

# 自治分段线性振荡系统的离散映射 数值建模与稳定性分析

戴欣<sup>1</sup> 黄席樾<sup>1</sup> 孙跃<sup>1</sup>

**摘要** 为研究自治分段线性振荡系统中出现的分叉及混沌动力学行为, 系统建模及稳定性分析是一种必不可少的分析手段. 本文通过构造周期内离散映射解析模型, 并结合边界条件的动态数值求解, 提出了一种动态离散映射数值建模方法, 进而推导了用以判定系统周期闭轨稳定性的 Jacobian 矩阵求解模型. 最后, 本文以电力电子系统中一种常用的 5 维软开关逆变自治振荡电路作为实例, 通过模型仿真观察到频率的分叉现象, 并根据 Jacobian 矩阵的特征乘数对系统的稳定性进行了研究. 基于该模型的仿真分析结果与实验系统中所观察到的现象一致, 从而验证了该方法的有效性.

**关键词** 自治分段, 离散映射建模, 频率分叉  
**中图分类号** TP17; N93

## Study on Discrete Time Mapping Modeling and Stability Analysis for Piecewise Autonomous Oscillation Systems

DAI Xin<sup>1</sup> HUANG Xi-Yue<sup>1</sup> SUN Yue<sup>1</sup>

**Abstract** System modeling and local stability analysis of equilibrium points are indispensable for analysis of bifurcation and chaos behaviors observed in piecewise autonomous oscillation system. This paper presents a novel dynamic discrete mapping modeling method and local stability criterion of equilibrium points. This modeling method sets up discrete mapping model and boundary equations in analytic form respectively. With the aid of Newton-Raphson algorithm, the boundary equations can be solved dynamically. Combining the mapping model with boundary dynamic solutions, this mapping model can fulfill the requirements of fast-scale bifurcation analysis. To verify this modeling method, an autonomous oscillation circuit used in power electronics soft switched converter is constructed. A frequency bifurcation phenomenon is captured in both simulation results and experiment system. The analysis results of this bifurcation phenomena show consistency between model simulation and experiment system.

**Key words** Autonomous piecewise, discrete mapping modeling, frequency bifurcation

## 1 引言

许多工程领域的振动系统, 如电力电子开关变换器, 含有不灵敏区或饱和区的自动控制系统, 有干摩擦阻尼的振动系统, 在经过适当简化后, 都具有一个共同的数学特征, 即在一个振动周期内系统的动力学行为通常可以由一组分段线性的微分方程来进行表示<sup>[1]</sup>, 这样的系统也称为分段线性振荡系统, 根据振荡周期及分段区间对系统状态变量的依赖性, 又可将分段线性振荡系统划分为非自治分段线性振荡系统与自治分段线性振荡系统.

在基于状态空间平均方法<sup>[2]</sup> 设计分段线性振

荡系统中, 往往会发现诸如临界运行状态突变、不明电磁或机械噪声、系统运行的频率不稳定以及无法按设计要求运行等一些奇异或不规则现象<sup>[3]</sup>. 在以往, 人们往往将这些现象归咎于外界环境噪声及人为因素影响. 但近年来的研究表明, 其中相当一部分奇异或不规则现象是系统内在分叉和混沌行为的一种外部表现. 进入混沌运动的不确定性将导致系统的运行状态无法预测和控制, 从而造成分段线性系统的性能受到极大的影响, 甚至完全无法工作<sup>[3]</sup>.

为研究这些分叉及混沌行为的内在机理, 系统建模及稳定性研究是一种必不可少的分析手段. 针对非自治分段线性振荡系统, 目前主要有三种建模方法. 第一种是由 Hamill 所提出的基于固定周期的离散映射建模方法, 也称为频闪映射模型<sup>[4]</sup>, 该建模方法能提供相对完整的动力学行为信息, 对于系统中分叉混沌行为研究具有较高的应用价值<sup>[3,5]</sup>, 通过应用该建模方法, 目前已在许多低维 (维数低于等于 3) 的非自治分段线性振荡系统中捕捉到一些由分叉导向混沌的途径, 如周期倍增分叉<sup>[6]</sup>、Hopf 分

收稿日期 2005-8-22 收修改稿日期 2006-5-17  
Received August 22, 2005; in revised form May 17, 2006  
重庆大学优秀博士论文风险基金 (2004B002) 资助  
Supported by Excellent Doctor Thesis Venture Fund of  
Chongqing University (2004B002)  
1. 重庆大学自动化学院 重庆 400044  
1. Automation College of Chongqing University, Chongqing  
400044  
DOI: 10.1360/aas-007-0072

