

# 线性自抗扰控制器的稳定性研究

陈增强<sup>1</sup> 孙明玮<sup>1</sup> 杨瑞光<sup>1</sup>

**摘要** 研究了线性扩张状态观测器 (Extended state observer, ESO) 的估计能力, 并且分析了在线性自抗扰控制 (Linear active disturbance rejection control, LADRC) 下闭环系统的稳定性. 对于系统模型未知的情形, 给出了线性扩张观测器估计误差有界的证明, 并通过分析得出了如下结论: 在扩张状态观测器跟踪误差趋于零的前提下, 在线性自抗扰控制下的闭环系统可以实现对设定信号的精确跟踪以及输入-输出有界 (Bounded input and bounded output, BIBO) 稳定.

**关键词** 自抗扰控制, 线性自抗扰控制, 扩张状态观测器, 稳定性, 输入-输出有界稳定

**引用格式** 陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究. 自动化学报, 2013, 39(5): 574-580

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.00574

## On the Stability of Linear Active Disturbance Rejection Control

CHEN Zeng-Qiang<sup>1</sup> SUN Ming-Wei<sup>1</sup> YANG Rui-Guang<sup>1</sup>

**Abstract** This paper investigates the estimation ability of linear extended state observer (ESO) and the stability of the closed-loop system under the linear active disturbance rejection control (LADRC). The bounds of the estimation tracking errors for linear extended state observer (ESO) are proved when the mathematical model of the plant is not given, and the following results are given: under the condition that the tracking error of ESO converges to zero, the accurate tracking to the setpoint signal and the bounded input and bounded output (BIBO) stability can be achieved for the closed loop system under the control of LADRC.

**Key words** Active disturbance rejection control (ADRC), linear active disturbance rejection control (LADRC), extended state observer (ESO), stability, bounded input and bounded output (BIBO) stability

**Citation** Chen Zeng-Qiang, Sun Ming-Wei, Yang Rui-Guang. On the stability of linear active disturbance rejection control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(5): 574-580

基于状态观测器的估计理论在非线形系统控制中起着重要的作用<sup>[1-2]</sup>. 韩京清提出的自抗扰控制 (Active disturbance rejection control, ADRC) 技术是一种基于扩张状态观测器 (Extended state observer, ESO) 的新型实用的非线性控制技术<sup>[3-8]</sup>. 自抗扰控制的三个主要组成部分: 扩张状态观测器、跟踪微分器和非线性反馈结构中都使用了非线性机制. 使用非线性机制有其有利的一面 (如更高精度、更高的反馈效率等), 但也给其理论分析和工程设计带来了较大困难, 使用非线性反馈所带来的稳态高增益容易在小信号引起抖动, 同时控制设计参数过多 (10 个左右), 并且非线性控制器难以进行工程上常用的频域分析以确定稳定性边界. 针对以上问题, 高志强等<sup>[9-10]</sup> 将所有控制

器和 ESO 都以线性形式实现, 得到线性自抗扰控制器 (Linear active disturbance rejection control, LADRC), LADRC 将控制参数降到 4 个, 而且都有比较明确的物理意义, 十分便于工程应用, 并且取得了很好的实际控制效果. 更为重要的是, 自抗扰控制的精髓在于它的实时估计和及时补偿. 孙明玮等<sup>[11-14]</sup> 在导弹飞行控制系统的线性自抗扰控制器设计方面进行了深入探讨, 并进行了仿真研究, 但是没有进行稳定性分析. 杨瑞光等和孙明玮等<sup>[15-19]</sup> 对一阶加时延等典型环节的线性自抗扰控制进行了性能分析, 并给出了设计参数与控制器性能的定量关系, 但是针对一般的  $n$  阶系统, 并没有进行分析. 为了便于分析自抗扰控制的机理、性能和确定控制器参数, 本文后面使用的都是线性自抗扰控制. 这里所说的线性自抗扰控制是指扩张状态观测器和控制器都是线性的, 而且不使用微分跟踪器.

