

## 具有一步随机时滞和多丢包的 网络系统 $H_\infty$ 滤波器设计

李秀英<sup>1</sup> 王金玉<sup>1</sup> 孙书利<sup>1</sup>

**摘要** 在网络系统中由于连接传感器和滤波器的网络带宽有限, 系统测量数据在传输中会出现随机时延甚至丢失. 本文讨论了具有一步随机时延和丢包的网络系统的  $H_\infty$  滤波器设计问题. 基于新近提出的同时描述随机时延和丢包的模型, 利用线性矩阵不等式方法设计线性滤波器, 使得滤波误差系统均方指数稳定, 并具有给定的  $H_\infty$  性能. 滤波器参数通过求解一个线性矩阵不等式得到. 仿真研究说明了所提出算法的有效性.

**关键词** 网络系统, 随机时延, 丢包,  $H_\infty$  滤波, 线性矩阵不等式

**引用格式** 李秀英, 王金玉, 孙书利. 具有一步随机时滞和多丢包的  
网络系统  $H_\infty$  滤波器设计. 自动化学报, 2014, 40(1): 155–160

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2014.00155

## $H_\infty$ Filter Design for Networked Systems with One-step Random Delays and Multiple Packet Dropouts

LI Xiu-Ying<sup>1</sup> WANG Jin-Yu<sup>1</sup> SUN Shu-Li<sup>1</sup>

**Abstract** In networked systems, due to the limited bandwidth of communication channel connecting the sensors and the filters, the system measurements will be received with delays or even be lost during data transmission. In this paper, an  $H_\infty$  filtering problem is discussed for networked systems with random one-step delays and packet dropouts. Based on the new model presented recently which describes the random delays and packet dropouts simultaneously, a linear  $H_\infty$  filter is designed such that the filtering error system is exponentially mean-square stable and a prescribed  $H_\infty$  performance is guaranteed via the linear matrix inequality (LMI) approach. The parameters of the filter are obtained by solving an LMI. The simulation study shows the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words** Networked system, random delay, packet dropout,  $H_\infty$  filter, linear matrix inequality (LMI)

**Citation** Li Xiu-Ying, Wang Jin-Yu, Sun Shu-Li.  $H_\infty$  filter design for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(1): 155–160

近年来, 随着网络技术的飞速发展, 通过网络将传统控制系统中的被控对象和各部件间连接起来而构成的网络控制系统 (Networked control system, NCS) 成为学者们研究的

收稿日期 2012-08-13 录用日期 2012-11-07

Manuscript received August 13, 2012; accepted November 7, 2012  
国家自然科学基金 (60874062, 61174139), 教育部新世纪人才计划 (NCET-10-0133), 黑龙江大学高层次人才计划 (Hdtd2010-03), 黑龙江省研究生创新科研项目 (YJSCX2012-271HLJ), 省重点实验室基金资助

Supported by National Natural Science Foundations of China (60874062, 61174139), Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-10-0133), Program for High-qualified Talents in Heilongjiang University (Hdtd2010-03), Postgraduate Innovation Project of Heilongjiang Province (YJSCX2012-271HLJ), and Heilongjiang Province Key Laboratory

本文责任编辑 夏元清

Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing

1. 黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080

1. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080

热点之一<sup>[1-2]</sup>. 网络的引入使 NCS 具有连接简单、扩展容易、维护方便等优点<sup>[3]</sup>. 但是由于网络带宽等因素限制, 信息在传输过程中不可避免地会产生时延和数据包丢失等现象, 而且这种现象通常是随机发生的, 这给网络系统的分析与设计带来新的挑战<sup>[4]</sup>.

目前, 针对随机时滞和丢包现象的建模主要有两种方法: 1) 采用 Markov 随机过程来描述, 将带有不确定性的网络系统转化为跳变线性系统, 利用跳变线性系统理论来进行分析与综合. 文献 [5-6] 将随机有界时延建模为 Markov 过程, 并设计了输出反馈控制器. 文献 [7-8] 利用 Markov 随机过程描述有界多丢包现象, 利用 LMI 技术分析了网络系统的稳定性. 2) 采用 Bernoulli 分布的随机二进制切换序列描述, 将相应的网络系统转化为具有随机参数的系统进行分析与综合. 文献 [9-10] 采用 Bernoulli 序列描述系统的随机时延, 设计了使滤波误差系统均方指数稳定并具有给定的  $H_\infty$  性能的滤波器. 文献 [11-12] 利用 Bernoulli 分布的随机变量来描述多丢包现象, 分别设计了  $H_\infty$  滤波器和最小方差意义下的最优滤波器. 然而上述文献虽然分别讨论了随机时滞或多丢包问题, 而对随机时滞和数据包丢失同时存在的情况并不能统一处理.

新近文献 [13] 采用两个已知概率分布的 Bernoulli 随机变量来同时描述随机滞后和丢包现象, 通过引入新的变量, 将带随机滞后和丢包的随机系统转化为随机参数系统, 并设计了最优线性滤波器. 但是所设计的滤波器仅适用于高斯噪声且统计特性精确已知的情形, 这在实际中并不总是满足的. 当噪声的先验信息未知或噪声为非高斯时, 这种方法就不再适用.  $H_\infty$  滤波方法可以有效地解决此类问题. 一般地,  $H_\infty$  滤波问题可以归结为设计一个滤波器, 使滤波误差系统渐近稳定, 同时在噪声干扰的环境中满足一定的性能指标.