叉<sup>[7]</sup>等. 第二种是基于时域的数值积分方法, 它通过采用精细时域积分方法来描述系统动力学行为随时间的演变过程. 但是基于这种模型的仿真计算工作量相对较大, 耗时多. 第三种是由 Middlebrook 和 Cuk 所提出的周期内的平均建模方法<sup>[8]</sup>, 它根据周期轨在各分段区域中所占比例, 通过对状态空间模型或 Fourier 级数模型进行加权平均来得到一个周期内的平均模型, 从而可利用传统线性系统理论对系统稳态行为及稳定性进行分析. 但由于该方法无法实现对系统暂态动力学行为的描述, 只能实现对一些慢尺度的分叉行为 (即分叉行为的周期远远大于系统振荡周期) 的研究, 如 Hopf 分叉现象<sup>[5]</sup>.

针对自治分段线性振荡系统, 由于系统的自治特性, 在动力学行为演变过程中, 系统的振荡周期依赖于系统状态变量, 不再如同非自治分段振荡系统的周期为一恒定值. 在此条件下, 基于固定周期的离散映射建模方法受到限制. 而系统的高维特性及复杂的边界条件求解也造成精细时域积分法的计算量过大. 因此, 对该类系统目前应用较为广泛的还是—些平均建模方法, 如广义状态空间平均法<sup>[9]</sup>等. 由于该法侧重于系统稳态行为的描述, 无法完成对于快尺度的分叉行为 (即分叉行为周期与系统振荡周期接近) 研究, 如周期倍增分叉及边界碰撞分叉行为. 此外, Poincare 映射建模法在低维 (3 维以下) 自治振荡系统中也有应用<sup>[10]</sup>. 但是 Poincare 映射建模方法通常仅适用于具有微分同胚定义的微分动力学系统, 而且对于 Poincare 截面的选取需要对相空间的几何结构有一定的了解, 通常对于 Poincare 截面的选取都是通过试错的方式进行的, 在维数大于 3 时 Poincare 截面选取显得尤为困难<sup>[11]</sup>. 因此, Poincare 映射建模方法对于高维自治线性振荡系统的建模有其局限性.

本文针对自治分段线性振荡系统, 通过构造周期内离散映射解析模型, 并结合边界条件的动态数值求解, 提出了一种动态离散映射数值建模方法, 进而推导了用以判定系统周期闭轨稳定性的 Jacobian 矩阵求解模型. 最后, 本文以电力电子系统中一种常用的 5 维软开关逆变自治电路作为实例, 通过模型仿真观察到频率的分叉现象, 并用 Jacobian 矩阵的特征乘数对系统的稳定性进行了研究. 模型仿真分析结果与实验系统中所观察到的现象一致, 从而验证了该方法的有效性.

## 2 动态离散映射数值建模方法

设有一存在周期闭轨的自治分段线性振荡系统, 维数为  $w$  ( $w > 3$ ), 周期闭轨所处的  $w$  维相空间  $V \subset R^w$  可以看作由多个  $w - 1$  维的超平面所划

分成的  $p$  个分段线性区域  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) 组成, 定义分段线性区域  $M_i$  为

**定义 1.** 一个相空间的非空子集  $M_i \subset V$  被称为分段线性区域是指在该集合中, 自治分段振荡系统总可以由一组分段线性的微分方程表示

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A_i \mathbf{x} + B_i \mathbf{E}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_{i,0} \quad \mathbf{x} \in M_i \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_w]^T$  代表的是系统状态向量,  $\mathbf{x}_{i,0} \in M_i$  表示为状态轨线在  $M_i$  上的初始状态,  $A_i$  表示的是系统在对应的分段线性区域  $M_i$  中的状态空间系数矩阵,  $B_i$  表示对应的输入系数矩阵,  $\mathbf{E}_i$  表示系统输入变量.

