

连续 Takagi-Sugeno 模糊系统的局部 H_∞ 控制

王利魁¹ 黎冰¹ 刘娟娟¹

摘要 针对含有外部扰动的连续 Takagi-Sugeno 模糊系统, 本文给出了抑制这种扰动的局部 H_∞ 控制新方法. 首先, 应用拉格朗日极值法给出了新的界定隶属函数导数的条件, 与现有文献相比该条件有两个优点: 1) 能够将 Lyapunov 水平集必须包含在紧集 \mathbf{C} 中的要求转化为线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI); 2) 能够找出比现有文献大的稳定区域. 然后, 基于此条件得到了局部 H_∞ 控制定理. 最后通过两个仿真算例证明了该方法的有效性.

关键词 Takagi-Sugeno 模糊系统, 非平行控制律, H_∞ 性能, 线性矩阵不等式

引用格式 王利魁, 黎冰, 刘娟娟. 连续 Takagi-Sugeno 模糊系统的局部 H_∞ 控制. 自动化学报, 2013, 39(12): 2170-2176

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.02170

Local H_∞ Control for Continuous-time Takagi-Sugeno Fuzzy Model

WANG Li-Kui¹ LI Bing¹ LIU Juan-Juan¹

Abstract In this brief paper, a new local H_∞ control method is proposed to reject the disturbance for continue-time Takagi-Sugeno fuzzy model. First, some new conditions are obtained by using the Lagrange multiplier method to bound the time derivatives on the membership function. Compared with the latest results in the literature, the merits of new conditions are two points: 1) We can get some linear matrix inequalities (LMIs) to ensure the requirement that the local stabilization region should be contained in \mathbf{C} ; 2) We can find a larger stabilization region than the latest results. Then, the H_∞ control theorem is obtained based on the new conditions. In the end, two examples borrowed from the literature show the effectiveness of the conclusions.

Key words Takagi-Sugeno's fuzzy model, non-parallel distributed compensation law, H_∞ performance, linear matrix inequality (LMI)

Citation Wang Li-Kui, Li Bing, Liu Juan-Juan. Local H_∞ control for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy model. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 2170-2176

自从文献 [1] 提出 Takagi-Sugeno (TS) 模糊模型以来, 有很多学者从不同方面对这一模型进行了研究, 比如, 稳定性分析^[2-5]、观测器设计^[6]、滤波设计^[7-8]、时滞^[9-14] 等.

收稿日期 2012-12-19 录用日期 2013-05-13
Manuscript received December 19, 2012; accepted May 13, 2013
国家自然科学基金 (61104220), 江西省自然科学基金 (2010GQS0173), 江西省教育厅基金 (GJJ11170) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61104220), Natural Science Foundation of Jiangxi Province (2010GQS0173), and Scientific Research Foundation of Jiangxi Provincial Education Department (GJJ11170)
本文责任编辑 耿志勇
Recommended by Associate Editor GENG Zhi-Yong
1. 南昌航空大学数学与信息科学学院 南昌 330063
1. College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063

在研究的过程中, Lyapunov 函数的设计起着重要的作用. 最初人们使用二次 Lyapunov 函数, 为了克服二次 Lyapunov 函数带来的保守性, 设计了各种各样的 Lyapunov 函数. 比如, 分段 Lyapunov 函数^[2]、模糊 Lyapunov 函数^[15] 等. 近来, 文献 [5] 提出了非二次 Lyapunov 函数, 这种 Lyapunov 函数非常有效, 进一步, 文献 [3] 将其进行了推广. 需要注意的是模糊 Lyapunov 函数经常应用在离散模糊系统中, 但在连续模糊系统中应用不多, 主要原因是隶属函数的导数较难处理, 需要对隶属函数的变化率进行设定^[16-17], 但这种设定往往是不可以提前给出的 (尤其是涉及到状态反馈时). 与上述方法不同, 文献 [18-21] 通过应用非二次 Lyapunov 函数研究了连续 T-S 模糊系统的局部稳定或镇定. 文献 [18-21] 对隶属函数的导数进行了详细的研究, 通过将系统状态限制在某个区域内, 改变区域边界的大小得到不同的稳定或镇定区域, 但是这种方法有两个缺点: 1) 稳定或镇定的区域为 Lyapunov 水平集, 它必须包含在非线性系统能够表示为模糊系统的紧集 \mathbf{C} 内, 这种包含关系在文献 [18-21] 中只能用试凑的方法得到, 无法用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 来表示; 2) 满足稳定性条件的 Lyapunov 水平集有很多, 文献 [18-21] 无法找出最大的区域.

