

带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法

胡云卿¹ 刘兴高¹ 薛安克²

摘要 控制变量参数化 (Control variable parameterization, CVP) 方法是目前求解流程工业中最优操作问题的主流数值方法, 但如果问题中包含路径约束, 特别是不等式路径约束时, CVP 方法则需要考虑专门的处理手段. 为了克服该缺点, 本文提出一种基于 L1 精确惩罚函数的方法, 能够有效处理关于控制变量、状态变量、甚至控制变量/状态变量复杂耦合形式下的不等式路径约束. 此外, 为了能使用基于梯度的成熟优化算法, 本文还引进了最新出现的光滑化技巧对非光滑的惩罚项进行磨光. 最终得到了能高效处理不等式路径约束的改进型 CVP 架构, 并给出相应数值算法. 经典的带不等式路径约束最优控制问题上的测试结果及与国外文献报道的比较研究表明: 本文所提出的改进型 CVP 架构及相应算法在精度和效率上兼有良好表现.

关键词 流程工业, 最优控制, 控制变量参数化, 不等式路径约束, 惩罚函数

引用格式 胡云卿, 刘兴高, 薛安克. 带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法. 自动化学报, 2013, 39(12): 1996–2001

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01996

A Penalty Method for Solving Inequality Path Constrained Optimal Control Problems

HU Yun-Qing¹ LIU Xing-Gao¹ XUE An-Ke²

Abstract Control variable parameterization (CVP) method is currently popular for solving optimal control problems in process industries. However, dealing with path constraints is difficult in the framework of CVP method, especially for inequality path constraints. In order to conquer this flaw, this paper introduces the L1 exact penalty function from the mathematical programming into the field of optimal control so as to incorporate all the inequality path constraints into the original objective function. Besides, in order to use sophisticated gradient-based optimization algorithms, a novel smoothing technique is introduced to make the penalty terms differentiable. In this way, an enhanced CVP implementation structure which can handle inequality path constraints efficiently and a concomitant algorithm are proposed. Classic optimal control problems with path constraints are illustrated. Compared with the results by previous researchers, the results obtained in this paper demonstrate marked advantages in terms of accuracy and efficiency.

Key words CIMS, optimal control, control variable parameterization, inequality path constraint, penalty function

Citation Hu Yun-Qing, Liu Xing-Gao, Xue An-Ke. A penalty method for solving inequality path constrained optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 1996–2001

在流程工业领域里, 复杂生产过程的优化理论与算法研究已成为当前发展趋势, 并最终可归结为最优控制问题^[1]. 最优控制的概念自从 20 世纪 50 年代中期提出以来, 由于现实应用价值大, 已经引起了国内外相关领域众多学者的关注和研究, 其

典型的应用包括系统节能、降耗、挖潜、改造中的最优决策, 过程最佳操作参数的确定, 污染物的最佳治理与排放等.

目前, 最优控制问题的数值算法可以分为两大类: 间接法和直接法. 间接法通过求解原问题的最优性条件 (即必要条件), 间接获得原问题的最优解. 典型的间接法^[2] 包括控制矢量迭代 (Control vector iteration, CVI)、边界条件迭代 (Boundary condition iteration, BCI)、拟线性化 (Quasi-linearization) 以及多点投射 (Multi-shooting). 直接法则是通过离散化, 将无限维的最优控制问题转化为有限维的非线性规划 (Nonlinear programming, NLP) 问题再求解的方法. 仅离散化控制变量而保持状态变量不变是直接法又称为控制变量参数化 (Control variable parameterization, CVP) 方法, 它是当前求解最优控制问题的主流数值方法.