令周期闭轨穿过每个分段线性区域  $M_i$  的持续时间为  $\xi_i$ , 一个完整振荡周期定义为  $T_d = \sum_{i=1}^p \xi_i$ , 依据线性定常系统的运动规律表达式<sup>[12]</sup>, 在每个分段线性区域  $M_i$  中建立状态映射关系如 (2) 式所示 (其中  $i = 1, 2, \dots, p$  分别对应方程 (1) 中分段动力学行为描述)

$$f_{i,\xi_i}(\mathbf{x}) = \Phi_i(\xi_i) \mathbf{x} + \int_0^{\xi_i} \Phi_i(\xi_i - \tau) B_i \mathbf{E}_i d\tau \quad (2)$$

其中  $\Phi_i(\xi_i) = I + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} A_i^q \xi_i^q$  ( $1 \leq i \leq p$ ), 符号  $I$  代表  $w$  维单位阵. 在工程中, 由于存在能量消耗环节, 自治振荡系统通常需要外加能源用于维持系统振荡, 但作为输入的外加能源本身并非是周期性的<sup>[13]</sup>, 因此, 对于自治振荡系统, 不失一般性, 我们假设输入向量  $\mathbf{E}_i$  在每个分段区域内相对于状态变量  $\mathbf{x}$  是慢变参数, 从而可以简化 (2) 式中积分算项为

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_i} \Phi_i(\xi_i - \tau) B_i \mathbf{E}_i d\tau \\ &= \int_0^{\xi_i} \left( I + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} A_i^q (\xi_i - \tau)^q \right) d\tau B_i \mathbf{E}_i \\ &= \left[ \xi_i A_i + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)!} A_i^{(q+1)} \xi_i^{(q+1)} \right] A_i^{-1} B_i \mathbf{E}_i \quad (3) \\ &= \left[ \left( I + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} A_i^q \xi_i^q \right) - I \right] A_i^{-1} B_i \mathbf{E}_i \\ &= [\Phi_i(\xi_i) - I] A_i^{-1} B_i \mathbf{E}_i \end{aligned}$$

根据 (3) 式的简化形式, 可以把 (2) 式的积分方程转化为矩阵方程

$$\begin{aligned} f_{i,\xi_i}(\mathbf{x}) &= \Phi_i(\xi_i) \mathbf{x} + \\ & [\Phi_i(\xi_i) - I] A_i^{-1} B_i \mathbf{E}_i \quad (1 \leq i \leq p) \end{aligned} \quad (4)$$

令  $\mathbf{x}_0 \in V$  为系统初始状态,  $n = 0, 1, 2, \dots$  为离散映射的迭代指标,  $\mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1}$  为在一个振荡周期  $T_d$

下的映射初态与终态, 依据由 (4) 式所给出的每个线性区域下的映射关系, 可得振荡周期  $T_d$  下的离散映射解析模型

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= F(\mathbf{X}_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \\ &= f_{p, \xi_p} \circ f_{(p-1), \xi_{(p-1)}} \circ \dots \\ &\quad \circ f_{2, \xi_2} \circ f_{1, \xi_1}(\mathbf{X}_n) \quad (\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\circ$  代表复合映射, 为求得离散映射模型中的  $\xi_i$ , 需要对分段区域的边界条件进行求解, 但对于自治分段振荡系统, 尤其是在高维 ( $w > 3$ ) 的相空间中, 各个分段线性区域的边界条件定义通常是以超越方程 (指含有指数函数、对数函数及三角函数的方程) 形式隐式给出<sup>[14]</sup>. 定义具有一般形式的边界条件为

$$H_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \mathbf{X}_n) = 0 \quad (1 \leq i \leq p) \quad (6)$$

由超越方程给出的边界条件在一般情况下无法得到以解析形式所表述的  $\xi_i$  解. 为求得  $\xi_i$ , 可以借助于 Newton-Raphson 方法<sup>[15]</sup> 进行迭代数值求解, 选取 (6) 式中  $H_i$  函数的泰勒展开式中前二项对  $H_i$  函数进行直线拟合, 即

$$\begin{aligned} &H_i(\xi_{i(k)}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \mathbf{X}_n) + (\xi_{i(k+1)} - \xi_{i(k)}) \cdot \\ &\quad \left. \frac{\partial H_i(\xi_i, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \mathbf{X}_n)}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i = \xi_{i(k)}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $k \in Z^+$  为 Newton-Raphson 模型的迭代指标. (7) 式经变换可得到  $\xi_i$  的迭代求解模型

$$\begin{aligned} \xi_{i(k+1)} &= \xi_{i(k)} + H_i(\xi_{i(k)}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \mathbf{X}_n) \cdot \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial H_i(\xi_i, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \mathbf{X}_n)}{\partial \xi_i} \right)^{-1} \right|_{\xi_i = \xi_{i(k)}} \end{aligned} \quad (8)$$

