

具有 iISS 逆动态的非线性系统的 输出反馈调节

赵丛然¹ 解学军¹

摘 要 研究了具有积分输入状态稳定 (Integral input-to-state stability, iISS) 逆动态和未知控制方向的更一般的非线性系统的输出反馈调节问题. 利用自适应反推的方法, 所设计的输出反馈控制器使得闭环系统的输出调节到原点, 并且闭环系统的其他信号有界.

关键词 非线性系统, 积分输入状态稳定, 逆动态, 输出反馈, 未知控制方向

引用格式 赵丛然, 解学军. 具有 iISS 逆动态的非线性系统的输出反馈调节. 自动化学报, 2012, 38(5): 865–869

DOI 10.3724/SP.J.1004.2012.00865

Output-feedback Regulation of Nonlinear Systems with iISS Inverse Dynamics

ZHAO Cong-Ran¹ XIE Xue-Jun¹

Abstract This paper discusses output-feedback regulation for more general nonlinear systems with integral input-to-state stability (iISS) inverse dynamics and unknown control direction. By using the adaptive backstepping method, an output feedback controller is given to drive the output to the origin while maintaining other closed-loop signals bounded.

Key words Nonlinear systems, integral input-to-state stability (iISS), inverse dynamics, output-feedback, unknown control direction

Citation Zhao Cong-Ran, Xie Xue-Jun. Output-feedback regulation of nonlinear systems with iISS inverse dynamics. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 865–869

自从文献 [1] 引入输入状态稳定 (Input-to-state stability, ISS) 的概念以来, 这个概念就在非线性系统控制器设计和稳定性分析中扮演着重要角色. 随后, 文献 [2–5] 等研究了 ISS 的各种性质, 文献 [6–8] 及其相关文献研究了具有 ISS 逆动态非线性系统的控制器设计和稳定性分析问题. 近年来, 文献 [2] 给出了另一个重要的概念—积分输入状态稳定 (Integral ISS, iISS). 文献 [9] 研究了基于 iISS 的 Lyapunov 描述, 并证明了 iISS 要严格弱于 ISS. 之后, 文献 [10–11] 进一步讨论了 iISS 的性质, 并给出了几个含有 iISS 系统的非线性小增益定理.

据我们所知, 目前有关具有 iISS 逆动态非线性系统的控制器设计和稳定性分析问题的研究结果很少. Jiang 等在文献 [12] 中给出了具有 iISS 逆动态的下列非线性系统输出反馈控制的一个一致的框架:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad y = x_1$$

收稿日期 2010-01-04 录用日期 2011-06-22
Manuscript received January 4, 2010; accepted June 22, 2011
国家自然科学基金 (10971256), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20103705110002) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (10971256), Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20103705110002)

本文责任编辑 王伟
Recommended by Associate Editor WANG Wei
1. 曲阜师范大学自动化研究所 曲阜 273165
1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-2} \\ 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [0, \cdots, 0, 1]^T \quad (1)$$

本文将考虑具有 iISS 逆动态的更一般的非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) + g_i(\boldsymbol{\eta}, y), \quad i = 1, \cdots, n-1 \\ \dot{x}_n &= g_\infty u + f_n(\mathbf{x}) + g_n(\boldsymbol{\eta}, y) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ 分别为系统的状态、控制输入和输出. $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^q$ 代表逆动态, (x_2, \cdots, x_n) 和 $\boldsymbol{\eta}$ 是不可量测的信号, $\bar{\mathbf{x}}_i = (x_1, \cdots, x_i) \in \mathbf{R}^i$, $i = 1, \cdots, n$. 假定不确定的函数 $\mathbf{q}: \mathbf{R}^q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^q$ 和 $g_i: \mathbf{R}^q \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \cdots, n$ 是局部 Lipschitz 的, 并且高频增益 $g_\infty \neq 0$ 的符号未知. $f_i: \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \cdots, n$, 是已知光滑函数且满足下面的假设:

假设 1. $f_i(\bar{\mathbf{x}}_i)$, $i = 1, \cdots, n$, 是已知光滑函数, 满足 $f_i(\mathbf{0}) = 0$ 且 $|\frac{1}{g_\infty} f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - f_i(\bar{\boldsymbol{\xi}}_i)| \leq \rho_i |\bar{\boldsymbol{\xi}}_i - \bar{\boldsymbol{\xi}}_i|$, 其中 $\xi_i = \frac{1}{g_\infty} x_i$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i = (\xi_1, \cdots, \xi_i)$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_i = (\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_i) \in \mathbf{R}^i$, ρ_1, \cdots, ρ_n 是已知正常数.

由于 $f_i(\cdot)$ 满足比文献 [12] 更一般的假设 1, 这就使得文献 [12] 中的观测器不能用于系统 (2) 的输出反馈控制器设计. 因此, 研究系统 (2) 的控制器设计和稳定性分析是一个有意义的问题. 在最新的文献 [13] 中, Wu 等对系统 (2) 的特殊形式, 即 $f_i(\bar{\mathbf{x}}_i) = d_i x_i$, 研究了这个问题. 然而文献 [13] 的主要缺陷在于观测器增益 P 是由一个时变的 Riccati 微分方程决定的. 这不可避免地大大增加了闭环系统方程的个数和计算量. 而在本文中, 观测器增益仅通过解一个线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 即可得到, 克服了文献 [13] 的不足.