实际控制过程常常需要对某些控制变量或状态

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-08-14
Manuscript received May 15, 2012; accepted August 14, 2012
国家 863 计划项目 (2006AA05Z226), 国家自然科学基金 (U1162130), 浙江省杰出青年科学基金项目 (R4100133) 资助
Supported by National High Technology Research and Development Program of China (863 Program) (2006AA05Z226), National Natural Science Foundation of China (U1162130), and Outstanding Youth Science Foundation of Zhejiang Province (R4100133)

本文责任编辑 李少远
Recommended by Associate Editor LI Shao-Yuan
1. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027 2. 杭州电子科技大学信息与控制研究所 杭州 310018
1. State Key Laboratory of Industry Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027 2. Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018

变量进行约束(例如操作过程中要求温度或压力不超过指定值). 如果约束只在过程的某一时刻要求满足, 则称为点约束, 如果在一段时间内都要求满足, 则称为路径约束. CVP 方法虽然具有求解精度高、离散化后的 NLP 问题规模小等优点, 但是需要额外的手段来处理不等式类型的路径约束.

因此, 国际上众多学者都在探索如何在现有 CVP 方法的框架内有效处理不等式路径约束的办法^[3-7].

一方面, 带不等式路径约束的最优控制问题离散化后实际上是一个带约束的 NLP 问题; 另一方面, 惩罚函数法是数学规划领域中求解带约束 NLP 问题的有效方法, 因此本文考虑将惩罚函数法从数学规划领域引入到最优控制领域, 完善 CVP 方法处理路径约束的能力. 本文选用 L1 精确惩罚函数, 将所有不等式路径约束作为积分形式的惩罚项推广到原问题的目标函数中, 然后采用近年新出现的光滑化技巧对这些非光滑惩罚项进行磨光, 最后使用成熟 NLP 算法求解. 值得注意的是, 由于所有不等式路径约束已被消去, 传统的 CVP 架构发生了如下变化: NLP 求解所需的目标函数值由常微分方程组的初值问题即可获得(不再需要求解复杂的微分代数方程组初值问题); NLP 求解所需的梯度信息由邻域灵敏度方程可以高效获得, 且适合控制变量多的问题^[8]; 仅需要解一系列无约束的 NLP 问题即可获得原来带路径约束最优控制问题的近似数值解(不再需要使用复杂的带约束 NLP 算法, 例如 SQP 算法). 针对得到的改进型 CVP 架构, 本文给出了一种高效算法, 并在一个有解析解的 Bang-Bang 控制问题和一个无解析解的复杂非线性最优控制问题中测试. 良好的测试结果表明了所提出的改进型 CVP 架构及算法的有效性.

1 带不等式路径约束的最优控制问题描述

本文考虑的带不等式路径约束的最优控制问题 1, 其数学描述如下:

$$\min J[\mathbf{u}(t)] = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] dt \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = F[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \quad (1b)$$

$$G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (1c)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1d)$$

$$t_0 \leq t \leq t_f \quad (1e)$$

其中, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^{nu}$ 是控制变量, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^{nx}$ 是状态变量, 操作开始时刻 t_0 和结束时刻 t_f 都是固定的. 过程的特性由常微分方程组(1b) 和不等式路径约束(1c) 描述, 其初始可行状态为 \mathbf{x}_0 . J 是该过程的

目标函数, 其中 Φ 和 L 分别是终值项和积分项. 值得一提的是 $G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \leq 0$ 既可以表示关于控制变量的不等式路径约束, 又可以表示关于状态变量的不等式路径约束, 还可以表示它们的复杂组合.

设 $U = \{[u_1(t), u_2(t), \dots, u_{nu}(t)]^T : G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ 是 $\mathbf{u}(t)$ 的可行控制集, 最优控制问题(1a)~(1e) 可以简单描述为: 在可行初始条件(1d) 下, 从可行控制集 U 中求得针对系统(1b) 和(1c) 的最优控制策略 $\mathbf{u}^*(t)$, 使得目标函数(1a) 值最小.