本文主要研究线性扩张状态观测器的估计能力以及线性自抗扰控制下闭环系统的稳定性问题. 本文证明了在系统确切模型已知的条件下, 可以构造出合适的线性扩张观测器使观测器估计误差趋于零. 在这种线性扩张观测器下, 可以设计出线性自抗扰

收稿日期 2012-05-15 录用日期 2012-09-22  
Manuscript received May 15, 2012; accepted September 22, 2012

国家自然科学基金 (61174094) 资助  
Supported by National Natural Sciences Foundation of China (61174094)

本文客座编委 李少远  
Recommended by Guest Editor LI Shao-Yuan

1. 南开大学自动化系 天津 300071  
1. Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071

控制器使闭环系统的输出渐近跟踪输入信号. 同时也证明了, 在系统确切模型未知的前提下, 线性扩张观测器的估计误差是有界的, 此时, 线性自抗扰控制下的闭环系统是输入-输出有界 (Bounded input and bounded output, BIBO) 稳定的.

## 1 扩张状态观测器 (ESO)

扩张状态观测器 (ESO)<sup>[2,5]</sup> 是自抗扰控制中的核心部分, 主要是补偿未知系统的不确定因素. 反馈控制的目的是通过负反馈来抑制和消除各种扰动对系统输出的影响. 借用状态观测器的思想, 把未建模动态和各种扰动的综合作用看成是一个新的状态-扩张状态, 通过输出反馈的方式观测这个扩张状态. 这个扩张状态观测器并不依赖于系统的具体数学模型, 它所依靠的仅仅是对象的阶次.

考虑一类具有单输入、单输出的非线性时变系统:

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), w(t)) + bu \quad (1)$$

其中,  $w(t)$  是外界的扰动;  $b$  是给定的非零常数;  $u$  是系统的输入;  $y$  是系统的输出;  $f(y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), w(t))$  表示被控对象动态, 它可以是时变的、非线性的, 为叙述方便, 把它简记为  $f$ , 并假定  $\dot{f} = h$ . 形式地引入“扩张状态”  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , 满足下式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = x_{n+1} + bu \\ \dot{x}_{n+1} = h(\mathbf{X}, w) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{X} = [x_1 \ \dots \ x_{n+1}]^T$ .

那么, 将式 (1) 转化为线性系统的状态方程, 从而可以构造出扩张状态观测器, 得到扩张状态  $\mathbf{X}$  的估计值  $\mathbf{Z} = [z_1 \ \dots \ z_{n+1}]^T$ . 最主要的目的是得到  $f$  的实时估计值  $z_{n+1}$ . 当系统模型未知时, 由于  $h(\mathbf{X}, w)$  并不知道, 所以, 可以取  $h(\mathbf{X}, w) = 0$  近似代替. 作变换:

$$u = v - \frac{z_{n+1}}{b} \quad (3)$$

则系统 (1) 就变为

$$y^{(n)} = f + bu = f + bv - z_{n+1}bv \quad (4)$$

这样, 就实现了时变非线性系统的近似线性化和确定化.

对系统 (1) 可以建立一般形式的扩张状态观测器:

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - l_{01}g_1(e_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n - l_{0(n-1)}g_{n-1}(e_1) \\ \dot{z}_n = z_{n+1} + bu - l_{0n}g_n(e_1) \\ \dot{z}_{n+1} = -l_{0(n+1)}g_{n+1}(e_1) \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $g_i(e_i)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) 是  $e_i$  的非线性函数, 其基本要求是它始终和  $e_i$  保持同号, 即  $e_i g_i(e_i) \geq 0$ ,  $e_i$  表示观测误差. 在上述扩张观测器中, 如果取  $g_i(e_i) = e_i$ , 这类型的扩张状态观测器被称之为线性扩张状态观测器 (Linear ESO, LESO). 如果在扩张观测器中使用了非线性函数, 就叫作非线性扩张状态观测器 (Nonlinear ESO, NLESO).

## 2 线性扩张状态观测器的估计能力

在自抗扰控制器中, 扩张观测器是非常核心的部分. 能否比较准确地从扩张观测器中提取系统状态、模型和外扰的实时作用量, 对整个控制器的品质至关重要. 因此, 对扩张观测器的估计能力的分析是非常必要的. 文献 [4] 给出了二阶非线性扩张状态观测器的误差分析, 但是分析一般的非线性时变对象是困难的. 本文对线性扩张观测器的估计能力进行分析. 根据被控对象动态模型是否能够确切知道分两种情形来进行讨论.