本文对满足假设 1 的更一般的系统 (2), 通过反推的方法, 给出了一个输出反馈控制器, 使得闭环系统的输出调节到原点, 并保证了其他的闭环信号有界.

1 数学预备知识

如下符号将会在全文中使用: \mathbf{R}_+ 代表所有非负实数的集合, \mathbf{R}^n 是 n 维欧氏空间. $\|\mathbf{x}\|$ 代表向量 \mathbf{x} 的欧氏范数. 为简单起见, 对在原点的任一个小邻域内的 s , 用 $\sigma_1(s) = \mathcal{O}(\sigma_2(s))$ 表示 $\sigma_1(s) \leq c\sigma_2(s)$, $c > 0$ 为一常数.

考虑非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入, 且 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是局部 Lipschitz 函数.

定义 1^[2]. 如果存在 $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta \in \mathcal{KL}$, 对于每一个初始条件 $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$ 和任一可测的局部必然有界函数 $\mathbf{u}: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^m$, 满足 $\alpha(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq \beta(\|\mathbf{x}(0)\|, t) + \int_0^t \gamma(\|\mathbf{u}(s)\|) ds$ 的解 $\mathbf{x}(t)$ 对每一个 $t > 0$ 都存在, 则称系统 (3) 是 iISS 的.

命题 1^[9]. 系统 (3) 是 iISS 当且仅当存在连续可微函数 $V(\mathbf{x})$, 称为 iISS-Lyapunov 函数, 使得对于任意的 $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(\|\mathbf{x}\|) &\leq V(\mathbf{x}) \leq \bar{\alpha}(\|\mathbf{x}\|) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq -\pi(\|\mathbf{x}\|) + \gamma(\|\mathbf{u}\|) \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\alpha, \bar{\alpha}$ 和 γ 是 \mathcal{K}_∞ 类函数, π 仅仅是正定连续函数.

命题 2^[12]. 考虑系统 (3), iISS-Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x})$ 满足式 (4), 则对任意的光滑函数 ϕ 满足 $\phi^2(s) = \mathcal{O}(\pi(s))$. 如果 π 有界, 则 $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi^2(s)}{\pi(s)} < \infty$ 成立. 那么总是存在一个正定函数 σ 和一类 \mathcal{K}_∞ 函数 φ 使 $\int_0^t \phi^2(\|\mathbf{x}(s)\|) ds \leq \sigma(\|\mathbf{x}(0)\|) + \int_0^t \varphi(\|\mathbf{u}(s)\|) ds$. 并且, 如果 γ 在式 (4) 中满足 $\gamma(s) = \mathcal{O}(s^2)$, 那么 $\varphi(s) = \mathcal{O}(s^2)$.

命题 3^[14]. 对任意的常数 $r_0 \geq 0$ 和任意的时变有界函数 $\delta(t) \in [b_{\min}, b_{\max}]$, 其中 $-\infty < b_{\min} < b_{\max} < 0$ 或者 $0 < b_{\min} < b_{\max} < \infty$, 定义 Nussbaum 函数 N_s 满足 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_0^k N_s(r) dr = -\infty$, $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_0^k N_s(r) dr = \infty$, 其中 $N_s(r) = \begin{cases} \delta(r)N_0(r), & |r| \geq r_0 \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$, $N_0(r) = \exp(r^2) \cos(0.5\pi r)$.

2 输出反馈控制器设计

2.1 假设条件

假设 2. 存在一个 iISS-Lyapunov 函数 V_0 满足 $\alpha_0(\boldsymbol{\eta}) \leq V_0(\boldsymbol{\eta}) \leq \bar{\alpha}_0(\boldsymbol{\eta})$, $\frac{\partial V_0(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y) \leq -\pi_0(\|\boldsymbol{\eta}\|) + \gamma_0(|y|)$, 其中 π_0 是一个正定连续函数, $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \gamma_0$ 是 \mathcal{K}_∞ 类函数.

假设 3. 对于每一个 $1 \leq i \leq n$, 存在未知正常数 p_{i1}, p_{i2} , 已知正半定光滑函数 ϕ_{i1} 和 ϕ_{i2} , 满足 $|g_i(\boldsymbol{\eta}, y)| \leq p_{i1}\phi_{i1}(|y|) + p_{i2}\phi_{i2}(\|\boldsymbol{\eta}\|)$.

注 1. 我们首先讨论假设 1. 在大多数非线性系统输出反馈控制的文献中, $f_i(\cdot)$ 通常以 $f_i(y)$ 的形式出现. 然而在本文中, $f_i(\cdot)$ 不仅包含输出 y , 也包含不可量测的状态变量 \mathbf{x}_i .