2 理论推导及算法描述

2.1 精确罚函数在最优控制问题中的应用

Bryson 等最早给出了问题 1 的二次惩罚函数形式^[9], 但二次惩罚函数不是精确罚函数(非精确罚函数要求惩罚因子趋于正无穷大, 才能获得满意解, 这将造成数值计算上的困难). 在这里, 采用 L1 精确罚函数消去不等式路径约束, 问题 2 为得到的新问题:

$$\begin{aligned} \min \tilde{J}[\mathbf{u}(t)] &= J[\mathbf{u}(t)] + \\ &\rho \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \max\{0, G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t]\} dt \\ \text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) &= F[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ t_0 \leq t &\leq t_f \end{aligned} \quad (2)$$

其中 ρ 称为惩罚因子. Fiacco 已证明, 可以通过逐渐增大 ρ 的方式求解问题 2, 当 ρ 大于某阈值后, 问题 2 的解就是问题 1 的解^[10], 这种求解策略称为序列无约束最小化技术(Sequential unconstrained minimization techniques, SUMT).

2.2 非可微惩罚项的光滑化

求解问题 2 最大的障碍在于 \max 操作符不是光滑的, 因此离散后的 NLP 问题不能使用现有成熟的、基于梯度的优化算法(例如 BFGS 算法). 近年来, 出现了一些利用光滑函数近似 \max 操作符的技术, 本文引进其中一种 2004 年由国内学者提出的技术^[11]. 其光滑化近似函数如(3) 所示.

$$p_{\varepsilon, \rho, G_i} = \begin{cases} 0, & G_i < -\frac{\varepsilon}{\rho m} \\ \frac{\rho m}{2\varepsilon} G_i^2 + G_i + \frac{\varepsilon}{2\rho m}, & -\frac{\varepsilon}{\rho m} \leq G_i < 0 \\ G_i + \frac{\varepsilon}{2\rho m}, & G_i > 0 \end{cases} \quad (3)$$

显然, 函数 $p_{\varepsilon, \rho, G_i}$ 对 G_i 是一阶可微的. 而且 $p_{\varepsilon, \rho, G_i}$ 具有良好逼近 \max 操作符的性质:

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} p_{\varepsilon, \rho, G_i} = \max\{0, G_i\}$, 其中 ε 称为光滑化因子. 将控制变量 $\mathbf{u}(t)$ 采用分段常量参数 \mathbf{u} 表示, 再对问题 2 中的非光滑惩罚项使用 $p_{\varepsilon, \rho, G_i}$ 近似, 得到光滑问题 3:

$$\min \bar{J}[\mathbf{u}] = J[\mathbf{u}] + \rho \cdot \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m p_{\varepsilon, \rho, G_i} dt \quad (4a)$$

$$\text{s.t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = F[\mathbf{u}, \mathbf{x}(t), t] \quad (4b)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4c)$$

$$t_0 \leq t \leq t_f \quad (4d)$$

假设在优化过程中, 当前控制参数为 $\mathbf{u}^{(k)}$, 通过 (4b) 和 (4c) 组成的常微分方程初值问题即可获得 $\mathbf{x}^{(k)}(t)$, 进而 (4a) 就变成了一个以 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ (即新的 \mathbf{u}) 作为优化变量的无约束 NLP 问题. 问题 1、问题 2 的解与问题 3 的解之间的关系由下列定理保证 (证明过程可参阅 [11]):

定理 1. 对于任何 $u, \rho > 0, \varepsilon > 0$, 则有: $0 \leq \bar{J}[\mathbf{u}] - \bar{J}[\mathbf{u}] \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

定理 2. 对于 $\rho > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 设 \mathbf{u}_ρ^* 是问题 2 的解, $\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*$ 是问题 3 的解, 且满足 \mathbf{u}_ρ^* 与 $\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*$ 都是问题 1 的可行点, 则有: $0 \leq J[\mathbf{u}_\rho^*] - J[\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*] \leq \varepsilon/2$.

推论 1. 对于 $\rho > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 设 $\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*$ 是问题 3 的解, \mathbf{u}^* 是问题 1 的解, 进一步, 如果 $\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*$ 还是问题 1 的可行点, 那么当 ρ 大于某阈值 ρ^* 时, 有: $0 \leq J[\mathbf{u}^*] - J[\mathbf{u}_{\varepsilon, \rho}^*] \leq \varepsilon/2$.

