

线性均方一致性问题的偏差估计

窦全胜^{1,2} 刘柏枫³ 厉玉蓉¹ 史忠植⁴

摘要 多智能体协同在传感网、社交网、分布式控制等诸多领域有着广泛的实际应用背景,一致性作为多智能体协同的基础,受到越来越多研究者的关注. 在实际环境中,由于设备、通信干扰等诸多原因,信息在传递过程中通常会携带噪声,本文对噪声条件下一致性问题的系统偏差进行了研究,将求解一致性协议噪声偏差问题转化成矩阵范数的积分问题,根据矩阵迹与特征值的关系,利用范数不等式及积分中值定理,给出仅与增益函数和网络结构相关的一致性协议噪声偏差上界,为一致性系统在实际应用中的噪声估计奠定了理论基础.

关键词 集群智能, 多智能体系统, 一致性协议, 均方一致

引用格式 窦全胜, 刘柏枫, 厉玉蓉, 史忠植. 线性均方一致性问题的偏差估计. 自动化学报, 2017, 43(4): 568–575

DOI 10.16383/j.aas.2017.c160064

Variance Estimation for Linear Mean Square Consensus Problem

DOU Quan-Sheng^{1,2} LIU Bai-Feng³ LI Yu-Rong¹ SHI Zhong-Zhi⁴

Abstract Multi-agent cooperation has found applications in many fields such as sensor network, social network, distributed control, etc. The consistency problem is the basis for multi-agent cooperation, and receives much attention from more and more researchers. In real circumstances, because of equipment and communication interference, the information often carries noise during the transfer process. The paper studies the system deviation of consistency problem under noise condition, and the solution of noise deviation problem under consistency protocol is transformed into the integral of matrix norm. According to the relationship of trace and eigenvalue of the matrix, and based on the norm inequation and mean value theorem of integrals, the upper bound of noise deviation under consistency protocol which is only related with gain function and network structure is given, which establishes a theoretical basis for noise evaluation of consistent systems in real application.

Key words Collective intelligence, multi-agents system, consensus protocol, mean square consensus

Citation Dou Quan-Sheng, Liu Bai-Feng, Li Yu-Rong, Shi Zhong-Zhi. Variance estimation for linear mean square consensus problem. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(4): 568–575

近年来,由于在自组织机器人、传感网、社交网、编队控制等领域有着广泛的应用,多智能体协同问题受到越来越多研究者的关注,作为多智能体协同的基础,一致性(Consensus)问题也成为该领域研

究热点之一. 在上世纪, Reynolds^[1] 就对鸟群、鱼群等生物群体行为进行了系统的研究,提出了著名的 Boid 模型,模型中每个 Agent 遵循分离性(Separation)、内聚性(Cohesion)、排列性(Alignment)等基本规则避免碰撞,并达成所有 Agent 在方向和速度上的一致,这个模型至今在编队控制研究领域依然有着重要的影响. 文献 [2] 提出了基于统计力学理论的 Vicsek 模型,在 Vicsek 模型中,分布在二维平面上的 N 个智能体运动速率保持不变,并根据其邻域内所有智能体的运动方向决定其自身运动方向,该模型比较真实地模拟了自然界中的一些生物的集群同步现象,从本质上说 Vicsek 模型是 Boid 模型的一个特例. Jadbabaie 等^[3] 利用代数图论对 Vicsek 模型进行了理论解释,并对几个与 Vicsek 模型类似模型的收敛性进行了理论分析. 在多智能体一致性问题研究中,核心问题是如何在连续或离散时间系统下,构建相应的分布式协议(Distributed protocols),使 Agent 通过局部通信最终实现状态上的一致, Olfati-Saber 等^[4–7] 以图理论和动力学理论

收稿日期 2016-01-22 录用日期 2016-05-16
Manuscript received January 22, 2016; accepted May 16, 2016
国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2013CB329502), 国家自然科学基金(61272244, 61175053, 61173173, 61035003, 61202212, 71471103) 资助

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329502) and National Natural Science Foundation of China (61272244, 61175053, 61173173, 61035003, 61202212, 71471103)

本文责任编辑 吕金虎

Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu

1. 山东工商学院计算机与技术学院 烟台 264005 2. 山东省车联网工程技术中心 烟台 264005 3. 山东工商学院数学与信息科学学院 烟台 264005 4. 中国科学院计算技术研究所 北京 100190