针对现有方法的缺点, 本文研究了连续 T-S 模糊系统的局部 H_∞ 控制, 贡献主要有两点: 1) 使用了新方法, 即拉格朗日极值法来界定 $\left| \frac{d\theta_k}{dt} \right|$, 从而能够将 Lyapunov 水平集包含在紧集 \mathbf{C} 中这一要求转化为线性矩阵不等式; 2) 能够从众多的满足条件的 Lyapunov 水平集中选出最大的区域.

在本文中, A^T 表示 A 的转置, “*” 代表对称, I 代表单位矩阵, 对于某个矩阵 $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $F_{(k)}$, $k = 1, \dots, m$ 表示矩阵 F 的第 k 行, $\text{Re}(F) = F + F^T$.

1 问题描述

考虑如下连续 T-S 模糊模型:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) + E_i \boldsymbol{\omega}(t)) = A_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}(t) + B_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{u}(t) + E_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\omega}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) C_i \mathbf{x}(t) = C_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $\boldsymbol{\omega}(t) \in \mathbf{R}^s$ 是外部扰动, $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^v$ 是可测量的输出, $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbf{R}^{v \times n}$, $E_i \in \mathbf{R}^{n \times s}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ 是已知的系统矩阵, $A_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) A_i$, $B_{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) B_i$. 通过应用扇形非线性法, 我们得到了模糊系统 (1) 和 (2), 其中, $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbf{R}^p$, $\boldsymbol{\theta}_1(t)$, $\boldsymbol{\theta}_2(t)$, \dots , $\boldsymbol{\theta}_p(t)$ 为已知的前件变量, $h_i(\boldsymbol{\theta}(t))$ 是隶属函数^[18]:

$$h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) = h_{1+i_1+i_2 \times 2 + \dots + i_p \times 2^{p-1}} = \prod_{j=1}^p w_{i_j}^j(\boldsymbol{\theta}_j),$$
$$i \in \{1, \dots, 2^p\}, i_j \in \{0, 1\}$$

其中

$$w_0^j(\cdot) = \frac{\bar{n}l_j - n l_j(\cdot)}{\bar{n}l_j - \underline{n}l_j}, w_1^j(\cdot) = 1 - w_0^j(\cdot)$$

$nl_j(\cdot) \in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j]$, $j \in \{1, \dots, p\}$ 为有界的非线性函数.

为了简便, 省略时间符号 t , 如用 \mathbf{x} 来代替 $\mathbf{x}(t)$, 单个或两个求和简写如下^[18]:

$$\begin{aligned} \Upsilon_\theta &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \Upsilon_i \\ \Upsilon_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(t)) h_j(\theta(t)) \Upsilon_{ij} \\ \Upsilon_\theta^{-1} &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \Upsilon_i \right)^{-1} \end{aligned}$$

假设在紧集 \mathbf{C} 上非线性系统可以表示为 T-S 模型. 定义

$$M = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x}^T P_\theta^{-1} \mathbf{x} \leq 1 \right\}$$

本文的目的就是设计控制律 $u(t)$ 来抵抗外部扰动并且使得满足 H_∞ 性能的区域最大.

首先参考文献 [18–19] 中关于隶属函数求导的讨论. 假设 $P_\theta = \sum_{i=1}^r h_i(\theta) P_i$, 那么

$$\begin{aligned} \frac{dP_\theta}{dt} &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^p h_j \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k}{dt} (P_{g_1(j,k)} - P_{g_2(j,k)}) = \\ &\sum_{k=1}^p \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} \frac{d\theta_k}{dt} \times (P_{g_1(\theta,k)} - P_{g_2(\theta,k)}) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P_{g_1(\theta,k)} &= \sum_{j=1}^r h_j(\theta) P_{g_1(j,k)} \\ P_{g_2(\theta,k)} &= \sum_{j=1}^r h_j(\theta) P_{g_2(j,k)} \\ g_1(j,k) &= \left\lfloor \frac{(j-1)}{2^{p+1-k}} \right\rfloor + 1 + (j-1) \bmod 2^{p-k} \\ g_2(j,k) &= g_1(j,k) + 2^{p-k} \end{aligned}$$

其中, $\lfloor \cdot \rfloor$ 是 floor 函数; \bmod 为取余函数.