定理 1 说明如果 ε 足够小, 那么问题 2 的解与问题 3 的解近似相等; 定理 2 和推论 1 说明当惩罚因子 ρ 大于阈值 ρ^* 时, 问题 3 的解与问题 1 的解近似相等. 由于 ρ^* 事先未知, 所以问题 1 的解可以通过 SUMT 方式求解一系列问题 3 获得.

2.3 用邻域灵敏度方程高效计算梯度信息

关于传统 CVP 方法的详细描述请参考文献 [5] 和 [12]. 因为所有不等式路径约束 $G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 均被消去, 离散后的 NLP 问题目标函数值通过解 (4b) 和 (4c) 构成的常微分方程初值问题即可获得. 此外, 基于梯度的 NLP 算法还需要计算目标函数对优化变量的梯度信息, 定义问题 3 的哈密顿函数:

$$H[\mathbf{u}, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = L + \sum_{i=1}^m p_{\varepsilon, \rho, G_i} + \boldsymbol{\lambda}(t)^T F \quad (5)$$

问题 3 的邻域方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = - \frac{\partial H[\mathbf{u}, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} = - \frac{\partial \{L + \sum_{i=1}^m p_{\varepsilon, \rho, G_i}\}}{\partial \mathbf{x}(t)} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(t)} \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left. \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{t=t_f} \quad (6b)$$

其邻域灵敏度方程可由 (7) 确定, 推导过程可参考 [8]. 其中 $i = 1, 2, \dots, m$ 表示约束序号, $j = 1, 2, \dots, nu$ 表示控制变量序号, N 是 $t_0 \leq t \leq t_f$ 的离散化段数, $r = 1, 2, \dots, N$ 表示离散段数序号. 值得注意的是 (7) 中不会出现关于 $G_i[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t] \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 的邻域变量. 如果已经通过 (4b) 和 (4c) 求得了状态变量 $\mathbf{x}(t)$ 、通过 (6a) 和 (6b) 求得了关于 $F[\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), t]$ 的邻域变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$, 则目标函数 $\bar{J}[\mathbf{u}]$ 对所有控制参数的梯度信息可以由式 (7) 高效获得.

$$\frac{d\bar{J}[\mathbf{u}]}{du_{j,r}} = \int_{t_{r-1}}^{t_r} \left[\frac{\partial \left(L + \sum_{i=1}^m p_{\varepsilon, \rho, G_i} \right)}{\partial u_j(t)} + \frac{\partial F}{\partial u_j(t)} \boldsymbol{\lambda}(t) \right] dt \quad (7)$$

2.4 解不等式路径约束最优控制问题的光滑化 L1 精确惩罚函数算法

步骤 1. 设置初始惩罚因子 $\rho^{(0)}$, 放大系数 ($c > 1$), 初始光滑化因子 $\varepsilon^{(0)}$, 缩小系数 d ($0 < d < 1$), 误差容限 ε_E .

步骤 2. 输入初始可行条件 \mathbf{x}_0 , 初始分段常量控制参数 $\mathbf{u}^{(0)}$, 设置惩罚次数 $k = 0$.

步骤 3. 解常微分方程组初值问题 (4b) 和 (4c), 得到 $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ 和 $\bar{J}[\mathbf{u}^{(k)}]$ 的值.

步骤 4. 检验收敛准则 $G_i[\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)}(t), t] \leq \varepsilon_E, i = 1, 2, \dots, m$, 如果满足则停止算法并输出 $\mathbf{u}^{(k)}$ 作为 $\mathbf{u}^*(t)$ 的近似值, 输出 $\bar{J}[\mathbf{u}^{(k)}]$ 作为 $J[\mathbf{u}^*(t)]$ 的近似值; 如果不满足则进入步骤 5.