根据振荡系统的 Floquet 理论<sup>[16]</sup>, 为分析系统周期闭轨稳定性, 需要对系统特征方程的特征乘数  $\lambda$  进行求解, 由 Floquet 定理所给出的特征方程为

$$\det(\lambda I - D_{\mathbf{X}_n} F) = 0 \quad (9)$$

式中  $D_{\mathbf{X}_n} F$  称为 Jacobian 矩阵, 它是由离散映射模型  $F$  对  $\mathbf{X}_n$  的偏导矩阵来给出的, 值得注意的是, 由式 (5) 所给出的离散映射模型  $F$  中, 持续时间  $\xi_i$  为映射函数  $F$  的变量, 并且  $\xi_i$  分别为  $\mathbf{X}_n$  和  $\xi_1 \cdots \xi_{i-1}$  的函数, 根据链导法则<sup>[17]</sup>, 该 Jacobian 矩阵的一般求解形式为

$$D_{\mathbf{X}_n} F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_n} + \sum_{i=1}^p \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{X}_n} \right) \quad (10)$$

由于  $\xi_i$  是由  $H_i$  这个隐函数所确定, 应用隐函数求导方法<sup>[17]</sup> 可得

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{X}_n} = - \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi_i} \right)^{-1} \left( \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{X}_n} \right) \quad (11)$$

在上式中, 求取算项  $\partial H_i / \partial \mathbf{X}_n$  可依据链导法则<sup>[17]</sup>, 并结合各边界条件  $H_i$  的定义 (方程 (6) 给出), 得到以下算式

$$\frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{X}_n} = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{X}_n} + \sum_{q=1}^i \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi_q} \frac{\partial \xi_q}{\partial \mathbf{X}_n} \right) \quad (12)$$

但值得注意的是, 在上式中, 方程左边的  $\partial H_i / \partial \mathbf{X}_n$  项将  $H_i$  函数中的  $\xi_1 \cdots \xi_i$  均看作  $\mathbf{X}_n$  的函数, 而方程右边的  $\partial H_i / \partial \mathbf{X}_n$  项则将  $H_i$  函数中的  $\xi_1 \cdots \xi_i$  均看作常数. 将式 (11) 与式 (12) 代入式 (10), 我们最终可以得到自治分段线性振荡系统一般形式的 Jacobian 矩阵计算形式

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{X}_n} F &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_n} - \\ &\quad \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi_i} \right)^{-1} \left( \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{X}_n} + \sum_{q=1}^{i-1} \left( \frac{\partial H_i}{\partial \xi_q} \frac{\partial \xi_q}{\partial \mathbf{X}_n} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

**定理 1.** (Floquet 定理)<sup>[16]</sup>, 如果满足方程 (9) 中所有的特征乘数  $\lambda$  的模均小于 1, 则对应于闭轨的周期解是渐近稳定的, 若有一个特征乘数的模大于 1, 则对应于闭轨的周期解是不稳定的.

依据这一判据, 我们就可以对系统在某临界状态下出现的不规则现象进行分析, 以判断其是否是分叉或混沌行为的一种表象. 以下是一个实际的自治分段线性振荡系统, 通过应用该建模方法, 我们对该系统中出现的频率分叉现象进行了研究.

### 3 自治分段振荡系统中出现的频率分叉现象研究

电力电子中的软开关逆变电路是一种典型的自治分段线性振荡系统, 它通过利用功率流的自然过零时刻来实现能量的柔性变换过程. 由于开关器件在零电压或零电流的条件下完成其导通、关断过程, 开关器件的开关损耗理论上为零, 变换器在效率不下降的前提下可工作于很高的振荡频率, 整个变换器的体积、重量都可随频率的增加而大大减小<sup>[18]</sup>. 软开关逆变电路近年来得到了广泛的应用. 但随着应用的普遍, 在系统中逐渐发现了一些不规则现象, 如运行状态突变、间歇电磁噪声、系统运行的频率不稳定以及无法按设计要求进行工作等. 本文以一个准谐振软开关全桥逆变电路作为研究对象, 该逆

变电路通常应用于电焊机逆变电源<sup>[19]</sup>及非接触电能传输系统中, 具体电路拓扑形式可参考文献 [20]. 我们曾在该电路的实验系统中观察到频率随负载变化而出现的突然跃迁现象. 以下是针对该电路应用上述离散映射建模方法的分析过程. 该电路系统是一个 5 维的自治分段振荡系统, 系统微分动力学方程如下

$$\begin{cases} \frac{di_{dc}}{dt} = -\frac{R_{dc}}{L_{dc}}i_{dc} - \frac{1}{L_{dc}}S(t)V_{C1} + \frac{1}{L_{dc}}E_{dc} \\ \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1}S(t)i_{dc} + \frac{1}{C_1}i_{L1} \\ \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{-1}{\Delta}V_{C1} - \frac{R_{L1}}{\Delta}i_{L1} + \frac{R_{L2}M}{L_2\Delta}i_{L2} + \frac{M}{L_2\Delta}V_{C2} \\ \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{\Delta'}V_{C1} + \frac{R_{L1}}{\Delta'}i_{L1} - \frac{R_{L2}L_1}{M\Delta'}i_{L2} - \frac{L_1}{M\Delta'}V_{C2} \\ \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2}i_{L2} - \frac{1}{C_2R}V_{C2} \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\Delta = (L_1L_2 - M^2)/L_2 \quad \Delta' = (L_1L_2 - M^2)/M$$