因此, 关键的一步是要求 $\left| \frac{d\theta_k}{dt} \right|$ 的界. 为了界定 $\left| \frac{d\theta_k}{dt} \right|$, 假设 $\theta = L\mathbf{x}$ ($L \in \mathbf{R}^{p \times n}$, 如文献 [18] 所述, 这种假设保证了 T-S 模型的逼近性) 同时应用非平行控制律 $u = F_\theta P_\theta^{-1} \mathbf{x}$, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_k}{dt} &= \left(L \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{(k)} = L_{(k)} (A_\theta \mathbf{x} + B_\theta u + E_\theta \omega) = \\ &L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + L_{(k)} E_\theta \omega \end{aligned}$$

将 $\frac{d\theta_k}{dt}$ 代入 $\frac{dP_\theta}{dt}$, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dP_\theta}{dt} &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} (L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + L_{(k)} E_\theta \omega) \times \\ &(P_{g_1(\theta,k)} - P_{g_2(\theta,k)}) \end{aligned}$$

假设

$$\left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} (L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + L_{(k)} E_\theta \omega) \right| \leq \mu_k \quad (3)$$

因为

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} (L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + L_{(k)} E_\theta \omega) \right| \leq \\ \left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} \right| + \left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} E_\theta \omega \right| \end{aligned}$$

可知, 如果式 (4) 和 (5) 同时成立, 那么式 (3) 成立, 其中

$$\left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} \right| \leq \rho \mu_k \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} E_\theta \omega \right| \leq (1 - \rho) \mu_k \quad (5)$$

其中, $0 \leq \rho \leq 1$.

下面的引理 1 与引理 2 能够保证式 (4) 与 (5) 成立.

引理 1. 给定 λ_k, μ_k , $0 \leq \rho \leq 1$, 如果下面的线性矩阵不等式成立, 那么式 (4) 成立:

$$\Psi_{ii} > 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (6)$$

$$\frac{2}{r-1} \Psi_{ii} + \Psi_{ij} + \Psi_{ji} \geq 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, \quad i \neq j \quad (7)$$

其中

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \left(\rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right)^2 & L_{(k)} (A_j P_i + B_j F_i) \\ (A_j P_i + B_j F_i)^T L_{(k)}^T & P_i \end{bmatrix}$$

证明. 定义集合 V 如下:

$$V = \bigcap_k \left\{ \mathbf{x} : \left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} \right| \leq \rho \mu_k, \right. \\ \left. k \in \{1, \dots, p\} \right\}$$

既然 M 用来估计区域的大小, 对于任意 $\mathbf{x} \in M$, 如果 $M \subset V$, 那么式 (4) 成立. 因而, 我们需要将 $M \subset V$ 转化为线性矩阵不等式. 又因为 \mathbf{C} 与前件变量均已知, λ_k 就可计算出来 ($\left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} \right| \leq \lambda_k$), 从而

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial w_0^k}{\partial \theta_k} L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} \right| \leq \\ \lambda_k |L_{(k)} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x}| \end{aligned}$$

因此, 有下面的推导成立:

$$M \subset \bar{V} \Rightarrow M \subset V$$

其中

$$\bar{V} = \bigcap_k \left\{ \mathbf{x} : |L_{(k)} (A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta) P_\theta^{-1} \mathbf{x}| \leq \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right\}$$

下面我们只需将 $M \subset \bar{V}$ 转化为线性矩阵不等式. 为达到这一目的, 定义 $\mathbf{y} = P_\theta^{-1} \mathbf{x}$, 可得:

$$\bar{V}_1 = \bigcap_k \left\{ \mathbf{y} : |L_{(k)} (A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta) \mathbf{y}| \leq \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right\}$$

$$M_1 = \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y}^T P_\theta \mathbf{y} \leq 1 \right\}$$

因为 $P_\theta > 0$ (\mathbf{x} 到 \mathbf{y} 的映射为同构映射, 不改变集合的性质), 可得:

$$M_1 \subset \bar{V}_1 \Leftrightarrow M \subset \bar{V}$$

由集合的凸性可知, $M_1 \subset \bar{V}_1$ 意味着 M_1 必须介于 $L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)\mathbf{y} = \pm \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k}$ 之间, 也就是说, 对任意满足 $L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)\mathbf{y} = \pm \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k}$ 的 \mathbf{y} 都有 $\mathbf{y}^T P_\theta \mathbf{y} \geq 1$. 这个问题可以表示为如下的优化问题:

$$\min \left\{ \mathbf{y}^T P_\theta \mathbf{y} \mid L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)\mathbf{y} = \pm \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right\} \geq 1 \quad (8)$$

并可用拉格朗日极值法求解式 (8). 定义如下的拉格朗日函数:

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P_\theta \mathbf{y} + \alpha \left(L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)\mathbf{y} \mp \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right)$$