### 2.1 确切知道被控对象的动态模型的情形

当被控对象的动态模型为已知时, 也就是用式 (1) 描述的系统  $f$  是完全知道的, 并且它的导数  $h(\mathbf{X}, w)$  也是知道的. 这时它的形式化状态方程和输出方程描述为式 (2). 引入矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n+1}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n+1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{n+1} \end{bmatrix}^T$$

则式 (2) 中状态方程部分可以写成如下矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + B_1u + B_2h(\mathbf{X}, w) \quad (6)$$

为了直观起见, 我们把  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ) 的观测值对应地用  $\tilde{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ) 表示.

对式 (6) 构造线性扩张观测器:

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = A\tilde{\mathbf{X}} + B_1u + B_2h(\tilde{\mathbf{X}}, w) + L(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) \quad (7)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{X}} = [\tilde{x}_1 \ \dots \ \tilde{x}_{n+1}]^T$  是扩张观测器观测向量,  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ) 是可选的扩张观测器增益常数. 矩阵:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (8)$$

用式 (6) 减去式 (7) 得:

$$\dot{\mathbf{X}} - \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (A - L)(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) + B_2(h(\mathbf{X}, w) - h(\tilde{\mathbf{X}}, w)) \quad (9)$$

易于计算

$$|\lambda I_{n+1} - (A - L)| = \lambda^{n+1} + l_1\lambda^n + \dots + l_{n+1} \quad (10)$$

为了使估计误差趋于 0, 矩阵  $A - L$  必须是霍尔维兹的, 也就是说它的特征根具有负实部. 为了简单起见, 按如下方式选取, 使得:

$$\lambda^{n+1} + l_1\lambda^n + \dots + l_{n+1} = (\lambda + \omega)^{n+1} \quad (11)$$

其中,  $\omega > 0$ . 由二项式定理知:

$$l_i = \frac{(n+1)!\omega^i}{i!(n+1-i)!}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (12)$$

把式 (12) 代入到式 (9), 并展开, 有:

$$\dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i = -\frac{(n+1)!\omega^i}{i!(n+1-i)!}(x_1 - \dot{\tilde{x}}_1) + (x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

$$x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1} = -\omega^{n+1} + (h(\mathbf{X}, w) - h(\tilde{\mathbf{X}}, w)) \quad (14)$$

在式 (13) 的两边同除以  $\omega^{i-1}$ , 在式 (14) 的两边同除以  $\omega^n$  得到:

$$\frac{\dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i}{\omega^{i-1}} = -\omega \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}(x_1 - \dot{\tilde{x}}_1) + \frac{x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}}{\omega^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\frac{x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}}{\omega^n} = -\omega + \frac{h(\mathbf{X}, w) - h(\tilde{\mathbf{X}}, w)}{\omega^n} \quad (16)$$

记

$$e_i = \frac{x_i - \tilde{x}_i}{\omega^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (17)$$

$$a_i = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (18)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = [e_1 \ \dots \ e_{n+1}]^T$$

则式 (15) 和式 (16) 合在一起可以写成:

$$\dot{\mathbf{e}} = \omega A_1 \mathbf{e} + B_2 \frac{h(\mathbf{X}, w) - h(\tilde{\mathbf{X}}, w)}{\omega^n} \quad (19)$$

如果在式 (19) 的右边, 没有第二项, 则上述取法足以保证估计误差渐近趋于 0. 设式 (19) 的第二项是误差的有界线性函数, 那么估计误差将渐近趋于 0. 于是有下述定理.

**定理 1**<sup>[7]</sup>. 假定  $h(\mathbf{X}, w)$  关于  $\mathbf{X}$  满足全局 Lipschitz 条件, 即存在正常数  $c$ , 对于任意的  $\tilde{\mathbf{X}}$ , 满足:  $|h(\mathbf{X}, w) - h(\tilde{\mathbf{X}}, w)| \leq c\|\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}\|$  ( $\|\cdot\|$  表示范数), 则存在足够大的正数  $\omega$ , 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n+1$$

## 2.2 被控对象的动态模型是未知的情形

在实际使用中, 被控对象的确切数学模型是未知的, 也就是说在式 (1) 中, 不知道  $f = f(y^{(n)}(t), \dots, y(t), w(t))$  具体是什么, 从理论上虽然可以假定  $f = h$ , 但是在构造扩张观测器时, 没办法使用  $h$ . 不妨在式 (7) 中, 令  $h = 0$ , 换句话说就是我们没有使用  $f$  的导数信息. 此时, 估计误差等式 (9) 就变为

$$\dot{\mathbf{X}} - \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (A - L)(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}) + B_2h(\mathbf{X}, w) \quad (20)$$

记:  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $A_2 = A - L$ , 则式 (20) 简略成:

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = A_2\tilde{\mathbf{e}} + B_2h(\mathbf{X}, w) \quad (21)$$

有如下结果.