令  $\mathbf{x} = [i_{dc} V_{C1} i_{L1} V_{C2} i_{C2}]^T$  为状态变量, 系统初始状态  $\mathbf{x}_0 = [i_{dc}(0) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $i_{dc}(0)$  为初始直流电流值,  $R_{dc}$ ,  $R_{L1}$ ,  $R_{L2}$ ,  $L_{dc}$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $E_{dc}$ ,  $M$  均为可看作常量的电路参数, 而  $S(t)$  为分段函数, 分别对应着系统中两种可能的拓扑结构形式, 定义如下

$$S(t) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x} + B_1E_{dc} \\ -1 & \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x} + B_2E_{dc} \end{cases} \quad (15)$$

令  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , 并结合 (4) 式及 (5) 式, 我们可以建立系统的一个完整周期下的离散映射模型如下

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1} &= f_{2,\xi_2} \circ f_{1,\xi_1}(\mathbf{X}_n) = \\ & \Phi_2(\xi_2) \Phi_1(\xi_1) \mathbf{X}_n + (\Phi_2(\xi_2) - I) A_2^{-1} B_2 E_{dc} + \\ & \Phi_2(\xi_2) (\Phi_1(\xi_1) - I) A_1^{-1} B_1 E_{dc} \end{aligned} \quad (16)$$

其中完整周期定义为  $T_d = \sum_{i=1}^2 \xi_i$ , 根据软开关电源的运行规律<sup>[19]</sup>, 边界条件  $H_1$  及  $H_2$  是由状态变量  $V_{C1}$  在周期  $T_d$  内的两次过零来进行定义

$$H_1(\xi_i, \mathbf{X}_n) = MC \cdot f_{1,\xi_1}(\mathbf{X}_n) = 0 \quad (17)$$

$$H_2(\xi_1, \xi_2, \mathbf{X}_n) = MC \cdot f_{2,\xi_2} \circ f_{1,\xi_1}(\mathbf{X}_n) = 0 \quad (18)$$

其中  $MC = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$  为状态投影矩阵, 而 Ja-

cobain 矩阵计算式可依据 (13) 式定义

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{X}_n} F &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_n} - \\ & \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right)^{-1} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{X}_n} \right) - \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2} \right)^{-1} \frac{\partial H_2}{\partial \mathbf{X}_n} + \\ & \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1} \right) \left( \frac{\partial H_1}{\partial \xi_1} \right)^{-1} \left( \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{X}_n} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

该 Jacobian 矩阵具体算项可依据链导法则进行计算, 在此不作详细叙述.

## 4 仿真结果及其频率分叉现象分析

根据所建立的离散映射模型 (16) 式与 Jacobian 矩阵计算模型 (19) 式, 我们建立相应迭代计算算法对该系统进行了仿真, 在仿真中应用的电路参数如表 1 所示

表 1 仿真所用参数表  
Table 1 Simulation parameters table

参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
$L_1$	30.3 $\mu\text{H}$	$C_1$	2.3 $\mu\text{F}$	$R_{L1}$	0.2 $\Omega$
$L_2$	27.3 $\mu\text{H}$	$C_2$	2.4 $\mu\text{F}$	$R_{L2}$	0.1 $\Omega$
$L_{dc}$	300.0 $\mu\text{H}$	$M$	13.0 $\mu\text{H}$	$R_{dc}$	0.2 $\Omega$

在仿真中发现系统的振荡频率随着负载电阻值  $R$  的变化, 在一段区域中对系统的初始输入电压值  $E_{dc}$  呈现出极为敏感的特性, 针对具有微小差别的初始输入电压值, 在该区域中的系统的振荡频率呈现出明显的分叉特性. 仿真结果如图 1 所示. 其中 A 系统对应的输入  $E_{dc}$  为 70.1 V. 而 B 系统对应的输入  $E_{dc}$  为 70.2 V, 除此之外, A 系统与 B 系统其它参数与上述的电路参数相同.