其中, α 为拉格朗日因子. 对拉格朗日函数求偏导可得如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = 2\mathbf{y}^T P_\theta + \alpha L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta) = 0 \\ L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)\mathbf{y} \mp \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

方程 (9) 有如下解:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mp 2\rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \frac{1}{\tau} \\ \mathbf{y}^* &= \pm \rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} P_\theta^{-1} (A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)^T L_{(k)}^T \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

其中

$$\tau = L_{(k)}(A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta) P_\theta^{-1} (A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)^T L_{(k)}^T$$

将 \mathbf{y}^* 代入式 (8), 可得:

$$(8) \Leftrightarrow \left(\rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right)^2 \geq \tau \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(\rho \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right)^2 & * \\ (A_\theta P_\theta + B_\theta F_\theta)^T L_{(k)}^T & P_\theta \end{bmatrix} \geq 0$$

□

因为实际系统不可避免地会受到外界扰动的影响, 抑制扰动是一个重要的研究方向. 扰动主要有两种: 一种是能量有界的扰动, 另外一种则是幅值有界的扰动. 本文需要对扰动进行一定的限制, 主要考虑幅值有界的扰动, 即 $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \leq \delta$, 应用相同的方法可得如下引理 2 来保证式 (5) 成立.

引理 2. 给定 λ_k, μ_k, δ ($\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \leq \delta$), $0 \leq \rho \leq 1$, 对于 $i \in \{1, \dots, r\}, k \in \{1, \dots, p\}, \zeta > 0$, 如果下面的线性矩阵不等式成立, 那么式 (5) 成立:

$$\begin{bmatrix} \zeta \delta - 2(1 - \rho) \frac{\mu_k}{\lambda_k} & L_{(k)} E_i \\ E_i^T L_{(k)}^T & -\zeta \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

证明. 对不等式 (5), 使用如下的结论:

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S X + Y^T S^{-1} Y$$

其中, $S > 0, X, Y$ 具有适当的维数, 可得:

$$2 |L_{(k)} N_\theta| \leq \frac{1}{\xi} L_{(k)} N_\theta N_\theta^T L_{(k)}^T + \xi \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}$$

其中, $\xi > 0$. 考虑扰动的幅值有界, 即 $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \leq \delta$, 可得:

$$\frac{1}{\xi} L_{(k)} N_\theta N_\theta^T L_{(k)}^T + \xi \delta \leq 2(1 - \rho) \frac{\mu_k}{\lambda_k}$$

然后对上式应用 Schur 补, 可得:

$$\begin{bmatrix} \xi \delta - 2(1 - \rho) \frac{\mu_k}{\lambda_k} & L_{(k)} N_\theta \\ N_\theta^T L_{(k)}^T & -\xi \end{bmatrix} \leq 0$$

□

2 主要结果

2.1 满足 H_∞ 性能的条件

基于引理 1 和引理 2, 可得本文的主要结果.

定理 1. 如果存在 $P_i > 0, Q_{ij}^k > 0$, 使得 (6), (7), (10) 和 (11)~(13) 成立:

$$\Upsilon_{ii} < 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (11)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} \leq 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2, \quad i \neq j \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_q^2 & l_q P_i \\ P_i l_q^T & P_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad q \in \{1, \dots, n\} \quad (13)$$

那么在非平行控制律 $u = F_\theta P_\theta^{-1} \mathbf{x}$ 的作用下, 在区域 M 中系统具有 H_∞ 性能 γ .

$$g_1(i, k) = \left\lfloor \frac{(i-1)}{2^{p+1-k}} \right\rfloor + 1 + (i-1) \bmod 2^{p-k}$$

$$g_2(i, k) = g_1(i, k) + 2^{p-k}$$

$$A_{ij} = \text{Re}(A_j P_i + B_j F_i) + E_i E_j^T + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \mu_k^2 Q_{ij}^k$$

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & * & * & \cdots & * \\ C_j P_i & -\gamma^2 I & * & \ddots & * \\ P_{g_1(i,1)} - P_{g_2(i,1)} & 0 & -2Q_{ij}^1 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ P_{g_1(i,p)} - P_{g_2(i,p)} & 0 & \cdots & 0 & -2Q_{ij}^p \end{bmatrix}$$

证明. 应用非二次 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_\theta^{-1} \mathbf{x}$ 与非平行控制律 $u = F_\theta P_\theta^{-1} \mathbf{x}$, 对非二次 Lyapunov 函数求导, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= 2\mathbf{x}^T P_\theta^{-1} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + \\ &\quad 2\mathbf{x}^T P_\theta^{-1} E_\theta \boldsymbol{\omega} + \mathbf{x}^T \frac{dP_\theta^{-1}}{dt} \mathbf{x} \end{aligned}$$