1. School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005 2. Shandong Vehicle Networking Engineering Technology Research Center, Yantai 264005 3. College of Mathematic and Information Science, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005 4. Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190

为基础, 针对线性一致性协议, 建立了一个相对完备的理论框架, 并在此构架的基础上对不同类型的一致性进行了系统的分析. Yu 等^[8-10] 在研究中给出了当 Agent 状态与 Agent 间传递的数据无关时, 确保一致性协议收敛到一致状态的三个充分必要条件, 并对其正确性、有效性及执行效率进行了有意义的分析, 同时通过几个具体应用对所得结论进行了说明和验证. Li^[11-15] 针对多智能体一致性和复杂网络同步问题进行了较为深入的探讨, 提出基于高阶线性系统的多智能体控制构架, 并取得一系列卓有成效的成果. Tran 等^[16] 对平均一致性问题进行了讨论, 将一致性协议视作矩阵分解问题, 提出了解决矩阵分解问题的机器学习方法. Huang 等^[17-18] 研究了当固定拓扑网络系统存在可测噪声时的一致性, 提出了达到均方一致的随机近似方法. 同样在固定拓扑结构下, Liu 等^[19] 针对线性一致性协议中的噪声和信号延迟问题进行了研究, 从理论上给出 NonLeaderFollower 和 Leader-Follower 两种模式下, 实现强一致和均方一致的充分必要条件. 文献 [20] 对线性一致性协议的噪声问题进行了研究, 给出了线性一致性协议噪声可控的充分条件. 文献 [21-22] 对领域内当前的主要研究成果进行了系统的综述与概括, 并分析了存在的问题及未来的发展趋势.

关于均方一致性的方差估计, 斯坦福大学的 Xiao 和 Boyd 及普林斯顿大学的 Lall 和 Young 等^[23] 都在这方面开展了研究工作, 通过求解关于方差极限的 Lyapunov 方程来计算方差, 但在这些研究中似乎存在一定的问题, 即在构造关于系统方差极限的 Lyapunov 方程时, 并没有讨论系统方差的极限是否存在. 事实上, 只有引入增益函数且增益函数的阶大于 $O(t^{-0.5})$ 时, 均方一致性问题的方差才存在极限^[20], 然而在引入增益函数后, 却又无法构造出有意义的 Lyapunov 方程. 针对这个问题, 本文对均方一致性问题进行了讨论, 将方差估计问题转化成求解矩阵迹范数的积分问题, 根据矩阵迹与特征值的关系, 利用范数不等式及积分中值定理, 最终给出仅与增益函数和网络结构相关的系统偏差上界. 本文第 1 节为预备知识, 对涉及的相关概念进行定义, 对相关符号进行解释和说明; 第 2 节阐述本文的核心工作, 证明相关引理, 给出定理 1, 指出线性一致性协议噪声条件下的方差上界; 第 3 节以四种不同的网络结构为例, 对定理 1 进行验证和说明; 第 4 节对本文的研究成果进行归纳和概括, 指出与本文相关的未尽问题及下一步的研究方向.

1 预备知识

引入和介绍涉及的相关概念和符号.

1.1 一致性协议 (Consensus protocol)

本文所述的多智能体一致性问题可以用无向图 $G = (V, \mathcal{E})$ 表示, 其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 为 G 的顶点集, 每个顶点被视作 Agent 的抽象, 通常用顶点的序号 i 表示顶点本身; $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ 为图 G 所有边构成的集合, 若 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则意味着 i 和 j 之间存在信息交互. 用 $N_j = \{j \in V | (i, j) \in \mathcal{E}, i \neq j\}$ 表示 i 的相邻节点集合, 与顶点 i 相邻节点的个数 d_i 称为节点 i 的度 (Degree). 设 r 为满足正态分布的随机数, $E(r)$ 和 $\text{var}(r)$ 分别表示 r 的数学期望和方差, 若 $\mathbf{R} = [r_1, \dots, r_n]^T$ 为随机向量, 则 $E(\mathbf{R}) = [E(r_1), \dots, E(r_n)]^T$, $\text{var}(\mathbf{R})$ 为该随机向量联合分布的方差矩阵.