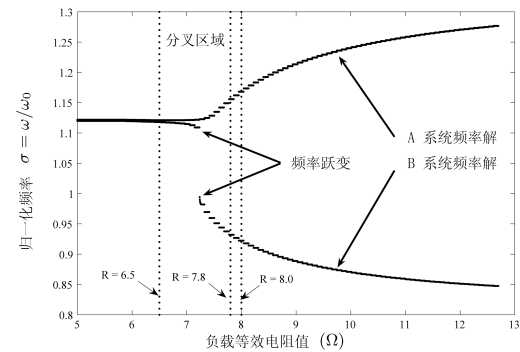


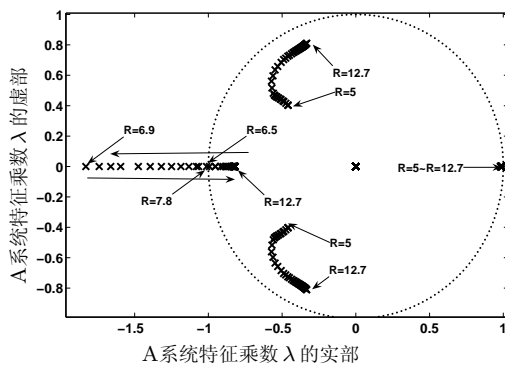
图 1 A 与 B 系统中归一化频率  $\sigma$  随着负载等效电阻值  $R$  的变化趋势

Fig. 1 Curve in A and B system of normalized frequency  $\sigma$  varied with load resistance  $R$

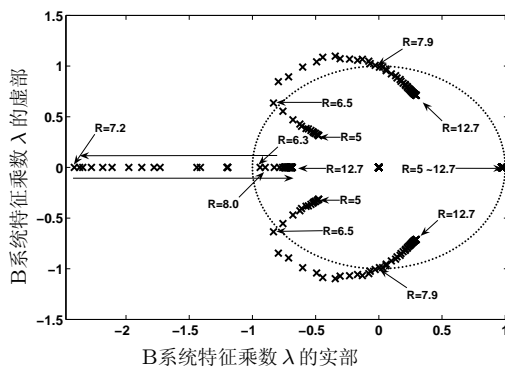
归一化频率  $\sigma$  定义为  $\sigma = \omega/\omega_0$ , 其中  $\omega =$

$2\pi/T_d$ , 而  $\omega_0$  为该软开关逆变电路的固有振荡频率, 定义为  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ .

图1是 A、B 系统振荡频率随负载等效电阻值  $R$  的变化曲线. 从图中可以看出, 在两个系统中, 随着负载电阻值  $R$  的增加, 两条频率变化曲线由重合逐渐转向相互分离, 且变化趋势出现明显的不同, 在分叉区域内, A 系统的频率变化曲线具有正的斜率, 而 B 系统的频率变化的斜率正好相反, 由 0 转向负值. 同时, 当  $R$  值增至 7.3 欧姆附近时, B 系统的振荡频率甚至出现明显的跃变现象, 由 1.1 的归一化频率跃变至 0.98. 而 A 系统当  $R$  值升至 7.5 欧姆时, 振荡频率的变化斜率由 0 突变为一正值. 当  $R$  值继续增加, A 和 B 系统的振荡频率的变化趋于平缓. 为分析该现象的内在机理, 我们根据上述 Jacobian 矩阵求解模型(由式(19)给出), 对该周期系统周期闭轨的特征乘数  $\lambda$  随  $R$  值的变化趋势进行了仿真, 仿真结果如图 2 所示.



(a) A 系统  
(System A)



(b) B 系统  
(System B)

图 2 A 与 B 系统中  $\lambda$  随  $R$  值的变化趋势图

Fig. 2  $\lambda$  varied with load  $R$  in A and B system

图 2(a) 是 A 系统的特征乘数随  $R$  值的变化趋势图, 图中  $\times$  代表特征值的位置, 而虚线所构成的单位圆则代表周期闭轨的稳定边界(依据于定理 1). 从图 2(a) 中可以看出, 在左边一个特征乘数