因为

$$2\mathbf{x}^T P_\theta^{-1} E_\theta \boldsymbol{\omega} \leq \frac{1}{\eta} \mathbf{x}^T P_\theta^{-1} E_\theta E_\theta^T P_\theta^{-1} \mathbf{x} + \eta \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}$$

其中, $\eta > 0$, 不失一般性设定 $\eta = 1$, 可得:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq 2\mathbf{x}^T P_\theta^{-1} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1}) \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} + \mathbf{x}^T P_\theta^{-1} E_\theta E_\theta^T P_\theta^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \frac{dP_\theta^{-1}}{dt} \mathbf{x}$$

另一方面, 对式 (11) 和 (12) 应用 Schur 补定理, 同时应用引理 1 与引理 2, 可得:

$$\operatorname{Re} (P_\theta^{-1} (A_\theta + B_\theta F_\theta P_\theta^{-1})) + \frac{dP_\theta^{-1}}{dt} + P_\theta^{-1} E_\theta E_\theta^T P_\theta^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} C_\theta^T C_\theta < 0$$

将上式代入 $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ 中, 可得:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} < -\mathbf{x}^T \frac{1}{\gamma^2} C_\theta^T C_\theta \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

对式 (14) 中的不等号两边同时积分, 可得:

$$V(\mathbf{x}(t)) - V(\mathbf{x}(0)) < -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^t \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt + \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t) dt$$

因为 $V(\mathbf{x}(0)) = 0$ 且 $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$, 可得:

$$\int_0^t \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt < \gamma^2 \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t) dt$$

需要注意的是, M 用来估计满足 H_∞ 的区域, 这个区域不可能无限大, 它必须包含在 \mathbf{C} 内. 一般情况下, \mathbf{C} 具有如下形式:

$$\mathbf{C} = \bigcap_q \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}_q| \leq \epsilon_q\}, \quad \epsilon_q \text{ 给定}$$

它可以进一步表示为

$$\mathbf{C} = \bigcap_q \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}_q| \leq \epsilon_q\} = \bigcap_q \{\mathbf{x} : |l_q \mathbf{x}| \leq \epsilon_q\}$$

其中, $l_q \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ (只有在 $(1, q)$ 位置的元素为 1, 其他的元素都为 0). 因为 $M \subset \{\cup_i \bar{M}_i\} \subset co\{\bar{M}_i\}$, $\bar{M}_i = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T P_i^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$, 由凸性可得:

$$M \subset \mathbf{C} \Leftrightarrow co\{\bar{M}_i\} \subset \mathbf{C} \Leftrightarrow \bar{M}_i \subset \mathbf{C}$$

$\bar{M}_i \subset \mathbf{C}$ 意味着对任意满足 $l_q \mathbf{x} = \pm \epsilon_q$ 的 \mathbf{x} , 都有 $\mathbf{x}^T P_i^{-1} \mathbf{x} \geq 1$. 这个问题可以表示为如下的优化问题:

$$\min \left\{ \mathbf{x}^T P_i^{-1} \mathbf{x} \mid l_q \mathbf{x} = \pm \epsilon_q \right\} \geq 1 \quad (15)$$

并且可以应用拉格朗日极值法解决. 定义如下的拉格朗日函数:

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P_i^{-1} \mathbf{x} + \alpha (l_q \mathbf{x} \mp \epsilon_q)$$

其中, α 是拉格朗日因子. 求偏导后可得如下方程:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T P_i^{-1} + \alpha l_q = 0, \quad l_q \mathbf{x} \mp \epsilon_q = 0$$

求解, 得:

$$\alpha^* = \mp 2\epsilon_q (l_q P_i l_q^T)^{-1}, \quad \mathbf{x}^* = \pm \epsilon_q P_i l_q^T (l_q P_i l_q^T)^{-1}$$

将 \mathbf{x}^* 代入式 (15), 可得:

$$(15) \Leftrightarrow \epsilon_q^2 (l_q P_i l_q^T)^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow (13)$$

因此, 式 (13) 可以保证 $M \subset \mathbf{C}$. □

注 1. 本文使用新的方法, 即拉格朗日极值法得到系统的局部镇定条件, 与现有文献 [19–20] 相比, 这种方法的优点就是能够将 $M \subset \mathbf{C}$ 转化为线性矩阵不等式, 但在文献 [19–20] 没有线性矩阵不等式来保证 $M \subset \mathbf{C}$.