Wu 等考虑了更加一般的系统^[13]:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} c_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

而在本文中, 满足假设 1 的系统 (2) 包含系统:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}, y), \quad y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} c_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & c_{n-1,3} & \cdots & 1 \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, $B = [0, \dots, 0, 1]^T$, c_{ij} 代表任意的常数, 显然, 对于 $i = 1, \dots, n$, 当 $c_{ij} = 0, i \geq j$, 系统 (6) 退化为系统 (1); 当 $c_{ij} = 0, i > j$, 系统 (6) 退化为系统 (5).

并且, 假设 1 中的 $f_i(\cdot)$ 可以是一些非线性函数, 例如: $\sin x, \cos x, \ln(1+x^2)$.

注 2. 假设 2 是一个 iISS 条件, 严格弱于 ISS. 假设 3 在许多文献中是一个常用的条件.

2.2 观测器设计

对于系统 (2), 我们给出下列的观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_i &= \hat{\xi}_{i+1} + f_i(\hat{\xi}_i) - l_i \hat{\xi}_1, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{\xi}}_n &= u + f_n(\hat{\xi}_n) - l_n \hat{\xi}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中, l_1, \dots, l_n 是设计参数. 定义误差变量 $e_i = \xi_i - \hat{\xi}_i, 1 \leq i \leq n$, 由式 (2) 和式 (7), 可以得到 $\dot{e}_i = e_{i+1} - l_i e_1 + \frac{f_i(\mathbf{x}_i)}{g_\infty} - f_i(\hat{\xi}_i) + \frac{g_i(\boldsymbol{\eta}, y)}{g_\infty} + \frac{1}{g_\infty} l_i y, \dot{e}_n = -l_n e_1 + \frac{f_n(\mathbf{x}_n)}{g_\infty} - f_n(\hat{\xi}_n) + \frac{g_n(\boldsymbol{\eta}, y)}{g_\infty} + \frac{l_n y}{g_\infty}, i = 1, \dots, n-1$, 可写为

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \frac{1}{g_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y) \quad (8)$$

其中, $A = \begin{bmatrix} -\mathbf{l} & I_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}_1), f_2(\mathbf{x}_2), \dots, f_n(\mathbf{x}_n))^T$, $\hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}) = (f_1(\hat{\xi}_1), f_2(\hat{\xi}_2), \dots, f_n(\hat{\xi}_n))^T$, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y) = (\frac{g_1(\boldsymbol{\eta}, y)}{g_\infty} + \frac{l_1 y}{g_\infty}, \dots, \frac{g_n(\boldsymbol{\eta}, y)}{g_\infty} + \frac{l_n y}{g_\infty})^T$. 取

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}}{p^*}, \quad p^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{|g_\infty|}, \frac{p_{i1}}{|g_\infty|}, \frac{p_{i2}}{|g_\infty|}, p_{i2}^2 \right\} \quad (9)$$

式 (8) 变为

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{e}} + \frac{1}{p^*} \left(\frac{1}{g_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}) \right) + \frac{1}{p^*} \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y) \quad (10)$$

因此, 结合式 (2), 式 (7) 和式 (10), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{q}(\boldsymbol{\eta}, y) \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{e}} + \frac{1}{p^*} \left(\frac{1}{g_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}) \right) + \frac{1}{p^*} \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y) \\ \dot{y} &= g_\infty \hat{\xi}_2 + g_\infty p^* \bar{e}_2 + f_1(y) + g_1(\boldsymbol{\eta}, y) \\ \dot{\hat{\xi}}_i &= \hat{\xi}_{i+1} + f_i(\hat{\xi}_i) - l_i \hat{\xi}_1, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{\xi}}_n &= u + f_n(\hat{\xi}_n) - l_n \hat{\xi}_1 \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 控制器设计

下面, 我们利用反推法给出控制器的设计过程.

步骤 1. 定义第一个虚拟控制律

$$\alpha_1 = cN_0(k)\psi_1(y)y, \quad \dot{k} = \Gamma\psi_1(y)y^2 \quad (12)$$

其中, Γ, c 是两个正的设计参数且 ψ_1 是一个待设计的光滑函数, 引入一个新的中间变量 $v_2 = \hat{\xi}_3 + f_2(\hat{\xi}_2) - l_2 \hat{\xi}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial k} \Gamma\psi_1(y)y^2$, 并取 $z_1 = \hat{\xi}_2 - \alpha_1(k, y)$, 那么

$$\dot{z}_1 = v_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (g_\infty \hat{\xi}_2 + g_\infty p^* \bar{e}_2 + f_1(y) + g_1) \quad (13)$$

步骤 2. 定义 $V_1 = \frac{1}{2}y^2, V_2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z_1^2$, 由式 (11) ~ (13) 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \left(v_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (g_\infty (\alpha_1 + z_1 + p^* \bar{e}_2) + f_1 + g_1) \right) + \\ &g_\infty (cN_0\psi_1 y^2 + yz_1 + p^* \bar{e}_2 y) + (f_1 + g_1)y \end{aligned} \quad (14)$$