**定理 2.** 假定  $h(\mathbf{X}, w)$  是有界的, 即存在正数  $M_1$ , 使  $|h(\mathbf{X}, w)| \leq M_1$ , 则总有线性扩张观测器存在使估计误差是有界的, 即存在正数  $M_2$ , 使得  $\|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq M_2$  成立.

**证明.** 可以取正数  $\lambda_i < \lambda_j$  ( $i < j$ ,  $i, j = 1, \dots, n+1$ ), 使得:

$$|\lambda I_{n+1} - A_2| = \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda + \lambda_i) \quad (22)$$

在这种选择下,  $A_2$  的特征根互不相同, 所以存在可逆实矩阵  $T$ , 使得:

$$A_2 = T \text{diag}\{-\lambda_1, \dots, -\lambda_{n+1}\} T^{-1} \quad (23)$$

那么

$$\exp(A_2 t) = T \text{diag}\{\exp(-\lambda_1 t), \dots, \exp(-\lambda_{n+1} t)\} T^{-1} \quad (24)$$

当  $t > 0$  时, 对式 (24) 使用  $m_\infty$  范数 (一个方阵的  $m_\infty$  范数是它的阶数与元素最大绝对值的乘积), 则有  $\|\exp(A_2 t)\|_{m_\infty} \leq \beta \exp(-\lambda_1 t)$  ( $t > 0$ ), 其中  $\beta$  是一个常数. 由式 (21), 得到它的解为

$$\tilde{e}(t) = \exp(A_2 t)e(0) + \int_0^t \exp(A_2(t-\tau))B_2 h d\tau \quad (25)$$

由  $m_\infty$  范数与复数域上向量的 2-范数的相容性知:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}(t)\| &\leq \|\exp(A_2 t)e(0)\| + \\ &\left\| \int_0^t \exp(A_2(t-\tau))B_2 h d\tau \right\| \leq \\ &\|\exp(A_2 t)\|_{m_\infty} \|e(0)\| + \\ &\int_0^t \|\exp(A_2(t-\tau))\|_{m_\infty} \|B_2\| \|h\| d\tau \leq \\ &\beta \|e(0)\| \exp(-\lambda_1 t) + \\ &\frac{M_1 \beta}{\lambda_1} (1 - \exp(-\lambda_1 t)) \leq \\ &\beta \|e(0)\| + \frac{M_1 \beta}{\lambda_1} = M_2 \end{aligned} \quad (26)$$

□

### 3 线性自抗扰控制的稳定性

在上一节, 我们分析了线性扩张观测器的估计能力. 在本节, 我们研究线性自抗扰控制下的稳定性问题. 需要特别指出的是, 虽然在自抗扰控制中也使用了系统的状态方程, 但这些状态方程仅仅是形式上的. 线性控制论中的分离原则在这里不再适用. 我们这里所说的稳定性是 BIBO 稳定性, 即有界输入产生有界输出.

让被控对象 (1) 跟踪有界输入  $r$ , 利用 LESO 的输出  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{n+1}]$ , 作如下反馈控制:

$$u = \frac{k_1}{b}(r - \tilde{x}_1) + \dots + \frac{k_n}{b}(r^{(n-1)} - \tilde{x}_n) + \frac{1}{b}(r^{(n)} - \tilde{x}_{n+1}) \quad (27)$$

其中,  $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$  是控制器参数. 则式 (1) 可以写成:

$$y^{(n)}(t) = f - \tilde{x}_{n+1} + k_1(r - \tilde{x}_1) + \dots + k_n(r^{(n-1)} - \tilde{x}_n) + r^{(n)} \quad (28)$$