步骤 5. 解邻域方程 (6a) 和 (6b), 得到 $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}(t)$ 的值.

步骤 6. 根据式 (7) 计算梯度信息 $\frac{d\bar{J}[\mathbf{u}^{(k)}]}{du_{j,r}^{(k)}}$ ($j = 1, 2, \dots, nu; r = 1, 2, \dots, N$).

步骤 7. 解无约束 NLP 问题 (4a), 得到新的分段常量控制参数 $\mathbf{u}^{(k+1)}$.

步骤 8. 设置 $\mathbf{u}^{(k)} := \mathbf{u}^{(k+1)}, \rho^{(k)} := c \cdot \rho^{(k)}, \varepsilon^{(k)} := d \cdot \varepsilon^{(k)}, k := k + 1$, 回到步骤 3.

3 实例测试

本节采用两个最优控制问题对光滑化 L1 罚函数算法进行测试. 相关参数设置如下: 离散段数 $N = 40$ 、误差容限 $\varepsilon_E = 10^{-4}$ 、初始惩罚因子 $\rho^{(0)} = 1$ 、放大系数 $c = 10$ 、初始光滑化因子 $\varepsilon^{(0)} = 5 \times 10^{-6}$ 、缩小系数 $d = 0.5$. 控制变量用分段常量形式逼近, 梯度信息用邻域灵敏度方程求得.

为提高计算速度, 状态微分方程组的求解使用带预测校正的 4 步 4 阶 Adams 法, NLP 问题的求解使用 BFGS 拟牛顿法. 由于每次 BFGS 迭代都需要解一次常微分方程组的初值问题, 因此 BFGS 迭代次数可以作为衡量算法效率的指标之一.

3.1 Bang-Bang 控制问题

这是一个有解析解的 Bang-Bang 控制问题, 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^1 [x(t) - \frac{1}{2}u(t)]dt \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ x(0) &= 1.0 \\ |u(t)| &\leq 1.0 \\ t &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (8)$$

许多最优控制类书籍都给出了其解析解, 但无数值解. 该问题的理论最优目标函数值保留 4 位有效数字后为 $J^* = 0.4574$, 对应的最优控制策略为:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t \leq \ln \frac{e}{2}) \\ 1 & (\ln \frac{e}{2} \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (\ln \frac{e}{2} \approx 0.3) \quad (9)$$

初始控制参数 u 统一设置为 0. 表 1 列出了在 AMD Turion64/1G DDR2 计算平台上, 使用光滑化 L1 精确罚函数算法得到的结果. 当惩罚因子 $\rho = 1$ 、光滑化因子 $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ 时目标函数值为 0.4667; 当惩罚因子 $\rho = 10$ 、光滑化因子 $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-6}$ 时算法停止, 得到的最优目标函数值 $J^* = 0.4586$. 求解过程中需要 98 次 BFGS 迭代, 总耗时约为 14.88 s.

表 1 Bang-Bang 控制问题的求解结果

Table 1 Result of Bang-Bang control problem

惩罚次数	惩罚因子	光滑化因子	$\bar{J}[u^{(k)}]$	误差
1	1	5×10^{-6}	0.4667	1.52×10^{-3}
2	10	2.5×10^{-6}	0.4586	5.51×10^{-7}

图 1 和图 2 显示了控制轨迹和状态轨迹在求解过程中的变化情况. 从图 1 可以看出, 当算法停止时, 控制变量在 $t \in [0, 1]$ 内满足路径约束 $|u(t)| \leq 1.0$. 在 $t = \ln \frac{e}{2}$ 附近, 控制变量有匀称跳变过程, 呈现出 Bang-Bang 控制的特性, 但需要一小段过渡时间.