定义 1. 连接矩阵^[4] (Adjacency matrix A). 称 $n \times n$ 阶矩阵 $A = [a_{ij}]$ 为图 G 的连接矩阵, 当且仅当

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (i, j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义 2. Laplacian 矩阵^[4] (Laplacian matrix L). 称 $n \times n$ 阶矩阵 $L = [l_{ij}]_{n \times n}$ 为图 G 的 Laplacian 矩阵, 当且仅当

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1, & \text{其他} \end{cases}$$

记 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, 显然 $L = D - A$. 设 $\lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L)$ 为 L 的特征值, 不难验证, Laplacian 矩阵 L 为对称半正定矩阵, 并具有以下性质^[4]:

性质 1. L 最小的特征值 $\lambda_1(L) = 0$;

性质 2. 若 G 是联通的, 当且仅当 $\lambda_1(L) < \lambda_2(L)$.

所谓的一致性是指: 对于 $\forall i \in V$, $x_i(t) \in \mathbf{R}$ 为 i 在 t 时刻的状态, 每个 Agent 根据相邻节点状态来决定自身状态, 并最终实现系统中所有 Agent 的状态完全一致, 即对于 $\forall i, j \in V$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0$. 通常称 Agent 的状态修订机制为一致性协议 (Consensus protocol). 称式 (1) 为线性一致性协议.

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i} (x_j(t) - x_i(t)), \quad x_i(0) \in \mathbf{R} \quad (1)$$

令 $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, 则式 (1) 可写成如下矩阵形式:

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (2)$$

线性一致性协议 (1) 和 (2) 将渐近收敛至一致状态^[4]: $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$, $x_1^* = \dots = x_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(0)$.

1.2 均方一致 (Mean square consensus)

在实际应用中, 由于设备、环境、通信干扰等诸多原因, 信息在传递过程中往往会携有噪声, 此时一致性协议 (1) 变为

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in N_i(t)} (x_j(t) + \xi_j - x_i(t)) \quad (3)$$

其中, ξ_i 为相互独立的标准高斯白噪声, $\text{var}(\xi_i) = 1$, 记 $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]$, 则 $\text{var}(\xi) = I_n$, 式 (3) 对应的矩阵形式为

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) + K\xi(t) \quad (4)$$

其中, $K = -L + D$. 不难看出 $x(t)$ 为一随机过程 (Stochastic process), 其微分形式为

$$\begin{cases} dx(t) = -Lx(t) + Kd\xi(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

定义 3. 均方一致 (Mean square consensus)^[17]. 在噪声条件下, 对于 $\forall i \in V$, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_i(t)) = x_i^*$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}(x_i(t)) < +\infty$, 则称一致性协议能够达成均方一致.

定义 4. 称标量函数 $Z(t) = \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i(t))$ 为一致性系统在 t 时刻的系统偏差.

从定义 4 不难看出, 一致性系统在 t 时刻的系统偏差, 为 t 时刻每个 Agent 状态分布方差之和, 下面我们对线性一致问题的系统偏差上界进行讨论.

2 均方一致问题的系统偏差估计

考虑式 (3) 和式 (4), 由随机过程的相关知识可以得出: $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x_i(t)) = x_i^*$, 而 $\text{var}(x_i(t)) = t$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}(x_i(t)) = +\infty$, 即系统 (3) 的方差无界, 不能达到均方一致. 在式 (3) 的右部乘以函数 $\varepsilon(t)$ 得到:

$$\dot{x}_i(t) = \varepsilon(t) \sum_{j \in N_i(t)} (x_j(t) + \xi_j - x_i(t)) \quad (6)$$

其中, $\varepsilon: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, 通常被称为增益函数 (Gain Function), 先前的研究^[19-20] 已经给出: 在一定条件下, 一致性协议 (6) 可以达到均方一致. 我们在这些研究的基础上, 进一步给出协议 (6) 系统偏差 $Z(t)$ 的上界.

引理 1. 若函数 ε 满足以下两个条件, 则协议 (6) 可达到均方一致.

- 1) $\varepsilon(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$;

2) $\int_0^{+\infty} \varepsilon(t) dt = +\infty$, 且 $\int_0^{+\infty} \varepsilon^2(t) dt < \infty$.