由 Young 不等式得:

$$g_\infty y z_1 - g_\infty \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} z_1 (\alpha_1 + z_1) \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + \left(cN_0\psi_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2}{2\psi_1} z_1^2 + g_\infty^2 y^2 \psi_1 + \\
 & \frac{|g_\infty|}{2} \left(1 + \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2\right) z_1^2 \\
 & - \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} z_1 (g_\infty p^* \bar{e}_2 + g_1 + f_1(y)) \leq \\
 & \frac{4\epsilon_2 p^* + (g_\infty p^*)^2 + 1}{4\epsilon_2} \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2 z_1^2 + \\
 & \epsilon_2 (\bar{e}_2^2 + f_1^2(y)) + \frac{g_1^2}{4p^*} \tag{15}
 \end{aligned}$$

其中, ϵ_2 是一个设计参数. 定义未知常数 θ 满足

$$\theta \geq \max \left\{ \frac{|g_\infty|}{2}, \frac{g_\infty^2}{4}, \frac{4\epsilon_2 p^* + (g_\infty p^*)^2 + 1}{4\epsilon_2} \right\} \tag{16}$$

定义 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计, 选择

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \left(g_\infty^2 y^2 \psi_1 + \epsilon_2 (\bar{e}_2^2 + f_1^2(y)) + \frac{g_1^2}{4p^*}\right) + \\
 & \quad (g_\infty p^* \bar{e}_2 + g_1 + f_1(y)) y \\
 \bar{V}_2 &= V_2 + \frac{1}{2\Gamma_\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \\
 \tau_1 &= \Gamma_\theta \left(1 + 2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2\right) z_1^2 \\
 z_2 &= \hat{\xi}_3 - \alpha_2(k, y, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\theta}) \\
 \alpha_2 &= l_2 \hat{\xi}_1 - c_1 z_1 - f_2(\hat{\xi}_2) - \frac{1 + \left(cN_0\psi_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2}{2\psi_1} z_1 + \\
 & \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial k} \Gamma \psi_1 y^2 - \hat{\theta} \left(1 + 2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\right)^2\right) z_1 \tag{17}
 \end{aligned}$$

其中, $\Gamma_\theta > 0$, $c_1 > n - 2$ 是设计参数. 结合式 (17) 和式 (18) 得, $\dot{V}_2 \leq cg_\infty N_0(k)\psi_1(y)y^2 + \Phi_1 + z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \frac{1}{\Gamma_\theta} (\hat{\theta} - \theta)(\dot{\hat{\theta}} - \tau_1)$.

步骤 i ($3 \leq i \leq n$). 为了符号的一致性, 定义 $u = \hat{\xi}_{n+1}$. 假定在第 $i - 1$ 步, 我们有:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{i-1} &\leq cg_\infty N_0(k)\psi_1(y)y^2 + \Phi_{i-2} + z_{i-2} z_{i-1} + \\
 & \quad \frac{1}{\Gamma_\theta} (\hat{\theta} - \theta - \sum_{j=1}^{i-2} \Gamma_\theta z_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}) (\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-2}) - \\
 & \quad \sum_{j=2}^{i-2} c_j z_j^2 - (c_1 - i + 3) z_1^2 \tag{19}
 \end{aligned}$$

下面证明式 (19) 对于 Lyapunov 函数 $\bar{V}_i = \bar{V}_{i-1} + \frac{1}{2} z_{i-1}^2$ 仍然成立. 注意到 $\dot{z}_{i-1} = -\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y} (g_\infty \hat{\xi}_2 + g_\infty p^* \bar{e}_2 + f_1(y) + g_1(\boldsymbol{\eta}, y)) + v_i - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}$, $v_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\xi}_j} (\hat{\xi}_{j+1} + f_j(\hat{\xi}_j) - l_j \hat{\xi}_1) + \hat{\xi}_{i+1} + f_i(\hat{\xi}_i) - l_i \hat{\xi}_1$, 下式成立:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_i &\leq \dot{V}_{i-1} + z_{i-1} \left(v_i - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y} (g_\infty(\alpha_1 + z_1) + \right. \\
 & \quad \left. g_\infty p^* \bar{e}_2 + f_1(y) + g_1(\boldsymbol{\eta}, y))\right) \tag{20}
 \end{aligned}$$

由 Young 不等式, 可得 $-z_{i-1} \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y} (g_\infty p^* \bar{e}_2 + g_1 + f_1(y)) \leq \epsilon_2 (\bar{e}_2^2 + f_1^2(y)) + \frac{4\epsilon_2 p^* + (g_\infty p^*)^2 + 1}{4\epsilon_2} \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_{i-1}^2 + \frac{1}{4p^*} g_1^2$,

$-z_{i-1} \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y} g_\infty(\alpha_1 + z_1) \leq z_1^2 + \frac{(cN_0 \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y})^2 \psi_1}{4} z_{i-1}^2 + \frac{g_\infty^2}{4} \times \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_{i-1}^2 + g_\infty^2 y^2 \psi_1$. 定义