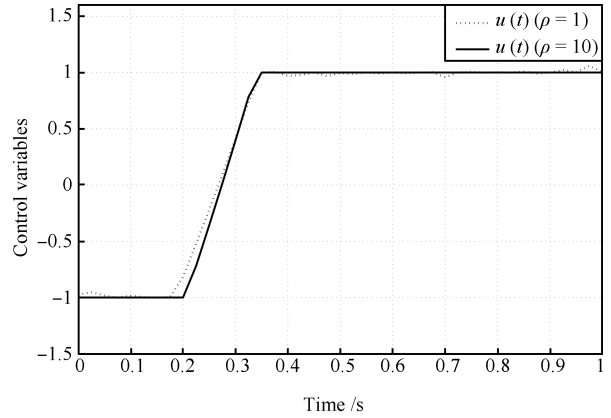


图 1 Bang-Bang 控制问题控制变量的惩罚过程

Fig. 1 The punishment process of control variable of Bang-Bang control problem

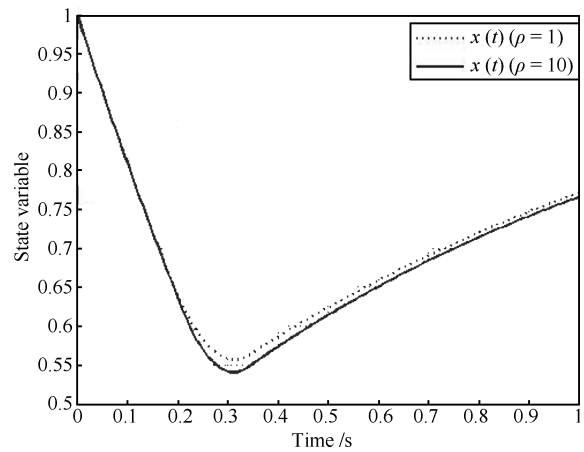


图 2 Bang-Bang 控制问题状态曲线的惩罚过程

Fig. 2 The punishment process of state variables of Bang-Bang control problem

3.2 非线性最优控制问题

这是一个包含奇异弧线的经典最优控制问题, 由 Jacobson 等^[13] 于 1969 年提出. 其数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^1 [x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0.005u^2(t)]dt \\ \text{s.t. } \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= -1 \\ x_2(t) - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 &\leq 0 \\ -3 &\leq u(t) \leq 15 \\ t &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (10)$$

初始控制参数 \mathbf{u} 统一设置为 3. 表 2 列出了在 AMD Turion64/1G DDR2 计算平台上, 使用光滑化 L1 精确罚函数算法得到的结果, 同样仅需要两次惩罚就获得问题的数值解. 当惩罚因子 $\rho = 1$, 光滑化因子 $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ 时目标函数值为 0.1762; 当惩罚因子 $\rho = 10$, 光滑化因子 $\varepsilon = 2.5 \times 10^{-6}$ 时算法完成, 目标函数值增加到 $J^* = 0.1799$. 优化过程需要 93 次 BFGS 迭代, 耗时 21.31 s. 1990 年, Gritsis^[14] 测试了该问题并获得了 0.18040 的最优目标函数值, 不久后 Vassiliadis^[12] 在 SUN SPARC2 计算平台上获得了 0.17989 的更优值, 耗时 675 s, Feehery^[5] 使用浮动阶算法在 H9000 C160 计算平台上获得了 0.18002 的结果. 本文使用光滑化 L1 罚函数法获得的最优目标函数值 0.1799 与文献最优值 0.17989 在精度上是齐平的, 虽然不同平台下的寻优时间难以严格比较, 但是从优化效率来看, 本文所提出的方法也十分高效.

表 2 Jacobson & Lele 问题的求解结果
Table 2 Result of Jacobson & Lele problem

惩罚次数	惩罚因子	光滑化因子	$\bar{J}[\mathbf{u}^{(k)}]$	误差
1	1	5×10^{-6}	0.1762	2.66×10^{-2}
2	10	2.5×10^{-6}	0.1799	4.72×10^{-6}

图 3~5 显示了控制轨迹和状态轨在求解过程中的变化情况. 从图 3 可以看出, 当算法停止时, 控制变量在 $t \in [0, 1]$ 内满足关于控制变量的路径约束 $-3 \leq u(t) \leq 15$. 为了更清楚地展现光滑化 L1 罚函数算法的有效性, 图 5 单独画出了最优状态轨迹和不等式路径约束 $x_2(t) - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0$, 可以看出, 状态变量 $x_2(t)$ 始终位于该约束的边界(虚线表示)下方, 非常好地满足了该不等式路径约束.