记  $r = r_1, r_2 = \dot{r}, \dots, r_{n+1} = r^{(n)}$ , 并且  $\varepsilon_i = r_i - x_i, i = 1, \dots, n$ , 则有:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \dot{r}_1 - \dot{x}_1 = r_2 - x_2 = \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1} = \dot{r}_{n-1} - \dot{x}_{n-1} = r_n - x_n = \varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_n = \dot{r}_n - \dot{x}_n = r_{n+1} - y^{(n)} = \\ -k_1 \varepsilon_1 - \dots - k_n \varepsilon_n - k_1 \tilde{e}_1 - \\ \dots - k_n \tilde{e}_n - \tilde{e}_{n+1} \end{cases} \quad (29)$$

其中,  $\tilde{x}_i$  是  $x_i$  在某个线性扩张观测器下的估计值,  $\tilde{e}_i = x_i - \tilde{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) 是估计误差.

记

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}^T \\ \tilde{e} &= \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \dots & \tilde{e}_{n+1} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

并且

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_n \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n & -1 \end{bmatrix}$$

则式 (29) 可以写成矩阵形式:

$$\dot{\varepsilon} = A_3 \varepsilon + A_4 \tilde{e} \quad (30)$$

**定理 3.** 假定扩张状态观测器的估计误差

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{e}\|_2 = 0$$

则存在控制器参数  $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$ , 使闭环系统 (30) 的跟踪误差趋于 0.

**证明.** 式 (30) 的解为

$$\varepsilon(t) = \exp(A_3 t)\varepsilon(0) + \int_0^t \exp(A_3(t-\tau))A_4 \tilde{e} d\tau \quad (31)$$

由于

$$|\lambda I_n - A_3| = k_1 + k_2\lambda + \cdots + k_n\lambda^{n-1} + \lambda^n \quad (32)$$

可以选择  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 使  $|\lambda I_n - A_3| = \prod_{i=1}^{i=n} (\lambda + \bar{\lambda}_i)$ , 其中,  $0 < \bar{\lambda}_i < \bar{\lambda}_j$  ( $j > i$ ). 这样  $A_3$  具有  $n$  个互不相同的特征值, 因而  $A_3$  可以对角化, 即存在可逆矩阵  $\bar{T}$ , 使  $A_3 = \bar{T} \text{diag}\{-\bar{\lambda}_1, \dots, -\bar{\lambda}_n\} \bar{T}^{-1}$ , 所以

$$\exp(A_3 t) = \bar{T} \text{diag}\{\exp(-\bar{\lambda}_1 t), \dots, \exp(-\bar{\lambda}_n t)\} \bar{T}^{-1} \quad (33)$$

对任意正数  $t > 0$ ,

$$\|\exp(A_3 t)\|_2 \leq \|\bar{T}\|_2 \|\bar{T}^{-1}\|_2 \exp(-\bar{\lambda}_1 t) = \bar{\beta} \exp(-\bar{\lambda}_1 t) \quad (34)$$

当  $\bar{\lambda}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 选定以后,  $\bar{\beta}$  是一个常数

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\exp(A_3 t)\|_2 = 0 \quad (35)$$

同样地

$$\|\exp(A_3(t - \tau))\|_2 \leq \bar{\beta} \exp(-\bar{\lambda}_1(t - \tau)), \quad t \geq \tau \quad (36)$$

由于线性扩张观测器估计误差  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{e}}\|_2 = 0$ , 从而  $\tilde{\mathbf{e}}$  的二范数有上界  $\alpha$ , 并且对任意指定的  $\eta > 0$ , 存在正数  $t_0$ , 当  $t > t_0$  时,  $\tilde{\mathbf{e}}$  的二范数小于  $\eta$ . 由于