随着  $R$  值的增加在  $R = 6.5$  欧姆时越过单位圆, 从而表明该周期闭轨不再是渐近稳定的. 而随着  $R$  值的继续增加, 该特征乘数继续向左移动, 而当  $R$  值为 6.9 欧姆时, 特征乘数随  $R$  值的变化趋势发生改变, 由向单位圆远离转向趋近单位圆向右移动, 当  $R$  值达到 7.8 欧姆时, 该特征乘数重新回到单位圆内, 表明其对应周期闭轨又重新获得稳定性. 最后, 特征乘数随  $R$  值的增加逐渐趋向一个极限值. 而图 2(b) 是 B 系统的特征乘数随  $R$  值的变化趋势图. 在  $R$  值增至大于 6.5 欧姆时, 系统进入分叉区域, 但与图 2(a) 相比不同的是, 在分叉区域中, B 系统中有三个特征乘数穿过单位圆, 从而使 B 系统具有与 A 系统完全不同的分叉特征, 甚至出现了频率跃变现象, 而当  $R$  达到 8.0 欧姆时, 所有的特征乘数又重回到单位圆内, 系统周期闭轨重新具有稳定性. 但 A 系统与 B 系统在特征乘数重回单位圆时却分别趋于不同的稳定周期解, 这说明系统中在此时可能存在多个完全不同的周期解. 而 A 系统和 B 系统最终趋向的周期解只是其中稳定的两个. 对其它周期解个数的确定及其相应稳定性还有待进一步研究.

与图 1 相比, 图 2(a) 与图 2(b) 中 A 和 B 系统所出现的频率分叉及跃变现象正好出现在当特征乘数穿出单位圆, 进入不稳定区域的这一区间 ( $R$  值从 6.5 至 8.0 欧姆), 这一仿真结果与在实验系统中观察到出现频率跃变现象的区域一致. 以上对于该自治分段系统离散映射建模及分叉现象分析初步验证了该建模方法及稳定性分析方法的可行性.

## 5 结论

在自治分段振荡系统中, 由于系统所具有的强非线性, 传统基于状态空间平均的设计方法通常无法保证系统动态行为的局部稳定性的要求<sup>[3]</sup>. 因此在随着系统参数或状态变量变化时, 系统中有可能出现结构不稳定或多周期解的现象. 此时的系统行为将会对系统的微小扰动变得极为敏感, 容易发生拓扑结构的突变或多个周期解间的跳跃等复杂动力学行为, 这种类型的分叉也许并不具有标准类型的分叉特征, 因此在实验系统中通常被认作系统噪声干扰或其它人为因素. 为研究这些非线性行为, 本文针对自治分段振荡系统的特性, 提出了一种动态离散映射数值建模方法, 进而推导了用以判定系统周期闭轨稳定性的 Jacobian 矩阵求解模型. 该建模方法可以很好地描述系统暂态动力学行为演变, 对研究系统中快尺度的分叉行为有一定参考价值.

## References

- 1 Jin Ji-Duo, Guan Li-Zhang. Fourier series solution of forced vibration of a multi-degree-of-freedom system with piecewise-linear elastic elements. *Journal of Vibration Engi-*