2.2 选择较大的区域

当给定 μ_k 后, 满足定理 1 的 P_i 有很多, 从而导致满足 H_∞ 性能的区域很多, 如何从中选出较大的区域呢^[22]? 对于某个给定的集合 $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq 1\}$, 定义集合 $\Phi = \{\phi > 0 : \phi S \subset M\}$, 其中 $\phi S = \{\phi \mathbf{x} : \mathbf{x}^T S \mathbf{x} \leq 1\}$. 如果 $\phi \geq 1$, 那么 $S \subset M$. 于是可以通过优化 ϕ 来寻找较大的稳定区域. 因为 $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T P_z^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$, 要想保证 $\phi S \subset M$, 必须有:

$$P_z^{-1} \leq \frac{S}{\phi^2} \quad (16)$$

由 Schur 补定理, 可知式 (16) 等价如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\phi^2} S & I \\ I & P_z \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1 \quad (17)$$

由凸性可得, 式 (18) 保证了式 (17) 成立:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\phi^2} S & \mathbf{x}_j^T \\ \mathbf{x}_j & P_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (18)$$

定义 $\kappa = \frac{1}{\phi^2}$, 可以通过解决如下的优化问题 (19) 来寻找较大的稳定区域:

$$\begin{aligned} & \min_{P_i > 0, Q_{ij}^k, F_i} \kappa \\ & \text{s.t.} \quad (6), (7), (10), (11) \sim (13), (18) \end{aligned} \quad (19)$$

注 2. 在文献 [19–20] 的定理中, 正定矩阵需要满足额外的约束条件. 文献 [19] 要求满足 $\frac{\lambda_2^2 + \lambda_k^2}{2\beta_k} I < P_i$, 文献 [20] 要求满足 $c_i^2 I < P_i$, 而本文中无类似要求, 能在更大的范围内搜寻 P_i . 通过选择不同的 S 可以得到不同的稳定区域, 从下面的仿真可以看出本文的方法要比文献 [20–21] 所得稳定区域大.

3 仿真算例

例 1. (文献 [19] 中的例 4, 文献 [20] 中的例 2) 考虑如下连续 T-S 模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) + E_i \boldsymbol{\omega}(t)) = \\ & A_\theta \mathbf{x}(t) + B_\theta \mathbf{u}(t) + E_\theta \boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) C_i \mathbf{x}(t) = C_\theta \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

设前件变量 $\theta = Lx$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $h_1 = \frac{1-\sin(x_1)}{2}$, $h_2 = 1 - h_1$. 因为 $|\frac{\partial \omega_1^1}{\partial \theta_1^1}| = |\frac{\cos(x_1)}{2}| \leq \frac{1}{2}$, 所以 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. 设 $C = \{x : |x_i| \leq \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 则 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\pi}{2}$, $l_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $l_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

当 $E_1 = E_2 = 0$, 即不考虑扰动时, 设定 $\rho = \frac{1}{2}$, $S = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.26 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 40$, 使用 Matlab 中的线性矩阵不等式工具箱 Mincx 解优化问题 (19), 得到如下结果:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.4674 & -0.4112 \\ -0.4112 & 2.1374 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.4674 & -0.4263 \\ -0.4263 & 2.1790 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2.1140 & -8.3759 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -10.3135 & -8.6581 \end{bmatrix}$$

图 1 展示了不同方法所得镇定区域的比较, 从图 1 可以看出本文所得的镇定区域比文献 [19] 大. 除此之外, 图 1 中有 4 条渐近稳定的轨迹, 它们的初始点分别为

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.15 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.2 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

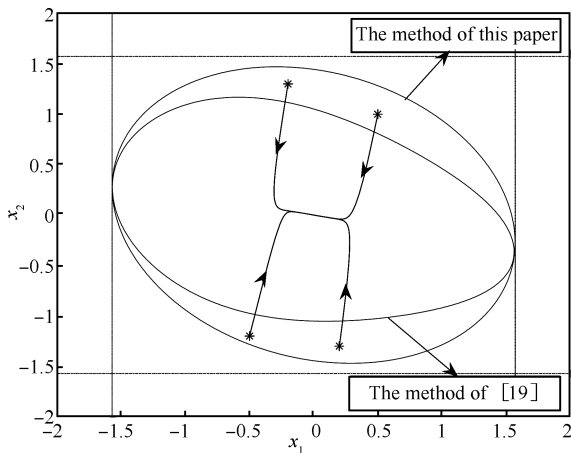


图 1 不同方法所得的镇定区域

Fig. 1 The stabilization regions obtained by different methods

值得注意的是, 这些初始点全部位于文献 [19] 所确定的区域之外, 但在本文所确定的区域之内.