证明参见文献 [19].

引理 2. 设矩阵 B 为实对称矩阵, $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ 为矩阵的迹范数, 则有

$$\|e^B\|_{\text{tr}}^2 = \sum_{j=1}^k e^{2\lambda_j(B)}$$

其中, $\lambda_j(B)$, $j = 1, \dots, k$ 为矩阵 B 的非零特征值.

证明. 由迹范数的定义有

$$\|e^B\|_{\text{tr}}^2 = \text{tr}(e^B(e^B)^T) \quad (7)$$

考察 $(e^B)^T$ 可以得出:

$$\begin{aligned} (e^B)^T &= (I + B + \frac{B^2}{2} + \dots + \frac{B^n}{n!} + \dots)^T = \\ &= I + B^T + \frac{(B^T)^2}{2} + \dots + \frac{(B^T)^n}{n!} + \dots = \\ &= e^{B^T} \end{aligned}$$

由 B 为实对称矩阵, 从而有

$$\|e^B\|_{\text{tr}}^2 = \text{tr}(e^B e^{B^T}) = \text{tr}(e^{2B}) \quad (8)$$

进一步可以得到:

$$\text{tr}(e^{2B}) = \text{tr} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(2B)^i}{i!} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\text{tr}(2^i B^i)}{i!} \quad (9)$$

考察式 (9) 中的矩阵 $2^i B^i$, 若 $\lambda_j(B)$ 为矩阵 B 的一个特征值, 则不难验证 $(2\lambda_j(B))^i$ 必为 $2^i B^i$ 的特征值, 同时, 由于矩阵的迹等于其特征值的和, 综合式 (8) 和式 (9) 可以得出:

$$\begin{aligned} \|e^B\|_{\text{tr}}^2 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\text{tr}(2^i B^i)}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(2\lambda_j(B))^i}{i!} = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda_j(B))^i}{i!} = \sum_{j=1}^k e^{2\lambda_j(B)} \end{aligned}$$

□

定理 1. 若 G 为连通图, 且函数 ε 满足引理 1 中的两个条件, 则一致性协议 (6) 的系统偏差满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) \leq Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\lambda_i(L)} \quad (10)$$

其中, $\lambda_i(L)$ 为矩阵 L 所有非零特征值, $Q = \|K\|_{\text{tr}}^2$.

证明. 式 (6) 所述协议, 可写成

$$\begin{cases} dx(t) = -\varepsilon(t)Lx(t) + \varepsilon(t)Kd\xi(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (11)$$

由此可以得到:

$$x(t) = x_0^T e^{-LF(t)} + \int_0^t e^{LH(\tau)} K d\xi(\tau) \quad (12)$$

其中, $F(t) = \int_0^t \varepsilon(u) du$, $H(\tau) = F(\tau) - F(t)$, 记 $x^*(t) = x_0^T e^{-LF(t)}$, $y(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{LH(\tau)} K d\xi(\tau)$, 则式 (12) 可简写为

$$x(t) = x^*(t) + y(t) \quad (13)$$

不难看出, $x^*(t)$ 为式 (12) 的确定部分, 之前研究已经给出: 若增益函数满足引理 1 中的两个条件, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = x^*$. 而 $y(t)$ 为随机向量, 不妨设 $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$, 则 $y(t)$ 的方差矩阵:

$$\begin{aligned} \text{var}(y(t)) &= E(y(t)y^T(t)) = \\ & \begin{bmatrix} E(y_1^2) & E(y_1 y_2) & \cdots & E(y_1 y_n) \\ E(y_2 y_1) & E(y_2^2) & \cdots & E(y_2 y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(y_n y_1) & \cdots & \cdots & E(y_n^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

该矩阵对角线上的第 i 个元素 $E(y_i^2(t))$ 即为 $x_i(t)$ 的方差, 即 $\text{var}(x_i(t)) = E(y_i^2(t))$, 根据定义:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{i=1}^n \text{var}(x_i(t)) = \\ & \sum_{i=1}^n E(y_i^2(t)) = E(\|y(t)\|_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2 范数, 根据伊藤积分性质, 考察 $y(t)$ 有

$$\begin{aligned} E\|y(t)\|_2^2 &= \int_0^t \|\varepsilon(\tau) e^{LH(\tau)} K\|_{\text{tr}}^2 d\tau \leq \\ & \int_0^t \|e^{LH(\tau)}\|_{\text{tr}}^2 \|\varepsilon(\tau) K\|_{\text{tr}}^2 d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