本文基于新近文献 [13] 提出的一步时滞和多丢包模型, 利用线性矩阵不等式技术设计  $H_\infty$  滤波器, 使滤波误差系统均方指数稳定并具有给定的  $H_\infty$  性能. 与文献 [13] 相比, 本文采用一种新的变量定义方法, 使得增广后的系统具有更低的维数, 而且所设计的滤波器不需要已知噪声的统计特性. 与文献 [9-11] 相比, 本文提出的滤波器能够统一处理随机时滞和丢包同时存在的  $H_\infty$  滤波问题, 对于没有滞后和丢包、仅有一步滞后或丢包的情况, 相应的结果可以作为本文的特殊情况获得.

## 1 问题描述

考虑如下离散时间线性系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{w}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_k + \mathbf{C}_2\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{D}_1\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_2\mathbf{w}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  是系统状态向量,  $\tilde{\mathbf{y}}_k \in \mathbf{R}^r$  是观测输出,  $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^p$  是干扰输入且属于平方可积的  $l_2[0, \infty)$  空间,  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$  是被估状态,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  是已知常数矩阵. 观测输出  $\tilde{\mathbf{y}}_k$  通过网络传输给滤波器, 而滤波器收到的观测数据可能具有一步随机时延甚至丢失, 相应的数学模型为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \xi_{1,k}\tilde{\mathbf{y}}_k + (1 - \xi_{1,k})(1 - \xi_{1,k-1})\xi_{2,k}\tilde{\mathbf{y}}_{k-1} + \\ &\quad (1 - \xi_{1,k})[1 - (1 - \xi_{1,k-1})\xi_{2,k}]\mathbf{y}_{k-1} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^r$  是滤波器接收到的观测,  $\xi_{i,k}$  ( $i = 1, 2$ ) 是满

足 Bernoulli 分布的互不相关的随机序列, 且满足统计概率  $\text{Prob}\{\xi_{i,k} = 1\} = \bar{\xi}_i$ ,  $\text{Prob}\{\xi_{i,k} = 0\} = 1 - \bar{\xi}_i$ ,  $i = 1, 2$ . 其中,  $0 \leq \bar{\xi}_i \leq 1$ ,  $\text{Prob}\{\cdot\}$  表示事件“·”发生的概率.

**注 1.** 这里用  $\xi_{i,k}$  ( $i = 1, 2$ ) 来描述数据经网络传输时产生的随机时延和丢包现象. 不难看出, 数据按时接收的概率为  $\text{Prob}\{\xi_{1,k} = 1\} = \bar{\xi}_1$ ; 一步随机时延的概率为  $\text{Prob}\{\xi_{1,k} = 0, \xi_{1,k-1} = 0, \xi_{2,k} = 1\} = (1 - \bar{\xi}_1)^2\bar{\xi}_2$ ; 数据包丢失的概率为  $\text{Prob}\{\xi_{1,k} = 0, \xi_{1,k-1} = 1\} + \text{Prob}\{\xi_{1,k} = 0, \xi_{1,k-1} = 0, \xi_{2,k} = 0\} = (1 - \bar{\xi}_1)\bar{\xi}_1 + (1 - \bar{\xi}_1)^2(1 - \bar{\xi}_2)$ .

**注 2.** 模型 (2) 在文献 [13] 中提出, 可同时描述随机一步时延和数据包丢失现象, 比文献 [9, 11] 更具有一般性. 当  $\xi_{1,k-1} = 0$  且  $\xi_{2,k} = 1$  时, 相当于文献 [9] 中一步随机时滞模型; 而当  $\xi_{1,k-1} = 0$  且  $\xi_{2,k} = 0$  时, 相当于文献 [11] 中多丢包模型.

本文引入一种新的变量定义方法, 令

$$\vartheta_{1,k} = \xi_{1,k}, \quad \vartheta_{2,k} = (1 - \xi_{1,k})\xi_{2,k+1} \quad (3)$$

则有

$$\mathbf{y}_k = \vartheta_{1,k}\tilde{\mathbf{y}}_k + (1 - \vartheta_{1,k})\mathbf{Y}_{k-1} \quad (4)$$

其中, 定义  $\mathbf{Y}_k = \vartheta_{2,k}\tilde{\mathbf{y}}_k + (1 - \vartheta_{2,k})\mathbf{y}_k$ . 则由式 (1) 和式 (4), 并注意  $\vartheta_{1,k}\vartheta_{2,k} = \xi_{1,k}(1 - \xi_{1,k})\xi_{2,k+1} = 0$ , 可得如下增广系统:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \tilde{\Phi}_k\mathbf{X}_k + \tilde{\Gamma}_k\mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = \tilde{H}_k\mathbf{X}_k + \vartheta_{1,k}\mathbf{C}_2\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \bar{D}_1\mathbf{X}_k + \mathbf{D}_2\mathbf{w}_k \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{x}_{k+1}^T \quad \mathbf{Y}_k^T \quad \mathbf{y}_k^T]^T$ ,  $\tilde{\Phi}_k$ ,  $\tilde{H}_k$  和  $\tilde{\Gamma}_k$  可以写成如下形式:  $\tilde{\Phi}_k = \Phi_0 + \vartheta_{1,k}\Phi_1 + \vartheta_{2,k}\Phi_2$ ,  $\tilde{H}_k = H_0 + \vartheta_{1,k}H_1$ ,  $\tilde{\Gamma}_k = \Gamma_0 + \vartheta_{1,k}\Gamma_1 + \vartheta_{2,k}\Gamma_2$ , 并且  $\Phi_i, \Gamma_i, i = 0, 1, 2, H_i, i = 0, 1$  和  $\bar{D}_1$  定义如下:

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 & -I & 0 \\ C_1 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_1 = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $0$  和  $I$  分别表示适当维数的零矩阵和单位阵.

