphi}(A_0)| \neq 0$ , 求边界点

$$r_{\min} = \inf\{r \in \mathbf{R} \mid |T_{\sigma,\varphi}(A(r))| \neq 0\}, r_{\max} = \sup\{r \in \mathbf{R} \mid |T_{\sigma,\varphi}(A(r))| \neq 0\}.$$

### 3 最大摄动界公式

为简便, 令  $G_0 = T_{\sigma,\varphi}(A_0), G_k = T_{0,\varphi}(A_k), \tilde{G}_0 = T_{\sigma,\varphi}(F_0), \tilde{G}_k = T_{0,\varphi}(F_k), k = 1, 2, \cdots, m$ . 定义如下两矩阵:

$$G \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ \hline G_0^{-1}G_m & G_0^{-1}G_{m-1} \cdots G_0^{-1}G_1 \end{bmatrix}, \tilde{G} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I \\ \hline \tilde{G}_0^{-1}\tilde{G}_m & \tilde{G}_0^{-1}\tilde{G}_{m-1} \cdots \tilde{G}_0^{-1}\tilde{G}_1 \end{bmatrix},$$

其中 0 表示  $(m-1)n^2 \times n^2$  零矩阵,  $I$  表示  $(m-1)n^2$  阶单位阵.

**定理 1.** 问题 1 中的最小最大摄动边界点分别为

$$r_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}^-[\mathbf{G}]}, r_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^+[\mathbf{G}]}, \quad (12)$$

其中  $\lambda_{\min}^-[\cdot]$  表示最小负实特征值, 当无负实特征值时令其为  $0^-$ ,  $\lambda_{\max}^+[\cdot]$  表示最大正实特征值, 当无正实特征值时令其为  $0^+$ .

证明. 对行列式  $\left| \frac{1}{r} \mathbf{I} - \mathbf{G} \right|$  做一系列的行等价变换后, 可得

$$\begin{aligned} r^{mn^2} \left| \frac{1}{r} \mathbf{I} - \mathbf{G} \right| &= |G_0^{-1}| \cdot |G_0 + rG_1 + r^2G_2 + \cdots + r^mG_m| \\ &= |T_{\sigma,\varphi}(A_0)|^{-1} \cdot |T_{\sigma,\varphi}(A(r))|. \end{aligned}$$

再由  $A_0 \in \mathbf{H}(\sigma, \varphi)$ , 得  $|T_{\sigma,\varphi}(A_0)| \neq 0$ , 即可证得本定理.

由于问题 2 可化为问题 1, 所以, 关于问题 2 有

**定理 2.** 问题 2 中的最小最大摄动边界点为

$$\tilde{r}_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}^-[\tilde{\mathbf{G}}]}, \tilde{r}_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^+[\tilde{\mathbf{G}}]}.$$

### 4 算法及程序

用一个具体算例说明计算步骤.

例. 设稳定性区域  $D_{\sigma, \varphi}$  中的  $\sigma = 1$ ,  $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然  $A_0 \in \mathbf{H}\left(1, \frac{1}{6}\pi\right)$ , 因为  $S_p(A_0) = \{-2, -1.5\}$ .

第 1 步. 输入矩阵  $A_0, A_1, A_2, A_3, I, Q, L$  及虚单位  $i$ , 其中  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 而  $Q$  与

$L$  分别为 4 阶零阵与单位阵.

第 2 步. 由(11)式计算出  $G_0, G_1, G_2$  与  $G_3$ .

第 3 步. 构造 12 阶的分块矩阵  $\mathbf{G}$ .

第 4 步. 计算  $\mathbf{G}$  的特征值  $\lambda_k[\mathbf{G}] (k = 1, 2, \dots, 12)$  如下:

$$\begin{array}{lll} 2.2192 - 0.0000i, & -0.7142 - 0.5825i, & -0.9636 - 1.0966i, \\ -0.9636 + 1.0966i, & 0.8739 - 0.6552i, & -0.7446 + 0.0000i, \\ 0.8739 + 0.6552i, & -0.7142 + 0.5825i & -0.1597 - 1.0498i, \\ -0.1597 + 1.0498i, & 0.2263 - 0.7189i, & 0.2263 + 0.7189i. \end{array}$$

第 5 步. 求出  $\mathbf{G}$  的最小负实特征值  $\lambda_{\min}^-[\mathbf{G}] = -0.7446$ , 及最大正实特征值

$$\lambda_{\max}^+[\mathbf{G}] = 2.2192.$$

第 6 步. 令  $r_{\min} = \frac{-1}{0.7446} = -1.3430$ ,  $r_{\max} = \frac{1}{2.2192} = 0.4506$ , 则  $(-1.3430,$

$0.4506)$  即为使  $A_0 + rA_1 + r^2A_2 + r^3A_3 \in \mathbf{H}\left(1, \frac{1}{6}\pi\right)$  的参数  $r$  的最大摄动区间.