分别考察式 (15) 中的 $\|e^{LH(\tau)}\|_{\text{tr}}^2$ 和 $\|\varepsilon(\tau) K\|_{\text{tr}}^2$, 可以得出:

$$\|\varepsilon(\tau) K\|_{\text{tr}}^2 = \varepsilon^2(\tau) \text{tr}(K K^T) = \varepsilon^2(\tau) Q \quad (16)$$

由 L 的性质可知: $\lambda_i(L) > 0, i = 2, \dots, n$, 根据引理 2, 有

$$\|e^{LH(\tau)}\|_{\text{tr}}^2 = \sum_{i=2}^n e^{2\lambda_i(LH(\tau))} = \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} \quad (17)$$

综合式 (14) ~ (17), 可以得出:

$$Z(t) \leq Q \int_0^t \varepsilon^2(\tau) \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} d\tau \quad (18)$$

注意到 $\varepsilon(\tau) = H'(\tau)$, 则式 (18) 可以写成

$$Z(t) \leq Q \int_0^t (H'(\tau))^2 \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} d\tau \quad (19)$$

由积分中值定理可知, 必 $\exists \eta \in [0, t]$, 使得

$$\begin{aligned} & \int_0^t (H'(\tau))^2 \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} d\tau = \\ & H'(\eta) \int_0^t (H'(\tau)) \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} d\tau = \\ & \varepsilon(\eta) \int_0^t \sum_{i=2}^n e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} dH(\tau) = \\ & \varepsilon(\eta) \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\lambda_i(L)} \left(e^{2H(\tau)\lambda_i(L)} \right) \Big|_0^t \end{aligned} \quad (20)$$

由式 (19) 和式 (20), 得出:

$$Z(t) \leq Q \varepsilon(\eta) \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\lambda_i(L)} (1 - e^{-2\lambda_i(L)F(t)}) \quad (21)$$

根据假设, ε 满足引理 1 中的两个条件, 则 $\max(\varepsilon(t))$ 存在, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = +\infty$, 从而由式 (21) 得出:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) \leq Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\lambda_i(L)} \quad (22)$$

□

定理 1 是本文的主要结论, 它严格地给出了线性一致性协议系统偏差 $Z(t)$ 的上界, 以下通过具体示例对定理 1 进行说明和验证.

3 示例

以图 1 所示星形、线形、环形和多邻居环形四种

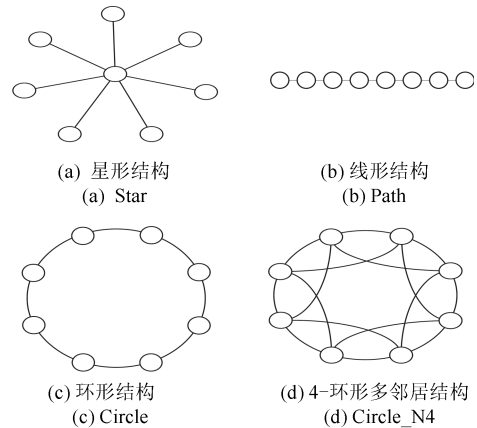


图 1 四种 Agent 网络结构示意图
Fig. 1 Diagram of four different network structures of Agent

网络结构为例,对定理 1 进行说明和验证,在四种不同的网络结构中 Agent 个数 $n = 8$,增益函数 $\varepsilon(t) = (t + 1)^{-0.6}$.

图 1 中每个圆点代表一个 Agent,每个 Agent 除邻节点个数不同外,其他结构完全一致.当 $t \in [0, +\infty)$ 时, $\max(\varepsilon(t)) = 1$,由定理 1 可以得出上述四种结构的系统偏差上界.

1) 星形结构 (Star)

若 Agent 网络为星形结构(图 1(a)),相对应的 Laplacian 矩阵为

$$L_{\text{star}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

不难计算 $Q = 14$, L_{star} 所有非零特征值如表 1 所示.