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\xi}_j} (\hat{\xi}_{j+1} + f_j(\hat{\xi}_j) - l_j \hat{\xi}_1) - z_{i-2} - \\
 & \quad c_{i-1} z_{i-1} - f_i(\hat{\xi}_i) + l_i \hat{\xi}_1 + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial k} \Gamma \psi_1 y^2 + \\
 & \quad \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}} \tau_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} z_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}} 2\Gamma_\theta \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_{i-1} - \\
 & \quad 2\hat{\theta} \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_{i-1} - \frac{(cN_0 \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y})^2 \psi_1}{4} z_{i-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{i-1} &= \Phi_{i-2} + g_\infty^2 \psi_1(y)y^2 + \epsilon_2 (\bar{e}_2^2 + f_1^2(y)) + \frac{1}{4p^*} g_1^2 \\
 \tau_{i-1} &= \tau_{i-2} + 2\Gamma_\theta \left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2 z_{i-1}^2 \tag{21}
 \end{aligned}$$

结合式 (16) 和式 (20) 以及 $z_i = \hat{\xi}_{i+1} - \alpha_i$, 意味着 $\dot{V}_i \leq cg_\infty N_0(k)\psi_1(y)y^2 + \Phi_{i-1} + z_{i-1} z_i - \sum_{j=2}^{i-1} c_j z_j^2 + \frac{1}{\Gamma_\theta} (\hat{\theta} - \theta - \sum_{j=1}^{i-1} \Gamma_\theta z_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial\hat{\theta}}) (\dot{\hat{\theta}} - \tau_{i-1}) - (c_1 - i + 2) z_1^2$.

因此在第 n 步, 存在光滑动态输出反馈控制器

$$\dot{k} = \Gamma \psi_1(y)y^2, \quad \dot{\hat{\theta}} = \tau_{n-1}, \quad u = \alpha_n(k, y, \hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n, \hat{\theta}) \tag{22}$$

使得 $\bar{V}_n = \frac{1}{2} y^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} z_j^2 + \frac{1}{2\Gamma_\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2$ 满足

$$\dot{V}_n \leq cg_\infty N_0(k)\psi_1(y)y^2 + \Phi_{n-1} - \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 - (c_1 - n + 2) z_1^2 \tag{23}$$

3 稳定性分析

在给出闭环系统的稳定性分析之前, 我们需要如下引理.

引理 1. 存在一个已知的 $\rho = (\sum_{i=1}^n \rho_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 和一个依赖于参数 $\epsilon_2, g_\infty, p_{i1}, p_{i2}, 1 \leq i \leq n$ 的正常数 θ_0 , 满足

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p^*} \left| \frac{1}{g_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}) \right| \leq \rho |\bar{e}| \\
 & \left| \frac{1}{p^*} \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y) \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n 2(l_i |y| + \phi_{i1}(|y|))^2 + \sum_{i=1}^n 2\phi_{i2}^2(|\boldsymbol{\eta}|) \\
 & \left| \Phi_{n-1} \right| \leq n\epsilon_2 (\bar{e}_2^2 + f_1^2(y)) + (n-1)g_\infty^2 \psi_1 y^2 + \\
 & \quad \theta_0 (y^2 + \phi_{11}(|y|)|y| + \phi_{11}^2(|y|)) + n\phi_{12}^2(|\boldsymbol{\eta}|) \tag{24}
 \end{aligned}$$

证明. 由完全平方公式, $\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$ 在式 (17) 和式 (21) 中的定义, $\mathbf{F}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{F}}(\hat{\xi}), \mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y)$ 在式 (8) 下面的定义和 p^* 在式 (9) 中的表达式, 结论显然成立. \square

定理 1. 假定假设 1~3 成立且满足下面的性质:

$$\phi_{i2}^2(s) = \mathcal{O}(\pi_0(s)) \tag{25}$$

另外, 如果 π_0 有界, 则

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sup \frac{\phi_{i2}^2(s)}{\pi_0(s)} < \infty \tag{26}$$

对所有的 $1 \leq i \leq n$ 和 $\gamma_0(s) = \mathcal{O}(s^2)$ 成立. 那么通过选择式 (22) 中设计参数 ψ_1 , 可得:

1) 闭环系统 (2), (7) 和 (22) 的解有良好定义且在 $[0, \infty)$ 上有界;

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} (|\mathbf{x}(t)| + |\boldsymbol{\eta}(t)| + |u(t)|) = 0.$$

证明. 选择 Lyapunov 函数

$$V_{\bar{\mathbf{e}}} = \bar{\mathbf{e}}^T P \bar{\mathbf{e}}, \quad V_c = V_{\bar{\mathbf{e}}} + \bar{V}_n \quad (27)$$

其中, $P = P^T > 0$ 是待确定的. 由式 (10) 和式 (24), 有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\bar{\mathbf{e}}} \leq & \bar{\mathbf{e}}^T (A^T P + P A) \bar{\mathbf{e}} + \delta_1^{-1} \bar{\mathbf{e}}^T P P \bar{\mathbf{e}} + \delta_2^{-1} \bar{\mathbf{e}}^T P P \bar{\mathbf{e}} + \\ & \delta_1 \frac{1}{p^*} \left| \frac{1}{g_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{F}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \right|^2 + \delta_2 \left| \frac{\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta}, y)}{p^*} \right|^2 \leq \\ & \bar{\mathbf{e}}^T (A^T P + P A + \delta_1^{-1} P^2 + \delta_1 \rho^2 I + \delta_2^{-1} P^2) \bar{\mathbf{e}} + \\ & 2\delta_2 \sum_{i=1}^n \left((l_i |y| + \phi_{i1}(|y|))^2 + \phi_{i2}^2(|\boldsymbol{\eta}|) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