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \exp(A_3(t - \tau)) A_4 \tilde{\mathbf{e}} d\tau \right\|_2 = \\ & \left\| \int_0^{t_0} \exp(A_3(t - \tau)) A_4 \tilde{\mathbf{e}} d\tau \right\|_2 + \\ & \left\| \int_{t_0}^t \exp(A_3(t - \tau)) A_4 \tilde{\mathbf{e}} d\tau \right\|_2 \leq \\ & \bar{\beta} \|A_4\|_2 \alpha \exp(-\bar{\lambda}_1 t) \int_0^{t_0} \exp(\bar{\lambda}_1 \tau) d\tau + \\ & \bar{\beta} \|A_4\|_2 \exp(-\bar{\lambda}_1 t) \eta \int_{t_0}^t \exp(\bar{\lambda}_1 \tau) d\tau = \\ & \bar{\beta} \|A_4\|_2 \alpha \int_0^{t_0} \exp(\bar{\lambda}_1 \tau) d\tau \exp(-\bar{\lambda}_1 t) + \\ & \bar{\beta} \|A_4\|_2 \exp(-\bar{\lambda}_1 t) \frac{\exp(\bar{\lambda}_1 t) - \exp(\bar{\lambda}_1 t_0)}{\bar{\lambda}_1} \eta \leq \\ & \bar{M}_1 \exp(-\bar{\lambda}_1 t) + \frac{\bar{\beta} \|A_4\|_2}{\bar{\lambda}_1} \eta = \\ & \bar{M}_1 \exp(-\bar{\lambda}_1 t) + \bar{M}_2 \eta \end{aligned} \quad (37)$$

其中

$$\bar{M}_1 = \bar{\beta} \|A_4\|_2 \alpha \int_0^{t_0} \exp(\bar{\lambda}_1 \tau) d\tau, \quad \bar{M}_2 = \frac{\bar{\beta} \|A_4\|_2}{\bar{\lambda}_1}$$

是常数. 由  $\exp(-\bar{\lambda}_1 t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) 及  $\eta$  的任意性

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \int_0^t \exp(A_3(t - \tau)) A_4 \tilde{\mathbf{e}} d\tau \right\|_2 = 0 \quad (38)$$

综合式 (35) 和式 (38), 由式 (31) 得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\|_2 = 0$$

□

**定理 4.** 假定  $h(\mathbf{X}, w)$  是有界的, 即存在正数  $M_1$ , 使  $|h(\mathbf{X}, w)| \leq M_1$ , 则存在线性扩张状态观测器以及控制器参数  $k_1 > 0, \dots, k_n > 0$ , 使闭环系统 (30) 的跟踪误差有界. 从而, 对于有界输入  $r$ , 闭环系统的输出有界, 即闭环系统是 BIBO 稳定的.

利用定理 2 结果, 在定理假设条件下, 可以选择适当的线性扩张观测器参数使得观测器估计误差有界. 类似定理 3 的证明过程, 容易证明定理 4 结论成立.

#### 4 仿真实验

考虑被控对象是一个三阶系统, 它的传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{(5s + 1)(0.5s + 1)(0.2s + 1)} \quad (39)$$

在控制器的设计中, 用如下一阶惯性环节系统去近似这个三阶系统:

$$G_1(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (40)$$

可以利用开环阶跃响应测试的办法得到式 (40), 通过开环阶跃响应测试, 可以测得  $K = 2, T = 5.72$ . 基于式 (40), 按照本文方法进行基于降阶观测器的线性自抗扰控制. 由式 (40) 得到系统的状态空间描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + bu \\ \dot{x}_2 = w \\ y = x_1 \end{cases} \quad (41)$$

其中,  $w$  被看成是扰动变量.

构造式 (41) 的降阶扩张状态观测器 (ESO) 来估计状态  $x_2$ .

$$z_2 = \omega \dot{y} - \omega bu - \omega z_2 \quad (42)$$

其中,  $z_2$  是  $x_2$  的估计值,  $\omega > 0$  确定 ESO 的收敛速率. 因为无法得到  $\dot{y}$ , 引入一个新的状态  $z$ ,

$$z = z_2 - \omega y \quad (43)$$

式 (42) 化为

$$\dot{z} = -\omega z - \omega^2 y - \omega b u \quad (44)$$

降阶 ESO 由式 (43) 和式 (44) 构成. 控制器设计为

$$u = \frac{k_p(r - y) - z_2}{b} \quad (45)$$

取  $\omega = 10$ ,  $b = 2.4$ ,  $k_p = 0.5$  时的控制效果如图 1 所示. 其中, 系统输入值  $r = 1$  为常值阶跃输入信号, 曲线为系统的阶跃响应输出信号  $y$ , 图 2 为系统的控制信号. 可以看出, 基于一阶系统降阶观测器的线性自抗扰控制器可使得三阶系统的闭环系统 BIBO 稳定, 并且跟踪误差趋于 0.