表 1 L_{star} 所有非零特征值

Table 1 All nonzero eigenvalues of L_{star}

$\lambda_i(L_{\text{star}})$						
$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	8.00

由定理 1 可以得出:

$$Z_{\text{star}}(t) \leq Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^8 \frac{1}{2\lambda_i(L_{\text{star}})} = 42.875$$

2) 线形结构 (Path)

若 Agent 网络为线形结构(图 1(b)),相对应的 Laplacian 矩阵为

$$L_{\text{path}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

此时 $Q = 14$,表 2 列出了 L_{path} 所有非零特征值.根据定理 1,可以算出

$$Z_{\text{path}}(t) \leq Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^8 \frac{1}{2\lambda_i(L_{\text{path}})} = 73.512$$

表 2 L_{path} 所有非零特征值

Table 2 All nonzero eigenvalues of L_{path}

$\lambda_i(L_{\text{path}})$						
$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
0.152	0.586	1.235	2.000	2.765	3.414	3.848

3) 环形结构 (Circle)

考察环形结构时的情形(图 1(c)),此时 Laplacian 矩阵为

$$L_{\text{circle}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

易算得 $Q = 16$, L_{circle} 所有非零特征值如表 3 所示.

表 3 L_{circle} 所有非零特征值

Table 3 All nonzero eigenvalues of L_{circle}

$\lambda_i(L_{\text{circle}})$						
$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
0.586	0.586	2.000	2.000	3.414	3.414	4.000

从而得出:

$$Z_{\text{circle}}(t) \leq Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^8 \frac{1}{2\lambda_i(L_{\text{circle}})} = 41.999$$

4) 4-邻居环形结构 (Circle_N4)

若 Agent 网络为环形结构,且每个节点有 4 个邻居(图 1(d)),此时相对应的 Laplacian 矩阵为

$$L_{\text{circle_N4}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

计算可得 $Q = 32$, $L_{\text{circle_N4}}$ 所有非零特征值由表 4 列出.

表 4 $L_{\text{circle_N4}}$ 所有非零特征值

Table 4 All nonzero eigenvalues of $L_{\text{circle_N4}}$

$\lambda_i (L_{\text{circle_N4}})$						
$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$
2.586	2.586	4.000	5.414	5.414	6.000	6.000

从而根据定理 1 得出:

$$Z_{\text{circle_N4}}(t) \leq$$

$$Q \max(\varepsilon) \sum_{i=2}^8 \frac{1}{2\lambda_i(L_{\text{circle_N4}})} = 27.619$$

为验证上面的结果, 我们按图 1 所述不同网络结构设计多 Agent 系统, 其中 Agent 结构如图 2 所示.

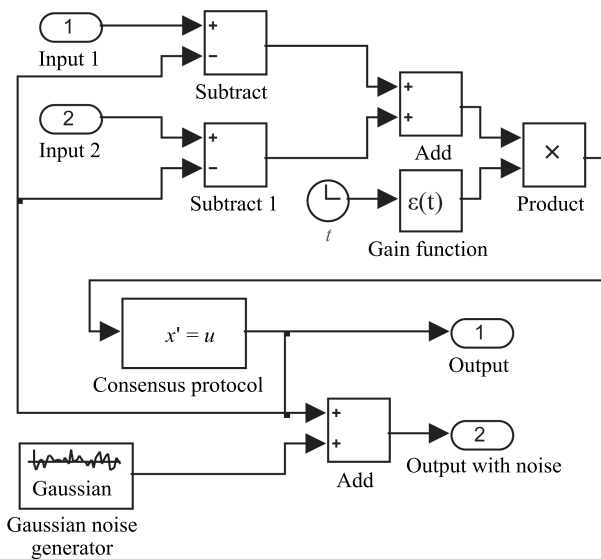


图 2 有两个邻居时 Agent 的结构

Fig. 2 Structure of Agent with two neighbors

图 2 以两个邻居的 Agent 为例, 为便于叙述, 称图 2 所示 Agent 为 i , 两个邻居分别为 j 和 k , i 通过输入 (input1 和 input2) 获得 j 和 k 含有噪声的状态信息 x_j 和 x_k , 计算 $u = \varepsilon(t) \sum_{l \in \{j,k\}} (x_l(t) - x_i(t))$, 并将其作为参数传递给协议模块 $\dot{x} = u$. 在输出 (output2) 给其他邻居的信息中, 通过 Gaussian 噪声发生器模拟信息伴有的噪声. 按照图 1 所述四种结构将 Agent 互连, 构成 4 个不同系统, 每个系统运行 50 次, 并对系统偏差 $Z(t)$ 进行统计, 相应结果和数据如图 3 和表 5 所示.