其中, δ_1, δ_2 是由式 (30) 决定的设计参数. 由式 (23), 式 (24) 和式 (28) 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_c \leq & c g_\infty N_0 \psi_1 y^2 - (c_1 - n + 2) z_1^2 + (n-1) g_\infty^2 \psi_1 y^2 + \\ & \bar{\mathbf{e}}^T (A^T P + P A + (\delta_1^{-1} + \delta_2^{-1}) P^2 + (\rho^2 \delta_1 + n \epsilon_2) I) \bar{\mathbf{e}} - \\ & \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 + \theta_0 (y^2 + \phi_{11}(|y|)|y| + \phi_{11}^2(|y|)) + \\ & 2\delta_2 \sum_{i=1}^n (l_i |y| + \phi_{i1}(|y|))^2 + 2\delta_2 \sum_{i=1}^n \phi_{i2}^2(|\boldsymbol{\eta}|) + \\ & n \epsilon_2 f_1^2(y) + n \phi_{12}^2(|\boldsymbol{\eta}|) \end{aligned} \quad (29)$$

随后, 我们将证明通过选择 $l_1, \dots, l_n, \delta_1, \delta_2, \epsilon_2$ 可以使得正定矩阵 P 满足下面的矩阵不等式:

$$A^T P + P A + (\delta_1^{-1} + \delta_2^{-1}) P^2 + (\rho^2 \delta_1 + n \epsilon_2) I \leq -Q \quad (30)$$

其中 Q 是一个给定的正定矩阵. 下面证明式 (30) 的解总是存在的. 首先, 利用

$$A^T P + P A + \delta_1^{-1} P^2 + \rho^2 \delta_1 I \leq -2Q \quad (31)$$

和文献 [15] 中的 Schur 引理, 可将式 (31) 转换为线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P \bar{A} + \bar{A}^T P + S B + B^T S^T + \rho^2 \delta_1 I + 2Q & P \\ P & -\delta_1 I \end{bmatrix} \leq 0$$

其中, $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = [-1, 0, \dots, 0]_{1 \times n}$. 结合上面的不等式, 利用 Matlab 中的 LMI 工具箱和 $\mathbf{l} = P^{-1} S$, 可以解得 P, S 和 δ_1 . 其次, 我们选择充分大的 δ_2 和充分小的 ϵ_2 使得 $\delta_2^{-1} P^2 + n \epsilon_2 I \leq Q$, 这结合式 (31) 意味着式 (30) 成立.

由式 (25), 式 (26) 和命题 2 得 $\int_0^t \phi_{i2}^2(|\boldsymbol{\eta}(s)|) ds \leq \sigma_{i0}(|\boldsymbol{\eta}(0)|) + \int_0^t \varphi_{i1}(|y(s)|) ds$, 其中 σ_{i0} 是正定函数, φ_{i1} 是 \mathcal{K}_∞ 类函数且在原点附近是二次的. 选择光滑函数 ψ_1 满足

$$\begin{aligned} \psi_1(y) y^2 \geq & \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ y^2 + \phi_{11}(|y|)|y| + \phi_{11}^2(|y|), f_1^2(y), \right. \\ & \left. (l_i |y| + \phi_{i1}(|y|))^2, \varphi_{i1}(|y|), \gamma_0(|y|) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

函数 ψ_1 总是存在的, 因为 $f_1(y), \phi_{i1}$ 是光滑的且在原点等于零, γ_0 和 φ_{i1} 在原点附近是二次的. 因此由式 (29) 和式 (32) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_c \leq & c g_\infty N_0(k) \psi_1(y) y^2 - (c_1 - n + 2) z_1^2 - \sum_{j=2}^{n-1} c_j z_j^2 + \\ & ((n-1) g_\infty^2 + n \epsilon_2 + \theta_0 + 2n \delta_2) \psi_1(y) y^2 - \\ & \bar{\mathbf{e}}^T Q \bar{\mathbf{e}} + n \phi_{12}^2(|\boldsymbol{\eta}|) + 2\delta_2 \sum_{i=1}^n \phi_{i2}^2(|\boldsymbol{\eta}|) \end{aligned} \quad (33)$$

对式 (33) 的两边积分并利用式 (12), 可得:

$$\begin{aligned} V_c(t) \leq & V_c(0) + \frac{c g_\infty}{\Gamma} \int_0^{k(t)} N_0(s) ds + d_2 k(t) + d_3 - \\ & \lambda_{\min}(Q) \int_0^t |\bar{\mathbf{e}}(s)|^2 ds - \sum_{j=2}^{n-1} c_j \int_0^t z_j^2(s) ds - \\ & (c_1 - n + 2) \int_0^t z_1^2(s) ds \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $\lambda_{\min}(Q)$ 是 Q 的最小特征值, $d_2 = \frac{1}{\Gamma} ((n-1) g_\infty^2 + n \epsilon_2 + \theta_0 + 2n \delta_2 + n + 2\delta_2 \sum_{i=1}^n l_i^2)$, $d_3 = -d_2 k(0) - \frac{c g_\infty}{\Gamma} \int_0^{k(0)} N_0(s) ds + n \sigma_{10}(|\boldsymbol{\eta}(0)|) + 2\delta_2 \sum_{i=1}^n \sigma_{i0}(|\boldsymbol{\eta}(0)|)$.