设定 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 40$, 使用 Matlab 中的线性矩阵不等式工具箱 Mincx 解优化问题 (19), 得到如下结果:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.4674 & 0 \\ 0 & 2.4674 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.4674 & 0 \\ 0 & 2.4674 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2.4494 & -8.3569 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -9.4438 & -8.7656 \end{bmatrix}$$

图 2 展示了不同方法所得镇定区域的比较, 从图 2 可以看出本文所得的镇定区域比文献 [20] 大. 除此之外, 图 2 中有 4 条渐近稳定的轨迹, 它们的初始点分别为

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -0.75 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -1.25 \\ -0.75 \end{bmatrix}$$

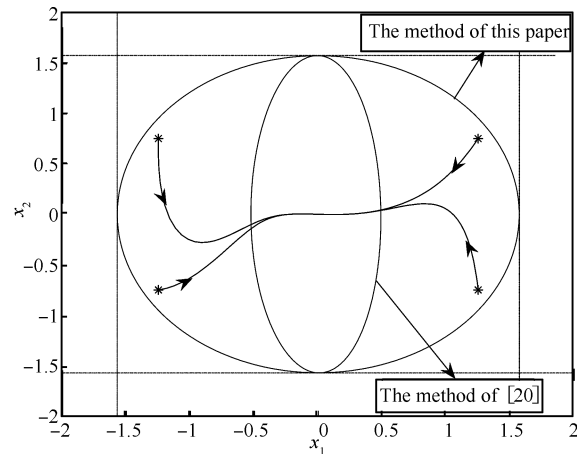


图 2 不同方法所得的镇定区域

Fig. 2 The stabilization regions obtained by different methods

值得注意的是, 这些初始点全部位于文献 [20] 所确定的区域之外, 但在本文所确定的区域之内.

当 $E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, 应用本文的定理 1 得到 $\gamma = 0.0011$ ($\mu_1 = 40$), 应用文献 [20] 的方法得到 $\gamma = 0.0013$ ($\mu = 10^{10}$, $l = 1$), 这两种方法的结果几乎相同, 但是因为文献 [20] 在处理隶属函数的导数时将 $\frac{d\theta_k}{dx} = \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)^T (A_\theta x + B_\theta u + E_\theta \omega)$ 化为 $\left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)^T (A_\theta x)$, $\left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)^T (B_\theta u)$ 和 $\left(\frac{\partial \theta_k}{\partial x}\right)^T (E_\theta \omega)$ 三部分进行分别处理, 忽略了 $A_\theta x$ 与 $B_\theta u$ 之间的联系, 导致反馈增益很大 (数量级为

10^{10}), 而本文将 $A_\theta \mathbf{x} + B_\theta \mathbf{u}$ 作为整体来处理, 因而具有较小的反馈增益 (数量级为 10^2).

例 2. 考虑如下连续 T-S 模型:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t)) (A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t))$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -20 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

设隶属函数为 $h_1 = \frac{1-\sin(\mathbf{x}_1)}{2}$, $h_2 = 1 - h_1$, 非线性系统表示为 T-S 模糊系统的区域为 $\mathbf{C} = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}_i| \leq \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 前件变量为 $\boldsymbol{\theta} = L\mathbf{x}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. 解优化问题 (19), 得到如下结果:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.4674 & 0.5102 \\ 0.5102 & 0.7490 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.3656 & 0.5011 \\ 0.5011 & 0.7389 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.7384 & -10 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 66.2832 & -10 \end{bmatrix}$$

图 3 展示了不同方法所得镇定区域的比较, 从图 3 可以看出本文所得的镇定区域比文献 [20] 大. 图 3 中有 4 条渐近稳定的轨迹, 它们的初始点全部位于文献 [20] 所确定的区域之外, 但在本文所确定的区域之内.

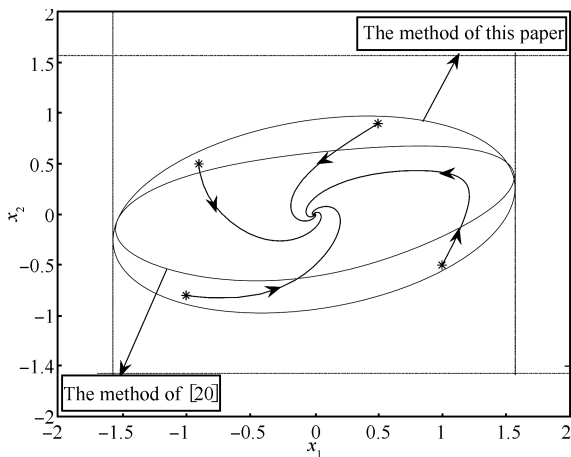


图 3 不同方法所得的镇定区域

Fig. 3 The stabilization regions obtained by different methods

4 结论

本文使用新的方法讨论了连续 T-S 模糊系统的局部 H_∞ 控制问题. 本方法有两个优点: 1) 能够将 Lyapunov 水平集包含在交集 \mathbf{C} 中这一要求转化为线性矩阵不等式; 2) 能够从众多的满足条件的 Lyapunov 水平集中选出较大的区域, 最后的仿真证明了方法的有效性.