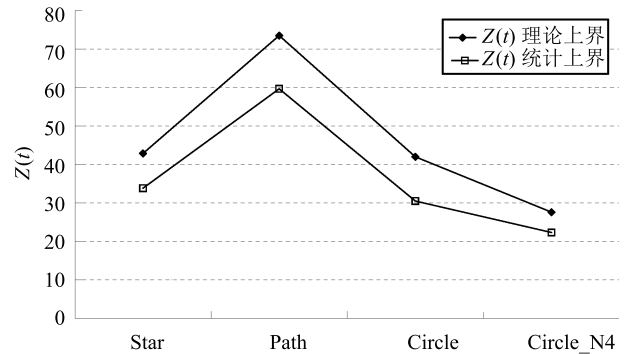


图 3 $Z(t)$ 理论上界与统计结果对比

Fig. 3 The Comparison of theoretical upper bound and statistical results of $Z(t)$

表 5 $Z(t)$ 理论上界与统计值的数据对比

Table 5 The detailed comparison of theoretical upper bound and statistical results of $Z(t)$

网络结构	Star	Path	Circle	Circle_N4
$Z(t)$ 理论上界	42.875	73.512	41.999	27.619
$Z(t)$ 统计值	33.856	59.689	30.518	22.335

从图 3 和表 5 可以看出, 系统偏差 $Z(t)$ 的统计结果严格地小于其理论上界, 从实践的角度进一步印证了定理 1 的正确性.

4 结论

一致性问题是多智能体协同的基础, 在噪声环境下, 一致性协议通常无法收敛至理想状态 x^* (无噪声干扰时收敛到的一致状态), 人们总是希望一致性协议最终能够达到均方一致, 即 Agent 的状态以 x^* 为中心, 呈正态分布, 且分布的方差是有界的. 一些研究^[19-20] 已经给出了如下结论: 当增益函数 $\varepsilon(t)$ 满足引理 1 中的两个条件或 $O(t^{-0.5}) < O(\varepsilon(t)) < O(t^{-1})$ 时, 线性一致系统能够达到均方一致, 然而这个结论只是给出了使一致性协议达到均方一致性的充分条件, 并没有对一致

性系统的偏差作定量的估计. 针对这一问题, 本文将一致性协议分解成确定部分和随机部分, 通过 Itô 积分性质, 将求解系统偏差问题转化成求解矩阵迹范数的积分问题, 根据矩阵迹与特征值的关系, 并利用范数不等式及积分中值定理, 最终给出仅与增益函数和网络结构相关的系统偏差上界, 为实际应用中一致性系统的噪声估计奠定了理论基础.

在其他条件不变, 网络含有权值时, 可分两种情况: 1) 当 Agent 输入和输出的权值相同时, L 为对称矩阵, 不难验证此时定理 1 结论依然成立; 2) 若 Agent 输入和输出的权值不等时, L 为非对称矩阵, 此时引理 2 不成立, L 的特征值可能会是复数, 因此定理 1 不适合这种情况. 初步研究表明, 此时系统偏差上界似乎与矩阵 $L + L^T$ 的特征值相关, 我们将在下一步的研究工作中给出更加完备和严格的理论结果.