- neering, 2003, **16**(3): 373~378  
(金基铎, 关立章. 多自由度不对称分段线性系统强迫振动的 Fourier 级数解法. 振动工程学报, 2003, **16**(3): 373~378)
- 2 Chen Yu-Shu. *Nonlinear Vibrations*. Beijing: Higher Education Press, 2002. 109~116  
(陈予恕. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2002. 109~116)
  - 3 Qi Qun, Li Ping, Zhang Bo. Methods for analyzing and modeling bifurcations and chaos in DC-DC converter. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2002, **22**(11): 81~86  
(齐群, 李萍, 张波. DC-DC 变换器分叉和混沌现象的建模和分析方法. 中国电机工程学报, 2002, **22**(11): 81~86)
  - 4 Hamill D C, Deane J H B, Jefferies D J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 1992, **7**(1): 25~36
  - 5 Tse C K, Bernardo M D. Complex behaviour in switching power converters. *Proceedings of IEEE*, 2002, **90**(5): 768~781
  - 6 Chan W C, Tse C K. Study of bifurcations in current-programmed DC/DC boost converters: from quasiperiodicity to period-doubling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1997, **44**(12): 1129~1142
  - 7 Ei A A, Benadero L, Toribio E, Olivar G. Hopf bifurcation and chaos from torus breakdown in a PWM voltage-controlled DC-DC boost converter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1999, **46**(11): 1374~1382
  - 8 Middlebrook R D, Cuk S. General unified approach to modeling switching-converter power stages. *International Journal of Electronics*, 1977, **42**(6): 521~550
  - 9 Sanders S R, Noworolski J M, Liu X Z, Verghese G C. Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 1991, **6**(2): 251~259
  - 10 Jalali S, Dobson I, Lasseter R H, Venkataramanan G. Switching time bifurcations in a thyristor controlled reactor. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1996, **43**(3): 209~218
  - 11 Zhang Bo, Li Zhong, Mao Zong-Yuan. The numerical algorithm of Poincare map and its application to the analysis of the chaotic phenomenon in permanent-magnet synchronous motors. *Control Theory and Applications*, 2001, **18**(5): 796~800  
(张波, 李忠, 毛宗源. Poincare 映射的数值算法及其在永磁同步电机混沌分析中的应用. 控制理论与应用, 2001, **18**(5): 796~800)
  - 12 Zhen Da-Zhong. *Linear System Theory (2nd Edition)*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. 49~50  
(郑大钟. 线性系统理论 (第2版). 北京: 清华大学出版社, 2002. 49~50)
  - 13 Huang An-Ji. *Nonlinear Vibration*. Chendu: Southwest Jiaotong University Press, 1993. 91~92  
(黄安基. 非线性振动. 成都: 西南交通大学出版社, 1993. 91~92)
  - 14 Hu A P. Selected Resonant Converters for IPT Power Supplies. [Ph.D. dissertation], University of Auckland, New Zealand, 2001, 204~205
  - 15 Steeb W H. *The Nonlinear Workbook (2nd Edition)*. Singapore: World Scientific Press, 2002. 61~62
  - 16 Chen Yu-Shu. *Bifurcation and Chaos Theory in Nonlinear Vibration Systems*. Beijing: Higher Education Press, 1993. 110~112  
(陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论. 北京: 高等教育出版社, 1993. 110~112)
  - 17 Fitzpatrick P M. *Advanced Calculus: A Course in Mathematical Analysis*. Beijing: China Machine Press. 2003. 78~79
  - 18 Zhao Hong-Ru, Wu Jie. Modeling approach and performance analysis of quasi-resonant converter. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2003, **31**(7): 1~5  
(赵红茹, 吴捷. 准谐振变换器的建模与性能分析. 华南理工大学学报(自然科学版), 2003, **31**(7): 1~5)
  - 19 Li Ai-Wen, Zhang Cheng-Hui. *Modern Inverter Technology and Applications*. Beijing: Science Press, 2000. 117~118  
(李爱文, 张承慧. 现代逆变技术及其应用. 北京: 科学出版社, 2000. 117~118)
  - 20 Sun Yue, Dai Xin, Su Yu-Gang, Du Xue-Fei. Modeling CMPS system by generalized state-space averaging method. *Journal of Power Electronics*, 2004, **38**(3): 86~88  
(孙跃, 戴欣, 苏玉刚, 杜雪飞. 广义状态空间平均法在 CMPS 系统建模中的应用. 电力电子技术, 2004, **38**(3): 86~88)

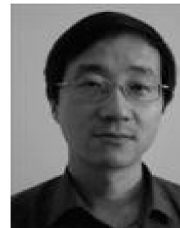


**戴欣** 重庆大学自动化学院博士研究生。2000 年获得重庆工商大学工业自动化系学士学位, 主要研究方向为电力电子开关变换系统, 非线性系统行为分析。本文通信作者。E-mail: toybear@vip.sina.com  
(**DAI Xin** Ph.D. candidate at the Automation College, Chongqing University. He received his B.S. degree from Chongqing Industry and Commerce University in 2000. His research interests include power electronics switching converter and nonlinear system analysis. Corresponding author of this paper.)



**黄席樾** 重庆大学自动化学院教授、博士生导师。1967 年获得四川大学无线电系学士学位, 1987 年获得日本东北大学博士学位。研究领域包括人工智能、知识工程与非线性系统动态行为分析。E-mail: hxy@cqu.edu.cn

(**HUANG Xi-Yue** Professor in Automation College, Chongqing University. He received his B.S. degree from Sichuan University in 1967. And he received his Ph.D. degree from North-East University in 1987. His research interests include artificial intelligence, knowledge engineering, and nonlinear system analysis.)



**孙跃** 重庆大学自动化学院教授、博士生导师。1982 年获得重庆大学电机系学士学位。1985 年获得重庆大学自动化系硕士学位, 1995 年获得重庆大学机械系博士学位。研究领域包括电力电子开关变换系统、非线性系统控制。E-mail: syue06@cqu.edu.cn

(**SUN Yue** Professor in Automation College, Chongqing University. He received his B.S., M.Sc., and Ph.D. degrees from Chongqing University in 1982, 1985 and 1995, respectively. His research interests include power electronics switching converter and nonlinear system control.)