**注 3.** 系统 (5) 是含有随机变量  $\vartheta_{i,k}$  ( $i = 1, 2$ ) 的随机参数系统, 这里给出如下的统计特性:

$$\begin{aligned} E\{\vartheta_{1,k}\} &= E\{\xi_{1,k}\} = \bar{\xi}_1 = \bar{\vartheta}_1 \\ E\{\vartheta_{2,k}\} &= E\{(1 - \xi_{1,k})\xi_{2,k+1}\} = (1 - \bar{\xi}_1)\bar{\xi}_2 = \bar{\vartheta}_2 \\ E\{(\vartheta_{1,k} - \bar{\vartheta}_1)^2\} &= \bar{\vartheta}_1(1 - \bar{\vartheta}_1) \\ E\{(\vartheta_{2,k} - \bar{\vartheta}_2)^2\} &= \bar{\vartheta}_2(1 - \bar{\vartheta}_2) \\ E\{(\vartheta_{1,k} - \bar{\vartheta}_1)(\vartheta_{2,k} - \bar{\vartheta}_2)\} &= -\bar{\vartheta}_1\bar{\vartheta}_2 \end{aligned}$$

其中, 符号  $E$  表示随机变量的数学期望.

**注 4.** 文献 [13] 中的变量定义方法所得增广系统状态的状态维数为  $n + 3r$ , 而本文提出的方法所得增广系统的状态维数为  $n + 2r$ , 明显低于文献 [13] 中的方法. 因而可减小计算负担.

本文设计如下形式的滤波器:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k+1} = A_f \hat{\mathbf{X}}_k + B_f \mathbf{y}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k = C_f \hat{\mathbf{X}}_k + D_f \mathbf{y}_k \end{cases} \quad (6)$$

这里  $\hat{\mathbf{X}}_k \in \mathbf{R}^{n+2r}$  是扩维状态的估计,  $\hat{\mathbf{z}}_k$  是待估状态  $\mathbf{z}_k$  的滤波器,  $A_f, B_f, C_f, D_f$  是待设计的滤波器参数. 定义滤波误差为  $\mathbf{e}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$ . 由式 (5) 和 (6), 可以得到如下的滤波误差系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{k+1} = \tilde{A}_k \boldsymbol{\eta}_k + \tilde{B}_k \mathbf{w}_k \\ \mathbf{e}_k = \tilde{C}_k \boldsymbol{\eta}_k + \tilde{F}_k \mathbf{w}_k \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^\top & \hat{\mathbf{X}}_k^\top \end{bmatrix}^\top \\ \tilde{A}_k &= \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_k & 0 \\ B_f \tilde{H}_k & A_f \end{bmatrix} = A_0 + \vartheta_{1,k} A_1 + \vartheta_{2,k} A_2 \\ \tilde{B}_k &= \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_k \\ B_f C_2 \vartheta_{1,k} \end{bmatrix} = B_0 + \vartheta_{1,k} B_1 + \vartheta_{2,k} B_2 \\ \tilde{C}_k &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 - D_f \tilde{H}_k & -C_f \end{bmatrix} = G_0 + \vartheta_{1,k} G_1 \\ \tilde{F}_k &= D_2 - D_f C_2 \vartheta_{1,k} = F_0 + \vartheta_{1,k} F_1 \\ A_0 &= \begin{bmatrix} \Phi_0 & 0 \\ B_f H_0 & A_f \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ B_f H_1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \Phi_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_0 &= \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ B_f C_2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_0 &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 - D_f H_0 & -C_f \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} -D_f H_1 & 0 \end{bmatrix} \\ F_0 &= D_2, F_1 = -D_f C_2 \end{aligned}$$

为了后文叙述方便, 引入如下符号:  $\tilde{\Phi} = E\{\tilde{\Phi}_k\}$ ,  $\tilde{\Gamma} = E\{\tilde{\Gamma}_k\}$ ,  $\tilde{H} = E\{\tilde{H}_k\}$ ,  $\tilde{A} = E\{\tilde{A}_k\}$ ,  $\tilde{B} = E\{\tilde{B}_k\}$ ,  $\tilde{C} = E\{\tilde{C}_k\}$ ,  $\tilde{F} = E\{\tilde{F}_k\}$ .

**定义 1.** 给定  $\gamma > 0$ , 如果系统 (7) 同时满足以下两个条件:

- 1) 均方指数稳定. 在外部扰动  $\mathbf{w}_k = 0$  时, 存在常数  $\varphi > 0$  和  $\tau \in (0, 1)$ , 使得  $E\{\|\boldsymbol{\eta}_k\|^2\} \leq \varphi \tau^k E\{\|\boldsymbol{\eta}_0\|^2\}$  成立.
- 2)  $H_\infty$  性能. 在零初始条件下, 对于所有的非零  $\mathbf{w}_k \in l_2(0, \infty)$  和给定的  $H_\infty$  性能指标  $\gamma > 0$ , 滤波误差  $\mathbf{e}_k$  满足:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\mathbf{e}_k\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\mathbf{w}_k\|^2\} \quad (8)$$

那么称系统 (7) 是均方意义下指数稳定的并且具有  $H_\infty$  性能  $\gamma$ .