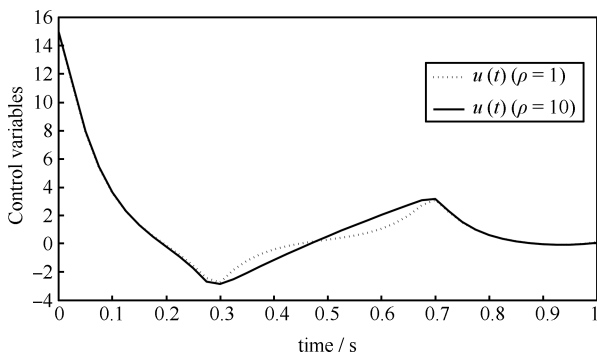


图 3 Jacobson & Lele 问题控制变量的惩罚过程
Fig. 3 The punishment process of control variable of Jacobson & Lele problem

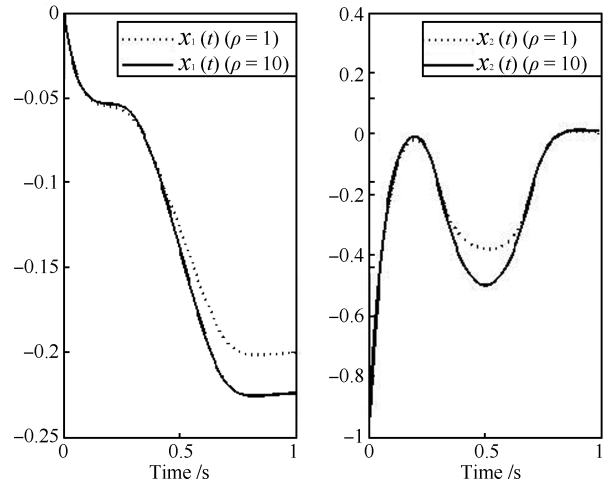


图 4 Jacobson & Lele 问题状态曲线的惩罚过程
Fig. 4 The punishment process of state variables of Jacobson & Lele problems

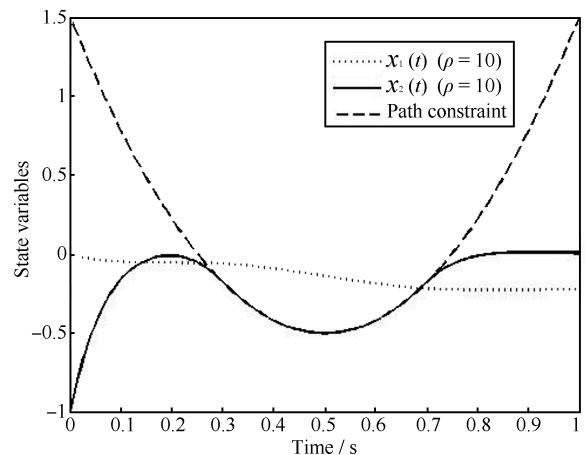


图 5 Jacobson & Lele 问题的最优状态曲线及路径约束
Fig. 5 The optimized state curve and path constraint of Jacobson & Lele problem

4 结论

本文将 L1 精确惩罚函数从数学规划领域引入到最优控制, 并融合一种新近出现的光滑化技巧, 改进了传统 CVP 方法的实现结构. 改进型 CVP 方法的主要优点有: NLP 问题的目标函数值仅需要通过解常微分方程组的初值问题获得; 梯度信息由邻域灵敏度方程也可以高效获得; 原问题的近似解可以通过一系列无约束 NLP 问题的解逐渐逼近.