References

- Reynolds C W. Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model. In: Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York, USA: ACM, 1987. 25–34
- Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(6): 1226–1229
- Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(6): 988–1001
- Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 2007, **95**(1): 215–233
- Olfati-Saber R. Evolutionary dynamics of behavior in social networks. In: Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2007. 4051–4056
- Olfati-Saber R, Jalalkamali P. Coupled distributed estimation and control for mobile sensor networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(10): 2609–2614
- Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 401–420
- Yu C H. Biologically-Inspired Control for Self-Adaptive Multiagent Systems [Ph.D. dissertation], Harvard University, USA, 2010.
- Yu C H, Nagpal R. Biologically-inspired control for multi-agent self-adaptive tasks. In: Proceedings of the 24th AAAI Conference on Artificial Intelligence. Atlanta, USA: AAAI, 2010. 1702–1707
- Yu C H, Nagpal R. A self-adaptive framework for modular robots in a dynamic environment: theory and applications. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, **30**(8): 1015–1036
- Li Z K, Duan Z S, Chen G R, Huang L. Consensus of multi-agent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2010, **57**(1): 213–224
- Li Z, Duan Z, Chen G. Dynamic consensus of linear multi-agent systems. *IET Control Theory and Applications*, 2011, **5**(1): 19–28
- Li Z K, Liu X D, Ren W, Xie L H. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(2): 518–523
- Wen G H, Duan Z S, Li Z K, Chen G R. Consensus and its L_2 -gain performance of multi-agent systems with intermittent information transmissions. *International Journal of Control*, 2012, **85**(4): 384–396
- Wen G H, Duan Z S, Li Z K, Chen G R. Flocking of multi-agent dynamical systems with intermittent nonlinear velocity measurements. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(16): 1790–1805
- Tran T M D, Kibangou A. Distributed design of finite-time average consensus protocols. In: Proceedings of the 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems. Rhine Moselle Hall, Koblenz, Germany: IFAC, 2013. 227–233
- Huang M Y, Manton J H. Coordination and consensus of networked agents with noisy measurements: stochastic algorithms and asymptotic behavior. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, **48**(1): 134–161
- Huang M Y, Manton J H. Stochastic consensus seeking with noisy and directed inter-agent communication: fixed and randomly varying topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 235–241
- Liu S, Xie L H, Zhang H S. Distributed consensus for multi-agent systems with delays and noises in transmission channels. *Automatica*, 2011, **47**(5): 920–934
- Dou Quan-Sheng, Cong Ling, Jiang Ping, Shi Zhong-Zhi. Research on discrete linear consensus algorithm with noises. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1328–1340 (窦全胜, 丛玲, 姜平, 史忠植. 离散线性一致性算法噪声问题研究. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1328–1340)
- Garin F, Schenato L. A survey on distributed estimation and control applications using linear consensus algorithms. *Networked Control Systems*. London: Springer, 2010. 75–107
- Min Hai-Bo, Liu Yuan, Wang Shi-Cheng, Sun Fu-Chun. An overview on coordination control problem of multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(10): 1557–1570 (闵海波, 刘源, 王仕成, 孙富春. 多个体协调控制问题综述. 自动化学报, 2012, **38**(10): 1557–1570)

- 23 Young G F, Scardovi L, Leonard N E. Robustness of noisy consensus dynamics with directed communication. In: Proceedings of the 2010 American Control Conference. Baltimore, MD, USA: IEEE, 2010. 6312–6317



窦全胜 博士, 山东工商学院计算机与技术学院教授. 主要研究方向为智能科学理论与方法, 数据挖掘, 多主体技术, 群体智能. 本文通信作者.

E-mail: li_dou@163.com

(**DOU Quan-Sheng** Ph.D., professor at the School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of

Business and Technology. His research interest covers intelligent scientific theory and method, data mining, multi-agent technology, and swarm intelligence. Corresponding author of this paper.)



刘柏枫 博士, 山东工商学院数学与信息科学学院副教授. 主要研究方向为随机过程, 微分方程动力系统.

E-mail: lbfg@sohu.com

(**LIU Bai-Feng** Ph.D., associate professor at the College of Mathematic and Information Science, Shandong In-

stitute of Business and Technology. His research interest covers stochastic process and differential equation dynamic system.)



厉玉蓉 博士, 山东工商学院计算机与技术学院教授. 主要研究方向为计算机代数, 计算机图形学.

E-mail: lyry@263.net

(**LI Yu-Rong** Ph.D., professor at the School of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Business and Technology. Her research

interest covers computer algebra and computer graphics.)



史忠植 中国科学院计算技术研究所研究员. 主要研究方向为智能科学理论与方法, 知识工程, 神经计算, 数据挖掘, 机器学习. E-mail: shizz@ics.ict.ac.cn

(**SHI Zhong-Zhi** Professor at the Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences. His research interest covers intelligent scientific

theory and method, knowledge engineering, neural computing, data mining, and machine learning.)