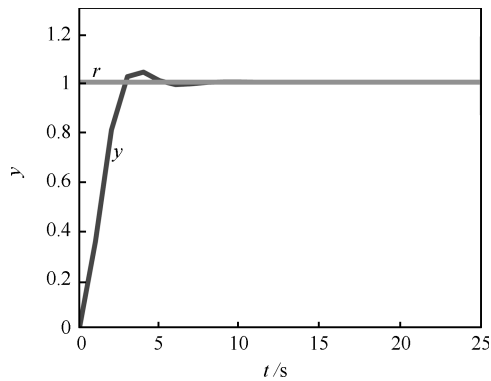


图 1 基于降阶观测器的线性自抗扰控制下的单位阶跃响应信号

Fig. 1 The unit step response signal based on LADRC with reduced order observer

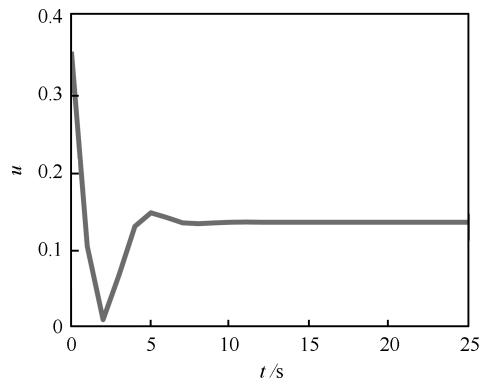


图 2 基于降阶观测器的线性自抗扰控制下的控制信号

Fig. 2 The control signal based on LADRC with reduced order observer

## 5 结论

本文主要分析了线性扩张观测器的估计能力以及线性自抗扰控制器的闭环稳定性. 证明了在系统模型未知的情况下, 可以构造出合适的线性扩张状态观测器使估计误差是有界的, 并且证明了在一定

条件下的线性自抗扰控制下的闭环系统输入输出稳定性.

## References

- Han Dong, Zhu Fang-Lai. Simultaneous estimation of states and unknown inputs for linear systems based on auxiliary outputs. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 932–943 (韩冬, 朱芳来. 基于辅助输出的线性系统状态 and 未知输入同时估计方法. *自动化学报*, 2012, **38**(6): 932–943)
- Wang Xiao-Xu, Liang Yan, Pan Quan, Zhao Chun-Hui, Li Han-Zhou. Unscented Kalman filter for nonlinear systems with colored measurement noise. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(6): 986–998 (王小旭, 梁彦, 潘泉, 赵春晖, 李汉舟. 带有有色测量噪声的非线性系统 Unscented 卡尔曼滤波器. *自动化学报*, 2012, **38**(6): 986–998)
- Han Jing-Qing. Nonlinear PID controller. *Acta Automatica Sinica*, 1994, **20**(4): 487–490 (韩京清. 非线性 PID 控制器. *自动化学报*, 1994, **20**(4): 487–490)
- Han Jing-Qing. The “extended state observer” of a class of uncertain systems. *Control and Decision*, 1995, **10**(1): 85–88 (韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器. *控制与决策*, 1995, **10**(1): 85–88)
- Han Jing-Qing. Auto-disturbances-rejection controller and it's applications. *Control and Decisions*, 1998, **13**(1): 19–23 (韩京清. 自抗扰控制器及其应用. *控制与决策*, 1998, **13**(1): 19–23)
- Han Jing-Qing, Zhang Rong. Error analysis of the second order ESO. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, **19**(4): 465–471 (韩京清, 张荣. 二阶扩张状态观测器的误差分析. *系统科学与数学*, 1999, **19**(4): 465–471)
- Han Jing-Qing. *Active Disturbance Rejection Control Technology — the Control Technology for Estimating and Compensating the Uncertainties*. Beijing: China Defensive Industry Press, 2008 (韩京清. 自抗扰控制技术 — 估计补偿不确定因素的控制技术. 北京: 国防工业出版社, 2008)
- Han J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(3): 900–906
- Gao Z Z. Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota: IEEE, 2006. 2399–2405
- Sun B S, Gao Z Q. A DSP-based active disturbance rejection control design for a 1-kW H-bridge DC-DC power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2005, **52**(5): 1271–1277
- Sun Ming-Wei, Yang Rui-Guang, Chen Zeng-Qiang. Flight active disturbance rejection control design and performance analysis. In: *Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Jinan, China: Shandong University, 2010. 765–770 (孙明玮, 杨瑞光, 陈增强. 飞行自抗扰姿态控制设计与性能分析. 第 8 届全球智能控制与自动化大会 WCICA. 济南, 中国: 山东大学, 2010. 765–770)
- Sun Ming-Wei, Jiao Gang-Ling, Yang Rui-Guang, Chen Zeng-Qiang. Active disturbance rejection drag-vs-energy profile tracking for near-space re-entry guidance. In: *Proceedings of the 29th China Control Conferences*. Beijing,