## 2 滤波性能分析

**定理 1.** 给定标量  $\gamma > 0$ , 假设滤波器参数  $A_f, B_f, C_f,$

$D_f$  已知. 如果存在正定对称矩阵  $P$  使得:

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * \\ \tilde{A} & \tilde{B} & -N & * & * & * & * & * \\ \sigma_1 A_1 & \sigma_1 B_1 & 0 & -N & * & * & * & * \\ \sigma_2 A_2 & \sigma_2 B_2 & 0 & 0 & -N & * & * & * \\ \sigma_3 A_{1,2} & \sigma_3 B_{1,2} & 0 & 0 & 0 & -N & * & * \\ \tilde{C} & \tilde{F} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ \sigma_4 G_1 & \sigma_4 F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

成立, 其中

$$\begin{aligned} N &= P^{-1}, A_{1,2} = A_1 - A_2, B_{1,2} = B_1 - B_2 \\ \sigma_1 &= \sqrt{\bar{\xi}_1(1-\bar{\xi}_1)(1-\bar{\xi}_2)}, \sigma_2 = \sqrt{(1-\bar{\xi}_1)^2(1-\bar{\xi}_2)\bar{\xi}_2} \\ \sigma_3 &= \sqrt{\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2(1-\bar{\xi}_1)}, \sigma_4 = \sqrt{\bar{\xi}_1(1-\bar{\xi}_1)} \end{aligned}$$

那么滤波误差系统 (7) 是均方意义下指数稳定的, 且具有给定的  $H_\infty$  性能.

**证明.** 1) 首先证明当  $\mathbf{w}_k = 0$  时, 滤波误差系统 (7) 是均方指数稳定的. 选取 Lyapunov 函数为

$$V_k(\boldsymbol{\eta}_k) = \boldsymbol{\eta}_k^\top P \boldsymbol{\eta}_k \quad (10)$$

注意到

$$\begin{aligned} -A_1^\top P A_2 - A_2^\top P A_1 = \\ (A_1 - A_2)^\top P (A_1 - A_2) - A_1^\top P A_1 - A_2^\top P A_2 \end{aligned}$$

并由注 3, 可以得到:

$$\begin{aligned} E\{\Delta V_k\} &= E\{V_{k+1}(\boldsymbol{\eta}_{k+1}) | \boldsymbol{\eta}_k\} - V_k(\boldsymbol{\eta}_k) = \\ &\boldsymbol{\eta}_k^\top \{-P + \tilde{A}^\top P \tilde{A} + \sigma_1^2 A_1^\top P A_1 + \sigma_2^2 A_2^\top P A_2 + \\ &\sigma_3^2 A_{1,2}^\top P A_{1,2}\} \boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\eta}_k^\top \Psi \boldsymbol{\eta}_k \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$\Psi = -P + \tilde{A}^\top P \tilde{A} + \sigma_1^2 A_1^\top P A_1 + \sigma_2^2 A_2^\top P A_2 + \sigma_3^2 A_{1,2}^\top P A_{1,2}$   
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  和  $A_{1,2}$  由定理 1 定义. 由 Schur 补引理可知,  $\Psi < 0$  等价如下的不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P & * & * & * & * \\ \tilde{A} & -P^{-1} & * & * & * \\ \sigma_1 A_1 & 0 & -P^{-1} & * & * \\ \sigma_2 A_2 & 0 & 0 & -P^{-1} & * \\ \sigma_3 A_{1,2} & 0 & 0 & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

注意到式 (9) 成立意味着式 (12) 成立. 由文献 [10] 的证明过程可知, 系统 (7) 是均方意义下指数稳定的.

2) 证明当  $\mathbf{w}_k \neq 0$  时, 条件 (8) 在零初始条件下是成立的. 类似于 1) 的证明过程, 可得:

$$E\{\Delta V_k\} + E\{\mathbf{e}_k^\top \mathbf{e}_k\} - \gamma^2 E\{\mathbf{w}_k^\top \mathbf{w}_k\} = \boldsymbol{\zeta}_k^\top \bar{\Psi} \boldsymbol{\zeta}_k \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\Psi} &= \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{bmatrix} \tilde{P}^{-1} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} \\ \zeta_k &= \begin{bmatrix} \eta_k^T & \mathbf{w}_k^T \end{bmatrix}^T, \tilde{P} = \text{diag}\{-P, -P, -P, -P, -I, -I\} \\ W_1 &= \begin{bmatrix} \bar{A}^T & \sigma_1 A_1^T & \sigma_2 A_2^T & \sigma_3 A_{1,2}^T & \bar{G}^T & \sigma_4 G_1^T \end{bmatrix}^T \\ W_2 &= \begin{bmatrix} \bar{B}^T & \sigma_1 B_1^T & \sigma_2 B_2^T & \sigma_3 B_{1,2}^T & \bar{F}^T & \sigma_4 F_1^T \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

符号  $\text{diag}\{\cdot\}$  表示对角阵. 由 Schur 补引理可知, 式 (9) 意味着  $\bar{\Psi} < 0$ . 由此可得:

$$\text{E}\{\Delta V_k\} + \text{E}\{\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k\} - \gamma^2 \text{E}\{\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k\} = \zeta_k^T \bar{\Psi} \zeta_k < 0 \quad (14)$$

对式 (14), 将  $k$  从 0 到  $\infty$  累加可以得到:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{E}\{\|\mathbf{e}_k\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \text{E}\{\|\mathbf{w}_k\|^2\} + \text{E}\{V_0\} - \text{E}\{V_{\infty}\}$$

