

## 基于有限时间系统同步的自治水下 航行器回收控制

吴泽伟<sup>1</sup> 吴晓锋<sup>1,2</sup>

**摘要** 基于主-从系统状态同步的思想,提出了母艇在平面运动中回收自治水下航行器 (Autonomous underwater vehicle, AUV) 的一种控制方法. 在给出母艇和自治水下航行器的动力学模型基础上,建立了自治水下航行器 (从系统) 接收母艇 (主系统) 的状态信息并控制自身接近母艇的主从控制方案,使母艇自主回收水下航行器的问题转化为两者的运动状态同步问题. 利用有限时间稳定性理论,设计了一种在常值海流扰动影响下,自治水下航行器能够在有限时间内被母艇回收的滑模控制器,理论证明和仿真实例证实了该控制器的有效性.

**关键词** 自治水下航行器, 回收技术, 有限时间同步, 滑模控制

**引用格式** 吴泽伟, 吴晓锋. 基于有限时间系统同步的自治水下航行器回收控制. 自动化学报, 2013, **39**(12): 2164–2169

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2013.02164

## Recovery Control for Autonomous Underwater Vehicle Based on Finite-time Synchronization of Systems

WU Ze-Wei<sup>1</sup> WU Xiao-Feng<sup>1,2</sup>

**Abstract** A control method for plane-motional host-vessel recovering an autonomous underwater vehicle is proposed based on the idea of states synchronization of master-slave systems. First, the dynamical models of both the host-vessel and the autonomous underwater vehicle are mathematically given, then a master-slave control scheme, in which the autonomous underwater vehicle (slave system) takes over the updated state information of the host-vessel (master system) and manipulates itself to approach to the host-vessel, is established such that the recovery of the autonomous underwater vehicle by the host-vessel can be equivalently studied in synchronization of both the motional states. By means of finite-time stability theory, a sliding mode controller for recovery of the autonomous underwater vehicle by the host-vessel in finite time is designed, where the disturbance of constant ocean current is considered. The validity of the designed controller is verified by means of theoretical proof and numerical simulation.

**Key words** Autonomous underwater vehicle (AUV), technique of recovery, finite-time synchronization, sliding mode control

**Citation** Wu Ze-Wei, Wu Xiao-Feng. Recovery control for autonomous underwater vehicle based on finite-time synchronization of systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 2164–2169

收稿日期 2012-10-22 录用日期 2013-04-02

Manuscript received October 22, 2012; accepted April 2, 2013

国家自然科学基金 (61074012, 11202239) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61074012, 11202239)

本文责任编辑 夏元清

Recommended by Associate Editor XIA Yuan-Qing

1. 海军工程大学电子工程学院 武汉 430033 2. 海军陆战学院 广州 510430

1. College of Electronic Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033 2. Naval Marine Academy, Guangzhou 510430

自治水下航行器 (Autonomous underwater vehicle, AUV) 是一种可广泛应用于民事和军事领域的水下无人平台<sup>[1-2]</sup>. AUV 在完成任务后, 需要由母艇回收以进行能量补充、维护保养和任务鉴定等工作. 如何适时完成对 AUV 的回收, 是 AUV 必须解决的关键技术之一.

母艇回收 AUV 的方法有起吊回收、对接器回收和自主回收等<sup>[3]</sup>. 起吊回收是指在 AUV 浮出水面后, 由人操纵母艇接近 AUV, 并利用母艇上装载的吊车等辅助设备将 AUV 吊回母艇的一种回收方式. 对接器回收是指母艇先施放专门的对接装置与 AUV 对接, 然后, 再由母艇起吊设备将 AUV 吊回母艇. 显然, 以上两种回收方式都需要大量的人力和专用装备, 回收过程受海况的影响较大. 自主回收则是通过 AUV 与母艇的相互协同, 由 AUV 自主进入母艇回收装置的一种回收方式. 相对而言, 母艇自主回收 AUV 的过程较为简便, 是一种有发展前景的 AUV 回收方式.