References

- 1 Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **SMC-15**(1): 116–132
- 2 Wang W J, Chen Y J, Sun C H. Relaxed stabilization criteria for discrete-time T-S fuzzy control systems based on a switching fuzzy model and piecewise Lyapunov function. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2007, **37**(3): 551–559
- 3 Ding B C, Sun H X, Yang P. Further studies on LMI-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno’s form. *Automatica*, 2006, **42**(3): 503–508
- 4 Sala A, Ariño C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, **158**(24): 2671–2686
- 5 Guerra T M, Vermeiren L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno’s form. *Automatica*, 2004, **40**(5): 823–829
- 6 Liu X D, Zhang Q L. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 2003, **39**(9): 1571–1582
- 7 Feng G, Chen M, Sun D, Zhang T J. Approaches to robust filtering design of discrete time fuzzy dynamic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, **16**(2): 331–340
- 8 Gao H J, Zhao Y, Lam J, Chen K. H_∞ fuzzy filtering of nonlinear systems with intermittent measurements. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(2): 291–300
- 9 Lin C, Wang Q G, Lee T H, He Y, Chen B. Observer-based H_∞ fuzzy control design for T-S fuzzy systems with state delays. *Automatica*, 2008, **44**(3): 868–874
- 10 Zhao Y, Gao H J, Lam J, Du B Z. Stability and stabilization of delayed T-S fuzzy systems: a delay partitioning approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(4): 750–762
- 11 Zhao Y, Gao H J. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, **20**(1): 181–186
- 12 Gao H J, Liu X M, Lam J. Stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B, Cybernetics*, 2009, **39**(2): 306–317
- 13 Feng J, Wang S Q. Reliable fuzzy control for a class of nonlinear networked control systems with time delay. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(7): 1091–1099
- 14 Xia Z L, Li J M. Delay-dependent H_∞ control for T-S fuzzy systems based on a switching fuzzy model and piecewise Lyapunov function. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(9): 1235–1239
- 15 Wu H N, Zhang H Y. Reliable H_∞ fuzzy control for a class of discrete-time nonlinear systems using multiple fuzzy Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2007, **54**(4): 357–361

- 16 Tanaka K, Hori T, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, **11**(4): 582–589
- 17 Tognetti E S, Oliveira R C L F, Peres P L D. Selective H_2 and H_∞ stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, **19**(5): 890–900
- 18 Guerra T M, Bernal M. A way to escape from the quadratic framework. In: Proceedings of the 18th international conference on Fuzzy Systems. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009. 784–789
- 19 Pan J T, Guerra T M, Fei S M, Jaadari A. Non-quadratic stabilization of continuous T-S fuzzy models: LMI solution for a local approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, **20**(3): 594–602
- 20 Bernal M, Soto-Cota A, Cortez J, Pitarch J L. Local non-quadratic H_∞ control for continuous-time Takagi-Sugeno models. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ). Taipei, China: IEEE, 2011. 1615–1620
- 21 Bernal M, Guerra T M. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, **18**(4): 815–822
- 22 Hu T S, Lin Z L, Chen B M. An analysis and design method for linear system subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, 2002, **38**(2): 351–359

王利魁 南昌航空大学数学与信息科学学院副教授, 博士. 主要研究方向为模糊控制和滤波. 本文通信作者. E-mail: wlk0228@163.com
(**WANG Li-Kui** Ph.D., associate professor at the College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University. His research interest covers fuzzy control and filtering. Corresponding author of this paper.)

黎冰 南昌航空大学数学与信息科学学院硕士研究生. 主要研究方向为模糊集及模糊控制. E-mail: huguolin1985@163.com
(**LI Bing** Master student at the College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University. Her research interest covers fuzzy set and fuzzy control.)

刘娟娟 南昌航空大学数学与信息科学学院讲师. 主要研究方向为二维系统及模糊控制. E-mail: liujj-1202@tom.com
(**LIU Juan-Juan** Lecturer at the College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University. Her research interest covers two dimensional system and fuzzy control.)