由于系统是均方指数稳定的, 且在零初始条件下,  $V_0(\eta_0) = 0$ , 则有  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{E}\{\|\mathbf{e}_k\|^2\} < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \text{E}\{\|\mathbf{w}_k\|^2\}$ . 这表明性能指标 (8) 满足, 即系统具有给定的  $H_{\infty}$  性能.  $\square$

### 3 $H_{\infty}$ 滤波器设计

**定理 2.** 给定标量  $\gamma > 0$ , 如果存在正定矩阵  $X, Z$  和矩阵  $\hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f, \hat{D}_f$ , 使得如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -\Lambda & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ \bar{\Theta}_{11} & \bar{\Theta}_{12} & \Lambda_1 & * \\ \bar{\Theta}_{21} & \bar{\Theta}_{22} & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

成立, 那么滤波误差系统 (7) 是均方意义下指数稳定的, 且具有给定的  $H_{\infty}$  性能  $\gamma$ . 其中

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_{11} &= \begin{bmatrix} \Theta_{\bar{A}}^T & \Theta_{A_1}^T & \Theta_{A_2}^T & \Theta_{A_{1,2}}^T \end{bmatrix}^T, \bar{\Theta}_{21} = \begin{bmatrix} \Theta_{\bar{G}}^T & \Theta_{G_1}^T \end{bmatrix}^T \\ \bar{\Theta}_{12} &= \begin{bmatrix} \Theta_{\bar{B}}^T & \Theta_{B_1}^T & \Theta_{B_2}^T & \Theta_{B_{1,2}}^T \end{bmatrix}^T, \bar{\Theta}_{22} = \begin{bmatrix} \Theta_{\bar{F}}^T & \Theta_{F_1}^T \end{bmatrix}^T \\ \Lambda_1 &= \text{diag}\{-\Lambda, -\Lambda, -\Lambda, -\Lambda\}, \Lambda_2 = \text{diag}\{-I, -I\} \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Z \end{bmatrix}, \Theta_{\bar{A}} = \begin{bmatrix} X\bar{\Phi} + \hat{B}_f \bar{H} & X\bar{\Phi} + \hat{B}_f \bar{H} + \hat{A}_f \\ Z\bar{\Phi} & Z\bar{\Phi} \end{bmatrix} \\ \Theta_{A_1} &= \sigma_1 \begin{bmatrix} X\Phi_1 + \hat{B}_f H_1 & X\Phi_1 + \hat{B}_f H_1 \\ Z\Phi_1 & Z\Phi_1 \end{bmatrix} \\ \Theta_{A_2} &= \sigma_2 \begin{bmatrix} X\Phi_2 & X\Phi_2 \\ Z\Phi_2 & Z\Phi_2 \end{bmatrix} \\ \Theta_{A_{1,2}} &= \sigma_3 \begin{bmatrix} X(\Phi_1 - \Phi_2) + \hat{B}_f H_1 & X(\Phi_1 - \Phi_2) + \hat{B}_f H_1 \\ Z(\Phi_1 - \Phi_2) & Z(\Phi_1 - \Phi_2) \end{bmatrix} \\ \Theta_{\bar{B}} &= \begin{bmatrix} X\bar{\Gamma} + \hat{B}_f C_2 \bar{\vartheta}_1 \\ Z\bar{\Gamma} \end{bmatrix}, \Theta_{B_1} = \sigma_1 \begin{bmatrix} X\Gamma_1 + \hat{B}_f C_2 \\ Z\Gamma_1 \end{bmatrix} \\ \Theta_{B_2} &= \sigma_2 \begin{bmatrix} X\Gamma_2 \\ Z\Gamma_2 \end{bmatrix}, \Theta_{B_{1,2}} = \sigma_3 \begin{bmatrix} X(\Gamma_1 - \Gamma_2) + \hat{B}_f C_2 \\ Z(\Gamma_1 - \Gamma_2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Theta_{\bar{G}} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 - \hat{D}_f \bar{H} & (\bar{D}_1 - \hat{D}_f \bar{H}) - \hat{C}_f \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{G_1} = \sigma_4 \begin{bmatrix} -\hat{D}_f H_1 & -\hat{D}_f H_1 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{\bar{F}} = D_2 - \hat{D}_f C_2 \bar{\vartheta}_1, \Theta_{F_1} = -\sigma_4 \hat{D}_f C_2$$

则  $H_{\infty}$  滤波器参数设计如下:

$$\begin{aligned}A_f &= R^{-1} \hat{A}_f Z^{-1} S^{-T}, \quad B_f = R^{-1} \hat{B}_f \\ C_f &= \hat{C}_f Z^{-1} S^{-T}, \quad D_f = \hat{D}_f\end{aligned}$$

这里  $R$  和  $S$  是两个非奇异阵, 满足  $RS^T = I - XZ^{-1}$ .

**证明.** 假设不等式 (15) 成立, 则有:

$$\begin{bmatrix} -X & -Z \\ -Z & -Z \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

由 Schur 补引理可得  $X - Z > 0$ . 因此, 存在非奇异矩阵  $R$  和  $S$  使得  $RS^T = I - XZ^{-1}$  成立. 令

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ R^T & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & S^T \end{bmatrix}, Y = Z^{-1}, P = \Sigma_1 \Sigma_2^{-1} \quad (17)$$

则有  $P = \begin{bmatrix} X & R \\ R^T & Q \end{bmatrix}$ , 其中  $Q = -R^T Y S^{-T} = S^{-1} Y (X - Y^{-1}) Y S^{-T} > 0$ . 而  $X - RQ^{-1} R^T = (I - XY)(X - Y^{-1})(I - YX) > 0$ . 由 Schur 引理可知  $P > 0$ .