母艇自主回收 AUV 需要解决一系列技术难题, 比如, 母艇自身的稳定控制、AUV 与母艇的协同控制等. 已有一些文献研究了单个有人或无人水下航行器的稳定控制问题, 提出了 PID 控制、自适应控制、反步控制等相关控制方法<sup>[4-6]</sup>. 文献 [3] 对母艇或回收器自主回收 AUV 的相关概念进行了分析, 并提出了一些有前景的回收方式. 文献 [7] 则研究了一类水下固定式回收器对 AUV 自主回收问题, 通过将回收过程分解成回坞和入坞两个阶段, 分析了各阶段的视线导引及跟踪控制方法. 但在许多情况下, 母艇为了执行任务或保持本艇稳定性, 在回收 AUV 时需要保持运动状态.

AUV 及其母艇在水中的动力学运动过程都可以用 Euler-Lagrange 方程来表达<sup>[8]</sup>. 最近, 已有一些文献研究了多 Euler-Lagrange 系统的同步控制问题<sup>[9-13]</sup>. 文献 [10] 采用无源反馈控制方法研究了多 Euler-Lagrange 系统的坐标 (包括位置坐标和姿态坐标) 同步问题. 文献 [11] 运用 Matrosov 理论, 给出了分布式 (无主系统) 多 Euler-Lagrange 系统的同步控制算法, 实现了各 Euler-Lagrange 系统的坐标同步并且速度均趋向于零. 但许多实际问题往往要求多 Euler-Lagrange 系统同步到一个非零速度. 文献 [12-13] 研究了有领航者 (主系统) 的多 Euler-Lagrange 状态同步问题, 并针对主系统速度固定和速度变化两种情况, 分别给出了相应的同步算法.

本文提出了一种基于主-从系统状态同步思想的 AUV 回收控制方法, 实现母艇在运动状态下对 AUV 的自主回收. 作为该问题研究的切入点, 本文考虑母艇与 AUV 作水平面运动时的自主回收控制问题. 这类问题涵盖了水下运动的母艇在浅水域自主回收 AUV 等情形. 与上述文献不同的是, 本文所考虑的母艇自主回收 AUV 问题, 是指 AUV 的位置、姿态 (首向偏航角)、速度 (线速度和角速度)、加速度 (线加速度和角加速度) 等状态变量与母艇的相应状态变量达到同步. 为了减少回收时间, 提高回收效率, 本文研究了母艇在有限时间内回收 AUV 的问题. 在给出母艇和 AUV 的水平面动力学模型的基础上, 建立了 AUV (从系统) 接收母艇 (主系统) 状态信息并控制自身接近母艇的主从控制方案, 使母艇自主回收 AUV 的问题转化为两者的运动状态同步问题. 然后, 借用有限时间同步理论, 设计了一种常值海流扰动影响下 AUV 能够在有限时间内被母艇回收的滑模控制器, 理论证明和仿真实例都证实了该控制器的有效性.

## 1 母艇和 AUV 的动力学建模

假设母艇和 AUV 均为刚体, 母艇回收装置与母艇刚性

连接, 且与 AUV 在同一水平面上. 考虑母艇和 AUV 做水平面运动, 并受常值无旋海流的影响, 那么它们在绝对坐标系下的动力学模型可以表示为<sup>[8]</sup>

$$M_{\eta_i}(\eta_i)\ddot{\eta}_i + C_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i)\dot{\eta}_i - N_i(\eta_i, \dot{\eta}_i) = \tau_i(\eta_i, t), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

其中,  $M_{\eta_i}(\eta_i) = J_i^{-T}(\eta_i)(M_{RB_i} + M_{A_i})J_i^{-1}(\eta_i)$ ,  $C_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i) = J_i^{-T}(\eta_i)[C_{RB_i}(\mathbf{v}_i) + C_{A_i}(\mathbf{v}_i) + D_i(\mathbf{v}_i) - (M_{RB_i} + M_{A_i})J_i^{-1}(\eta_i)\dot{J}_i(\eta_i)J_i^{-1}(\eta_i)]J_i^{-1}(\eta_i) \times (C_{A_i}(\mathbf{v}_i) + D_i(\mathbf{v}_i))J_i^{-1}(\eta_i)[U_s \cos \beta_s, U_s \sin \beta_s, 0]^T$ ,  $N_i(\eta_i, \dot{\eta}_i) = J_i^{-T}(\eta_i) \times (C_{A_i}(\mathbf{v}_i) + D_i(\mathbf{v}_i))J_i^{-1}(\eta_i)[U_s \cos \beta_s, U_s \sin \beta_s, 0]^T$ ,  $\tau_i(\eta_i, t) = J_i^{-T}(\eta_i)\tau_i(t)$ ,  $\eta_i = [\xi_i, \eta_i, \psi_i]^T \in \mathbf{R}^3$ ,  $(\xi_i, \eta_i)$  为母艇和 AUV 的位置坐标,  $\psi_i$  为母艇和 AUV 的首向偏航角,  $\mathbf{v}_i = [u_i, v_i, r_i]^T \in \mathbf{R}^3$ ,  $(u_i, v_i)$  为母艇和 AUV 的线速度,  $r_i$  为母艇和 AUV 的偏航角速度,  $M_{RB_i} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 的刚体惯性矩阵,  $M_{A_i} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 的附加质量惯性矩阵,  $C_{RB_i}(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 的刚体科氏力和向心力矩阵,  $C_{A_i}(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 附加质量产生的科氏力和向心力矩阵,  $D_i(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 的水动力阻尼矩阵,  $\tau_i(t) = [\tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \tau_{i3}(t)]^T \in \mathbf{R}^3$  为母艇和 AUV 的控制输入向量,  $U_s$  为海流的绝对速度,  $\beta_s$  为海流的偏流角,  $J_i(\eta_i) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$  为母艇和 AUV 各自运动坐标系和绝对坐标系之间的转换矩阵, 表示为