假定闭环系统的解定义在一个右最大区间 $[0, T)$ 上, $0 < T \leq \infty$. 下面我们将利用反证法证明 $k(t)$ 在 $[0, T)$ 上有界. 假定 $k(t)$ 是无界的, 因为 $\dot{k} = \Gamma \psi_1(y) y^2 \geq 0$, 因此 $k(t)$ 递增且当 $t \rightarrow T$ 时, 趋于 ∞ . 对式 (34) 的两边同时除以 $k(t)$, t 足够大 (其中 $t < T$), 有:

$$\frac{-V_c(0) - d_3}{k(t)} \leq \frac{c}{\Gamma} \frac{1}{k(t)} \int_0^{k(t)} g_\infty N_0(s) ds + d_2 \quad (35)$$

由命题 3 和 g_∞ 的有界性假设, 式 (35) 的右边收敛到 $-\infty$, 而式 (35) 得左边在 $t \rightarrow T$ 时收敛到零, 矛盾. 因此, $k(t)$ 在 $[0, T)$ 上有界. 利用式 (12), 式 (32) 和 $k(t)$ 有界, 可以得到 $\int_0^t \gamma_0(|y(s)|) ds$ 在 $[0, T)$ 上有界. 这个性质结合假设 2 意味着 $V_0(\boldsymbol{\eta}(t))$ 在 $[0, T)$ 上有界, 因此 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 也在 $[0, T)$ 上有界. 利用式 (34) 和 $k(t)$ 的有界性, 可以得到 $V_c(t)$ 在 $[0, T)$ 上有界. 由 $V_c(t)$ 在式 (27) 中的定义, 可得闭环系统的信号 $y(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ 和 $\bar{\mathbf{e}}(t)$ 在 $[0, T)$ 上也是有界的. 在反复的控制器设计的过程中, 由 $z_i(t)$ 和 $\alpha_i(t)$ 的定义, 很容易证明 $\hat{\boldsymbol{\xi}}(t), \mathbf{x}(t), u(t)$ 在 $[0, T)$ 上也有界. 因此, $T = \infty$, 结论 1) 得证.

最后, 结论 2) 可按照文献 [12] 中定理 1 的证明方法得到证明. \square

4 仿真例子

考虑下面的系统:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\frac{\eta}{1 + \eta^2} + y^2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) + p_{11} y \\ \dot{x}_2 &= g_\infty u + f_2(\bar{\mathbf{x}}_2) + p_{21} y + p_{22} \frac{\eta}{1 + \eta^2} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $f_1(x_1) = \sin x_1$, $f_2(\bar{\mathbf{x}}_2) = \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)$, p_{11}, p_{21}, p_{22} 是未知正常数. 由文献 [10] 可知, η 子系统是 iISS 而不是

ISS. 选择 $V(\eta) = \ln(1 + \eta^2)$, 易证 $\dot{V}(\eta) \leq -2\frac{\eta^2}{(1+\eta^2)^2} + y^2$. 由假设 1~3, 取 $\pi_0(|\eta|) = 2\frac{\eta^2}{(1+\eta^2)^2}$, $\gamma_0(|y|) = y^2$, $\phi_{11}(|y|) = |y|$, $\phi_{21}(|y|) = |y|$, $\phi_{22}(|\eta|) = \frac{|\eta|}{1+\eta^2}$, 且 $\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi_{22}^2(s)}{\pi(s)} < \infty$, 那么定理 1 的条件满足. 按照第 2 节中控制器的设计过程, 设计控制律如下:

$$\begin{aligned} u &= l_2 \hat{\xi}_1 - c_1 z_1 - f_2(\bar{\xi}_2) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial k} \Gamma \psi_1 y^2 - \\ &\quad \frac{1 + \left(c N_0(k) \psi_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2}{2\psi_1} z_1 - \hat{\theta} \left(1 + 2\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2\right) z_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \hat{\xi}_2 + f_1(\hat{\xi}_1) - l_1 \hat{\xi}_1, \quad \dot{\xi}_2 = u + f_2(\bar{\xi}_2) - l_2 \hat{\xi}_1 \\ \dot{k} &= \Gamma \psi_1(y) y^2, \quad \dot{\hat{\theta}} = \Gamma_\theta \left(1 + 2\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\right)^2\right) z_1^2 \end{aligned} \quad (37)$$

其中, $\alpha_1 = c N_0(k) \psi_1(y) y$, $z_1 = \hat{\xi}_2 - \alpha_1$, 且 $\Gamma > 0$, $\Gamma_\theta > 0$, $c > 0$, $c_1 > 0$.