分别对不等式 (15) 左乘、右乘如下矩阵  $\text{diag}\{I, Y, I, I, Y, I, Y, I, Y, I, I\}$  得到:

$$\begin{bmatrix} -\Pi & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * \\ \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & \Pi_1 & * \\ \bar{\Xi}_{21} & \bar{\Xi}_{22} & 0 & \Pi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{\Xi}_{11} &= \begin{bmatrix} \Xi_{\bar{A}}^T & \Xi_{A_1}^T & \Xi_{A_2}^T & \Xi_{A_{1,2}}^T \end{bmatrix}^T, \bar{\Xi}_{21} = \begin{bmatrix} \Xi_{\bar{G}}^T & \Xi_{G_1}^T \end{bmatrix}^T \\ \bar{\Xi}_{12} &= \begin{bmatrix} \Xi_{\bar{B}}^T & \Xi_{B_1}^T & \Xi_{B_2}^T & \Xi_{B_{1,2}}^T \end{bmatrix}^T, \bar{\Xi}_{22} = \begin{bmatrix} \Xi_{\bar{F}}^T & \Xi_{F_1}^T \end{bmatrix}^T \\ \Pi_1 &= \text{diag}\{-\Pi, -\Pi, -\Pi, -\Pi\}, \Pi_2 = \text{diag}\{-I, -I\} \\ \Pi &= \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \\ \Xi_{\bar{A}} &= \begin{bmatrix} X\bar{\Phi} + RB_f \bar{H} & X\bar{\Phi} Y + RB_f \bar{H} Y + RA_f S^T \\ \bar{\Phi} & \bar{\Phi} Y \end{bmatrix} \\ \Xi_{A_1} &= \sigma_1 \begin{bmatrix} X\Phi_1 + RB_f H_1 & X\Phi_1 Y + RB_f H_1 Y \\ \Phi_1 & \Phi_1 Y \end{bmatrix} \\ \Xi_{A_2} &= \sigma_2 \begin{bmatrix} X\Phi_2 & X\Phi_2 Y \\ \Phi_2 & \Phi_2 Y \end{bmatrix}, \Phi_{1,2} = \Phi_1 - \Phi_2 \\ \Xi_{A_{1,2}} &= \sigma_3 \begin{bmatrix} X\Phi_{1,2} + RB_f H_1 & X\Phi_{1,2} Y + RB_f H_1 Y \\ \Phi_{1,2} & \Phi_{1,2} Y \end{bmatrix} \\ \Xi_{\bar{B}} &= \begin{bmatrix} X\bar{\Gamma} + RB_f C_2 \bar{\vartheta}_1 \\ \bar{\Gamma} \end{bmatrix}, \Xi_{B_1} = \sigma_1 \begin{bmatrix} X\Gamma_1 + RB_f C_2 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{B_2} &= \sigma_2 \begin{bmatrix} X\Gamma_2 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \Xi_{B_{1,2}} = \sigma_3 \begin{bmatrix} X(\Gamma_1 - \Gamma_2) + RB_f C_2 \\ \Gamma_1 - \Gamma_2 \end{bmatrix} \\ \Xi_{\bar{G}} &= [\bar{D}_1 - D_f \bar{H} \quad (\bar{D}_1 - D_f \bar{H})Y - C_f S^T] \\ \Xi_{G_1} &= \sigma_4 [-D_f H_1 \quad -D_f H_1 Y] \\ \Xi_{\bar{F}} &= D_2 - D_f C_2 \bar{\theta}_1, \Xi_{F_1} = -\sigma_4 D_f C_2 \end{aligned}$$

经计算, 不等式 (15) 等价于:

$$\begin{bmatrix} -\Sigma_2^T P \Sigma_2 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * \\ \Sigma_1^T \bar{A} \Sigma_2 & \Sigma_1^T \bar{B} & \Omega & * & * & * & * & * \\ \sigma_1 \Sigma_1^T A_1 \Sigma_2 & \sigma_1 \Sigma_1^T B_1 & 0 & \Omega & * & * & * & * \\ \sigma_2 \Sigma_1^T A_2 \Sigma_2 & \sigma_2 \Sigma_1^T B_2 & 0 & 0 & \Omega & * & * & * \\ \sigma_3 \Sigma_1^T A_{1,2} \Sigma_2 & \sigma_3 \Sigma_1^T B_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \Omega & * & * \\ \bar{G} \Sigma_2 & \bar{F} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ \sigma_4 G_1 \Sigma_2 & \sigma_4 F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

其中,  $\Omega = -\Sigma_1^T P^{-1} \Sigma_1$ . 在不等式 (19) 两边分别左乘、右乘  $\text{diag}\{\Sigma_2^{-1}, I, \Sigma_1^{-1}, \Sigma_1^{-1}, \Sigma_1^{-1}, I, I\}$ , 可以得到式 (19) 等价于式 (9).  $\square$

**注 5.** 定理 2 给出了随机时延和丢包同时发生的网路环境下, 系统的  $H_\infty$  滤波器参数可以通过求解 LMI 式 (15) 的可行解而得到. 与只考虑随机时滞<sup>[9]</sup> 或只考虑多丢包<sup>[11]</sup> 的结果相比, 由于本文模型中相关随机变量增多, 使推导过程更加复杂.