- China: Beijing Institute of Technology, 2010. 3260–3264  
(孙明玮, 焦纲领, 杨瑞光, 陈增强. 滑翔飞行器阻力-能量剖面制导的自抗扰跟踪. 第 29 届中国控制会议. 北京, 中国, 2010. 3260–3264)
- 13 Sun Ming-Wei, Jiao Gang-Ling, Yang Rui-Guang, Chen Zeng-Qiang. Application and analysis of ADRC in guidance and control in flight vehicle — some explorations with different time-scale paradigms. In: Proceedings of the 29th China Control Conferences. Beijing, China: Beijing Institute of Technology, 2010. 6167–6172  
(孙明玮, 焦纲领, 杨瑞光, 陈增强. 自抗扰控制在飞行器控制与制导上的应用与分析 — 不同时间尺度问题的摸索. 第 29 届中国控制会议. 北京, 中国, 2010. 6167–6172)
- 14 Yang Rui-Guang, Sun Ming-Wei, Chen Zeng-Qiang. ADRC-based attitude control optimization and simulation. *Journal of System Simulation*, 2010, **11**(22): 2689–2693  
(杨瑞光, 孙明玮, 陈增强. 飞行器自抗扰姿态控制优化与仿真研究. 系统仿真学报, 2010, **11**(22): 2689–2693)
- 15 Yang R G, Sun M W, Chen Z Q. Active disturbance rejection control on first-order plant. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, **22**(1): 95–102
- 16 Yang R G, Sun M W, Chen Z Q. Performance analysis of active disturbance rejection control on the first-order-plus-dead-time plant. *ICIC Express Letters*, 2011, **5**(4B): 1249–1254
- 17 Yang R G, Sun M W, Chen Z Q. Graphical design of linear active disturbance rejection controller for uncertain first-order-plus-dead-time plant. In: Proceedings of the 2011 International Conference on Modelling, Identification and Control. Shanghai, China: IEEE, 2011. 371–375
- 18 Yang Rui-Guang, Sun Ming-Wei, Chen Zeng-Qiang. Performance analysis of active disturbance rejection control for typical inertial process. In: Proceedings of the 29th China Control Conferences. Beijing, China: Beijing Institute of Technology, 2010. 3576–3580  
(杨瑞光, 孙明玮, 陈增强. 典型惯性环节的自抗扰控制性能分析. 第 29 届中国控制会议. 北京, 中国, 2010. 3576–3580)
- 19 Sun Ming-Wei, Jiao Gang-Ling, Yang Rui-Guang, Chen Zeng-Qiang. Feasible stability margin region for unstable process with PI control. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(3): 385–388  
(孙明玮, 焦纲领, 杨瑞光, 陈增强. PI 控制下开环不稳定对象可行稳定裕度范围的研究. 自动化学报, 2011, **37**(3): 385–388)



**陈增强** 南开大学教授. 主要研究方向为非线性系统建模与控制, 预测控制, 工业过程控制. 本文通信作者.

E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

**(CHEN Zeng-Qiang** Professor at Nankai University. His research interest covers nonlinear system modelling and control, predictive control, and industrial control. Corresponding author of this paper.)



**孙明玮** 南开大学副教授. 主要研究方向为飞行器制导与控制, 自抗扰控制.

E-mail: sun\_mingwei@aliyun.com

**(SUN Ming-Wei** Associate professor at Nankai University. His research interest covers guidance and control for flight aircraft and, and active disturbance rejection control (ADRC).)



**杨瑞光** 南开大学博士研究生. 主要研究方向为飞行器制导与控制, 自抗扰控制. E-mail: yang\_rui\_guang@163.com

**(YANG Rui-Guang** Ph. D. candidate at Nankai University. His research interest covers guidance and control for flight aircraft and active disturbance rejection control (ADRC).)