由命题 2, 取 $\varphi_{11}(|y|) = y^2$, $\varphi_{21}(|y|) = y^2$, 因此式 (22) 中的 ψ_1 可取为 $\psi_1(y) = 3 + 2l_1^2 + 2l_2^2$. 在仿真中, 选择参数 $c = 0.01$, $c_1 = 0.01$, $l_1 = 1.4$, $l_2 = 2$, $\Gamma_\theta = 0.05$, $\tau = 0.05$, $p_{11} = 0.1$, $p_{21} = 0.5$, $p_{22} = 0.5$, $g_\infty = 10$, 初始值 $\eta(0) = -0.3$, $x_1(0) = -2$, $x_2(0) = -0.1$, $\hat{\xi}_1(0) = -0.05$, $\hat{\xi}_2(0) = -0.05$, $k(0) = 0$, $\hat{\theta}(0) = -0.9$. 图 1 给出了闭环系统 (36) 和 (37) 的响应, 这证明了控制方案的有效性.

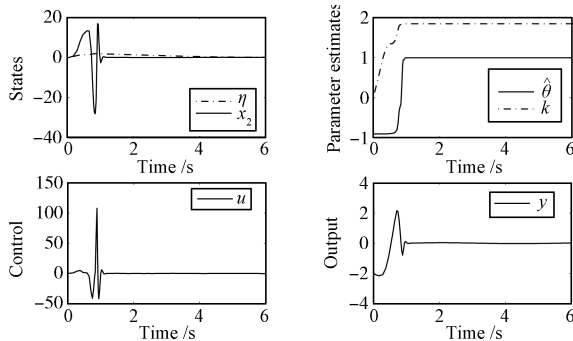


图 1 闭环系统 (36) 和 (37) 的响应

Fig.1: The responses of closed-loop systems (36) and (37)

5 结论

针对具有 iISS 逆动态和未知控制方向的更一般的非线性系统, 本文研究了它的输出反馈调节问题, 但仍存在一些问题有待研究和解决: 1) 在有未知控制方向的情况下怎样设计降阶观测器; 2) 如我们近期的工作^[16-19]中所做的, 怎样将系统 (2) 推广到具有 SiISS (Stochastic iISS) 逆动态的随机系统.

References

- 1 Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(4): 435-443
- 2 Sontag E D. Comments on integral variants of ISS. *Systems and Control Letters*, 1998, **34**(1-2): 93-100
- 3 Sontag E D, Teel A R. Changing supply functions in input-to-state stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(8): 1476-1478

- 4 Sontag E D, Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 1995, **24**(5): 351-359
- 5 Sontag E D, Wang Y. New characterizations of input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(9): 1283-1294
- 6 Jiang Z P, Mareels I M Y. A small-gain control method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(3): 292-308
- 7 Jiang Z P, Praly L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties. *Automatica*, 1998, **34**(7): 825-840
- 8 Praly L, Jiang Z P. Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics. *Systems and Control Letters*, 1993, **21**(1): 19-33
- 9 Angeli D, Sontag E D, Wang Y. A characterization of integral input-to-state stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1082-1097
- 10 Ito H, Jiang Z P. Necessary and sufficient small gain conditions for integral input-to-state stable systems: a Lyapunov perspective. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(10): 2389-2404
- 11 Ito H. A Lyapunov approach to cascade interconnection of integral input-to-state stable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(3): 702-708
- 12 Jiang Z P, Mareels I, Hill D J, Huang J. A unifying framework for global regulation via nonlinear output feedback: from ISS to iISS. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 549-562
- 13 Wu Y Q, Yu J B, Zhao Y. Further results on global asymptotic regulation control for a class of nonlinear systems with iISS inverse dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(4): 941-946
- 14 Nussbaum R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Systems and Control Letters*, 1983, **3**(5): 243-246
- 15 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994
- 16 Yu X, Xie X J. Output feedback regulation of stochastic nonlinear systems with stochastic iISS inverse dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(2): 304-320
- 17 Yu X, Xie X J, Duan N. Small-gain control method for stochastic nonlinear systems with stochastic iISS inverse dynamics. *Automatica*, 2010, **46**(11): 1790-1798
- 18 Yu X, Xie X J, Wu Y Q. Further results on output-feedback regulation of stochastic nonlinear systems with SiISS inverse dynamics. *International Journal of Control*, 2010, **83**(10): 2140-2152
- 19 Duan N, Yu X, Xie X J. Output feedback control using small-gain conditions for stochastic nonlinear systems with SiISS inverse dynamics. *International Journal of Control*, 2011, **84**(1): 47-56

赵丛然 曲阜师范大学自动化研究所硕士研究生. 主要研究方向为随机非线性控制. E-mail: conggran369@126.com

(ZHAO Cong-Ran Master student at the Institute of Automation, Qufu Normal University. Her main research interest is stochastic nonlinear control.)

解学军 曲阜师范大学自动化研究所教授. 主要研究方向为随机非线性控制. 本文通信作者. E-mail: xuejunxie@126.com

(XIE Xue-Jun Professor at the Institute of Automation, Qufu Normal University. His main research interest is stochastic nonlinear control. Corresponding author of this paper.)