**注 6.** 不难看出, 不等式 (15) 不仅对参数  $\hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f$  以及  $\hat{D}_f$  是线性的, 而且对  $\gamma^2$  也是线性的. 因此, 若令  $\beta = \gamma^2$ , 则在求解不等式 (15) 时, 可以同时求解出系统的  $H_\infty$  性能指标  $\gamma^*$ .

本文的最优  $H_\infty$  滤波器设计问题归纳为凸优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X>0, Z>0, \hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f, \hat{D}_f} & \beta \\ \text{s.t. (15) with } & \beta = \gamma^2 \end{aligned} \quad (20)$$

于是滤波系统的最优  $H_\infty$  性能指标为  $\gamma^* = \sqrt{\beta^*}$ , 其中  $\beta^*$  为  $\beta$  的最优值.

### 4 仿真例子

为验证本文所提算法的有效性, 考虑文献 [14] 中的一个 UPS 系统, 其离散时间模型为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9226 & -0.6330 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_1 &= [23.737 \quad 20.287 \quad 0], C_2 = 0.3 \\ D_1 &= [-0.3 \quad 0.1 \quad 0], D_2 = 0.1 \end{aligned}$$

仿真中不失一般性, 假设  $\bar{\xi}_1 = 0.7, \bar{\xi}_2 = 0.8$ , 即观测数据按时接收的概率为 0.7, 一步随机时延的概率为 0.072, 丢包的概率为 0.228, 通过求解问题 (20), 可得最优的  $\gamma^* = 0.3813$ .

当  $w_k$  采用均值为零、方差为  $Q_w = 1$  的白噪声时, 仿真结果如图 1 所示. 图 2 给出了在相同情况下, 通过

200 次 Monte-Carlo 测试本文滤波器和标准 Kalman 滤波器 (Kalman filter, KF) 及文献 [13] 的均方误差 (Mean square error, MSE) 的比较结果. 从仿真结果中可以看出, 本文所提出的估计算法的精度高于标准 Kalman 滤波算法, 而低于文献 [13] 的最优线性滤波算法. 由此可见, 在网路环境下, 即当观测数据存在随机时延和丢包时, 本文滤波器是有效的. 此时标准 Kalman 滤波器已经失去了最优性. 而文献 [13] 所设计的滤波器仍然具有最优性.

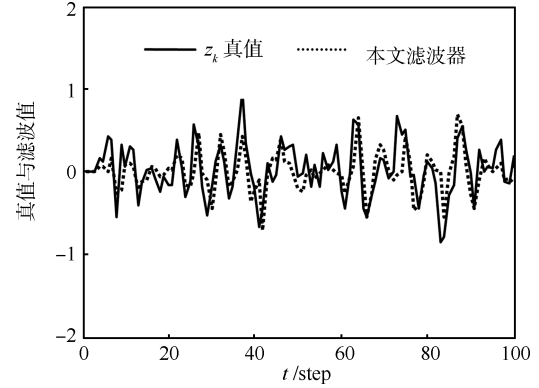


图 1  $z_k$  真实值和  $H_\infty$  滤波值  
Fig. 1 True value of  $z_k$  and its  $H_\infty$  filter

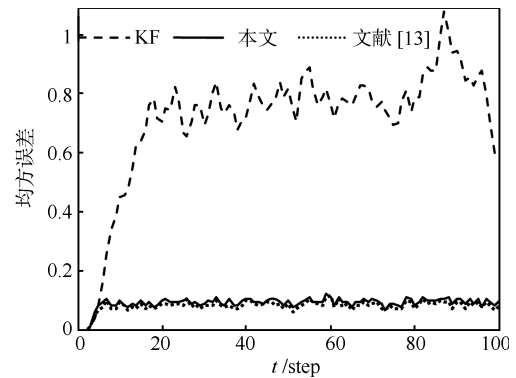


图 2 本文滤波器和 Kalman 滤波器及文献 [13] 的均方误差比较  
Fig. 2 MSE comparison of our filter between Kalman filter and [13]

当外部干扰噪声为  $w_k = 1/k^2$  时, 仿真结果如图 3 所示. 由图 3 可见, 本文的滤波算法仍能有效地跟踪真实信号. 由于系统干扰为非随机性干扰, 在这种情况下, 基于高斯随机噪声的标准 Kalman 滤波算法和文献 [13] 的线性最优滤波算法已经失效. 这也是本文所提出的  $H_\infty$  滤波算法的优势所在.

为了进一步说明本文算法的  $H_\infty$  性能指标  $\gamma^*$  与数据传输过程中的随机时滞和丢包概率之间的关系, 图 4 给出了  $\gamma^*$  随  $\bar{\xi}_1$  和  $\bar{\xi}_2$  的值之间的变化关系. 由图 4 可见, 当  $\bar{\xi}_1 = 1$ , 即数据包正常接收时,  $\gamma^*$  值最小, 而当  $\bar{\xi}_1 = 0$  且  $\bar{\xi}_2 = 0$ , 即数据包丢失的概率为 1 时,  $\gamma^*$  值最大.