本算例的 Matlab 程序.

$$I = [1 \ 0; 0 \ 1], A0 = [-2 \ 1; 0 \ -1.5],$$

$$A1 = [0 \ 1; 0 \ 0], A2 = [0 \ 0; 1 \ 0],$$

$$A3 = [1 \ 1; 1 \ 0], i = \text{sqrt}(-1),$$

$$Q = [0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$L = [1 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

$$G0 = \cos(pi/6) * (\text{kron}(A0 + I, I) + \text{kron}(I, A0 + I)) \dots$$

$$- i * \sin(pi/6) * (\text{kron}(A0 + I, I) - \text{kron}(I, A0 + I));$$

$$G1 = \cos(pi/6) * (\text{kron}(A1, I) + \text{kron}(I, A1)) - i * \sin(pi/6) * (\text{kron}(A1, I) - \text{kron}(I, A1));$$

$$G2 = \cos(pi/6) * (\text{kron}(A2, I) + \text{kron}(I, A2)) - i * \sin(pi/6) * (\text{kron}(A2, I) - \text{kron}(I, A2));$$

$$G3 = \cos(pi/6) * (\text{kron}(A3, I) + \text{kron}(I, A3)) - i * \sin(pi/6) * (\text{kron}(A3, I) - \text{kron}(I, A3));$$

$$H = \text{inv}(G0),$$

$$G = [QLQ; QQL; -H*G3 - H*G2 - H*G1],$$

eig(G)

本文讨论了矩阵与多项式的一类非线性结构型摄动的左移左扇区稳定性的最大摄动边界问题,给出了边界计算公式,算法步骤与程序。在一般带有协处理器的 PC 机上可迅速算得结果。而一般非线性摄动的最大边界问题有待于进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] Leonhard W. Introduction To Control Engineering And Linear Control Systems (English Edition), Springer-Verlag, 1976, 82—85.
- [2] Bamish B R and Fu M. Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices. *Sys. & Contr. Letters*, 1988, 11:173—179.
- [3] Qin L and Davison E J. Tensor Product Methods in Stability Robustness Analysis. Proc. of ACC, San Diego CA, 1990, 2527—2532.
- [4] (日)须田信英等著. 自动控制中的矩阵理论. 曹长修译. 科学出版社, 1979, 155, 299.

### 附 录

引理 1 的证明. 由  $A(r)$  对  $r$  的连续依赖假设, 则  $A(r)$  的特征根亦对  $r$  有连续依赖关系, 再由连续函数的性质, 即得引理 1“存在”部分的结论. 由  $A(r) \in H(\sigma, \varphi)$  可得  $\lambda_k[A(r)] \in D_{\sigma, \varphi}$ , 进一步  $e^{\pm i\varphi}(\lambda_k[A(r)] + \sigma) \in C^-, k = 1, 2, \dots, n$ , 再由(9)式可推出  $\lambda_j[T_{\sigma, \varphi}(A(r))] \in C^-, j = 1, 2, \dots, n^2$ , 故  $T_{\sigma, \varphi}(A(r))$  必非奇异.

反证法证引理的第二部分. 设  $T_{\sigma, \varphi}(A(r))$  在  $(r^-, r^+)$  上是非奇异的且  $A_0 = A(0) \in H(\sigma, \varphi)$ , 又存在  $r_1 \in (r^-, r^+)$  使  $A(r_1) \notin H(\sigma, \varphi)$ . 不妨设  $r_1 > 0$ , 再由  $A(r)$  的特征值对  $r$  的连续依赖关系可断言在  $(0, r_1)$  上必有一点  $r_2$  使  $A(r_2)$  有特征值在  $D_{\sigma, \varphi}$  的边界上. 有两种情况 1)  $\lambda_1[A(r_2)] = -\sigma$ , 2)  $\lambda_1[A(r_2)] = -\sigma + \rho e^{i(\frac{1}{2}\pi + \varphi)}$  及  $\lambda_2[A(r_2)] = -\sigma + \rho e^{i(\frac{3}{2}\pi + \varphi)}$ , 其中  $\rho > 0$ . 无论那种情况只要利用(9)式都可推得  $T_{\sigma, \varphi}(A(r_2))$  有一个零特征值, 此与所设矛盾. 故得证.

## MAXIMAL NONLINEAR PERTURBATION BOUNDS FOR MATRICES AND POLYNOMIALS WITH SHIFTED LEFT SECTOR STABILITY

ZHAO KEYOU

(Department of Electrical Engineering, Qingdao University 266071)

### ABSTRACT

This paper considers the robust stability of m-cube perturbation families of matrices and polynomials, respectively, where the stability region is defined as a shifted left sector in the complex plane. The paper gives the maximal perturbation bounds for the above families with robust stability.

**Key words:** Stability, nonlinear perturbations, matrices, polynomials.