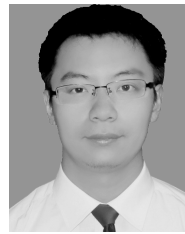
所提出的光滑化 L1 罚函数算法在 Bang-Bang 控制问题和 Jacobson & Lele 问题上进行了测试, 并将得到的结果与之前研究者的结果进行了对比. 在第 3 节设置的参数条件下: Bang-Bang 控制问题获得了 0.4586 的最优目标函数值, 与理论值的相对误差不超过 3/1000; Jacobson & Lele 问题获得的最

优值为 0.1799, 在精度上与文献最优值齐平。由于计算机平台、CVP 方法中的子算法、以及离散段数的不同, 优化过程的消耗时间并不能作为比较算法效率的依据, 在此仅列出作为参考, 但仍可以看出本文所提出的改进型 CVP 方法具有高效性。本文提出的方法对中小规模问题具有良好的测试效果, 大规模的实例测试将会是本文的后续工作。

References

- 1 Grossmann I E, Biegler L T. Future perspective on optimization. *Computers and Chemical Engineering*, 2004, **28**(8): 1193–1218
- 2 Kirk D E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. New York: Dover Publications, 2004. 464
- 3 Bell M L, Sargent R W H. Optimal control of inequality constrained DAE systems. *Computers and Chemical Engineering*, 2000, **24**(11): 2385–2404
- 4 Bloss K F, Biegler L T, Schiesser W E. Dynamic process optimization through adjoint formulations and constraint aggregation. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 1999, **38**(2): 421–432
- 5 Feehery W F. *Dynamic Optimization with Path Constraints* [Ph. D. dissertation], MIT, Cambridge, MA, 1998
- 6 Luus R. Handling inequality constraints in optimal control by problem reformulation. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2009, **48**(21): 9622–9630
- 7 Chen T W C, Vassiliadis V S. Inequality path constraints in optimal control: a finite iteration ε -convergent scheme based on pointwise discretization. *Journal of Process Control*, 2005, **15**(3): 353–362
- 8 Biegler L T. *Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 415
- 9 Bryson A E, Ho Y C. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Florence: Taylor and Francis, 1975. 496
- 10 Fiacco A V, McCormick G P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics, 1990. 437
- 11 Bai Fu-Sheng. Exact Penalty Methods in Nonlinear Programming [Ph. D. dissertation], Shanghai University, China, 2004
(白富生. 非线性规划中的精确罚函数 [博士学位论文], 上海大学, 中国, 2004)

- 12 Vassiliadis V S. *Computational Solution of Dynamic Optimization Problems with General Differential-Algebraic Constraints* [Ph. D. dissertation], University of London, London, 1993
- 13 Jacobson D H, Lele M M. A transformation technique for optimal control problems with a state variable inequality constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, **14**(5): 457–464
- 14 Gritsis D M. *The Dynamic Simulation and Optimal Control of Systems Described by Index two Differential-Algebraic Equations* [Ph. D. dissertation], University of London, London, 1990



胡云卿 浙江大学控制系博士研究生。主要研究方向为动态优化。
E-mail: huyunq@126.com
(**HU Yun-Qing** Ph. D. candidate at Control Department, Zhejiang University. His research interest covers dynamic optimization.)



刘兴高 浙江大学控制系教授。主要研究方向为工业过程建模、优化与控制。本文通信作者。
E-mail: liuxg@iipc.zju.edu.cn
(**LIU Xing-Gao** Professor at Control Department, Zhejiang University. His research interest covers modeling, optimization and control of industrial process. Corresponding author of this paper.)



薛安克 杭州电子科技大学信息与控制研究所教授。主要研究方向为智能信息处理和先进控制理论与应用。
E-mail: akxue@hzisee.edu.cn
(**XUE An-Ke** Professor at Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University. His research interest covers intelligent information processing and advanced control theory and application.)