### 5 结论

本文研究了具有一步随机时延和丢包的网路系统  $H_\infty$  滤波问题. 基于文献 [13] 所提出的同时描述随机时延和数据包丢失的模型, 通过定义新的变量, 将原系统转化为随机参数系统, 与文献 [13] 相比, 所建立的随机参数系统具有更

低维数。利用 LMI 方法设计了  $H_\infty$  滤波器, 使得滤波误差系统均方指数稳定且具有一定干扰抑制水平  $\gamma$ , 推广了文献 [9–11] 仅仅分别处理时滞或丢包系统的  $H_\infty$  滤波, 也避免了文献 [13] 的最优线性滤波器要求高斯噪声和噪声统计特性已知的要求。

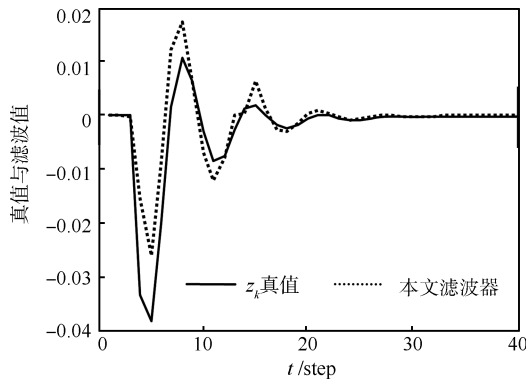


图 3  $z_k$  真实值和  $H_\infty$  滤波值

Fig. 3 True value of  $z_k$  and its  $H_\infty$  filter

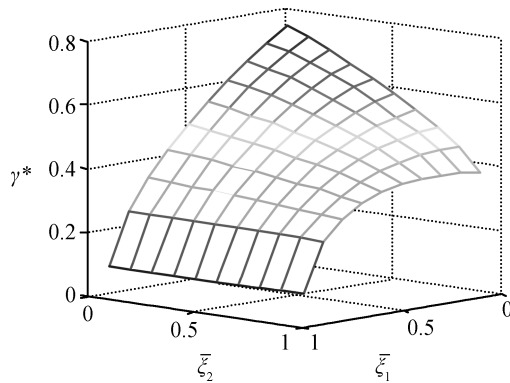


图 4 最优  $H_\infty$  性能指标  $\gamma^*$  与丢包率和时滞率的关系

Fig. 4 Relation of optimal  $H_\infty$  index  $\gamma^*$  and packet-dropout rate and time-delay rate

## References

- Zhang B Y, Zheng W X.  $H_\infty$  filter design for nonlinear networked control systems with uncertain packet-loss probability. *Signal Processing*, 2012, **92**(6): 1499–1507
- Ma Wei-Guo, Shao Cheng. Stochastic stability for networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 878–882  
(马卫国, 邵诚. 网络控制系统随机稳定性研究. *自动化学报*, 2007, **33**(8): 878–882)
- Antsaklis P, Baillieul J. Special issue on technology of networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 5–8
- Wang Fei-Yue, Wang Cheng-Hong. On some basic issues in network-based direct control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(S): 172–176  
(王飞跃, 王成红. 基于网络控制的若干基本问题的思考和分析. *自动化学报*, 2002, **28**(增刊): 172–176)
- Xiao L, Hassibi A, How J P. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*. Chicago, USA: IEEE, 2000. **3**(1): 2199–2204

- Shi Y, Yu B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(7): 1668–1674
- Sun Y G, Qin S Y. Stability and stabilization of networked control systems with bounded packet dropout. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(1): 113–118
- Xiong J L, Lam J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss. *Automatica*, 2007, **43**(1): 80–87
- Zhou S S, Feng G.  $H_\infty$  filtering for discrete-time systems with randomly varying sensor delays. *Automatica*, 2008, **44**(7): 1918–1922
- Wang Wu, Lin Qiong-Bin, Yang Fu-Wen.  $H_\infty$  filter design for discrete-time networked systems with random communication delays. *Control Theory and Application*, 2007, **24**(3): 366–370, 379  
(王武, 林琼斌, 杨富文. 具有随机通讯时延的离散网络化系统的  $H_\infty$  滤波器设计. *控制理论与应用*, 2007, **24**(3): 366–370, 379)
- Sahebsara M, Chen T W, Shah S L. Optimal  $H_\infty$  filtering in networked control systems with multiple packet dropouts. *Systems and Control Letters*, 2008, **57**(9): 696–702
- Ma J, Sun S L. Information fusion estimators for systems with multiple sensors of different packet dropout rates. *Information Fusion*, 2011, **12**(3): 213–222
- Sun Shu-Li. Optimal linear estimation for networked systems with one-step random delays and multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 349–356  
(孙书利. 具有一步随机滞后和多丢包的的网络系统的最优线性估计. *自动化学报*, 2012, **38**(3): 349–356)
- Shi P, Luan X L, Liu F.  $H_\infty$  filtering for discrete-time systems with stochastic incomplete measurement and mixed delays. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(6): 2732–2739

李秀英 黑龙江大学电子工程学院博士研究生. 主要研究方向网络控制系统的滤波与控制. E-mail: xiuxiu4480@sina.com

(LI Xiu-Ying Ph.D. candidate at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. Her research interest covers filtering and control for networked control systems.)

王金玉 黑龙江大学电子工程学院硕士研究生. 主要研究方向为网络系统的  $H_\infty$  滤波器设计. E-mail: wangjinyu20061537@126.com  
(WANG Jin-Yu Master student at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. His main research interest is the  $H_\infty$  filter design for networked systems.)

孙书利 黑龙江大学电子工程学院教授. 主要研究方向为网络系统滤波, 多传感器信息融合. 本文通信作者. E-mail: sunsl@hlju.edu.cn  
(SUN Shu-Li Professor at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. His research interest covers networked systems filtering and multi-sensor fusion. Corresponding author of this paper.)