$$J_i(\eta_i) = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

进一步改写式 (1) 可得:

$$\ddot{\eta}_i = A_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i)\dot{\eta}_i + F_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i) + \bar{\tau}_i(\eta_i, t), \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

其中,  $A_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i) = -M_{\eta_i}^{-1}(\eta_i)C_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i)$ ,  $F_{\eta_i}(\eta_i, \dot{\eta}_i) = M_{\eta_i}^{-1}(\eta_i)N_i(\eta_i, \dot{\eta}_i)$ ,  $\bar{\tau}_i(\eta_i, t) = M_{\eta_i}^{-1}(\eta_i)\tau_i(\eta_i, t)$ .

## 2 回收控制方案

在母艇自主回收 AUV 过程中, 需要通过对 AUV 进行适当控制使得其位置、姿态、速度及加速度等状态变量与母艇回收装置的相应状态变量相一致, 以实现母艇自主回收 AUV.

AUV 的水平面位置可由其平面重心坐标来表示, 母艇回收装置的水平面位置则可由其平面中心坐标, 也即母艇的水平面重心坐标来表示 (水平面上两点重合). 此外, 由于母艇回收装置与母艇为刚性连接, 母艇回收装置的水平面姿态、速度和加速度与母艇一致. 因此, 可以将母艇自主回收 AUV 的控制问题转化为从系统 (AUV) 与主系统 (母艇) 的状态同步问题, 即实现  $\eta_2(t) \rightarrow \eta_1(t)$ ,  $\dot{\eta}_2(t) \rightarrow \dot{\eta}_1(t)$ ,  $\ddot{\eta}_2(t) \rightarrow \ddot{\eta}_1(t)$ . 如前面所述, 为了减少回收过程时间, 这里我们研究 AUV 与母艇 (回收装置) 的有限时间状态同步问题.

假设母艇的控制输入  $\tau_1(\eta_1, t)$  是预先给定且可观测, 母艇在运动过程中连续不断地给 AUV 发送自身的信息. AUV 接受母艇信息后, 传递给自身控制器, 控制器根据母艇和 AUV 本身的状态信息产生控制信号给操纵系统, 由其驱动 AUV 向母艇机动, 直至与母艇 (回收装置) 的位置、姿态、速度及加速度达到一致. 根据式 (3), 可采用如下主-从同步框

架来实现上述母艇自主回收 AUV 的方案:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = A_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1)\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + F_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_1(\boldsymbol{\eta}_1, t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = A_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 + F_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2) + \bar{\boldsymbol{\tau}}_2(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2, t) \end{cases} \quad (4)$$

其中, 下标 1 和 2 分别代表母艇和 AUV.

现在, AUV 与母艇(回收装置)的有限时间状态同步问题可具体表述为: 设计一种合适的 AUV 控制输入  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_2(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2, t)$ , 使得对于母艇和 AUV 的任意初始状态  $\boldsymbol{\eta}_i(0)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i(0)$  和  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i(0)$  ( $i = 1, 2$ ), 以及预先给定的母艇控制输入  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_1(\boldsymbol{\eta}_1, t)$ , 母艇和 AUV 的状态变量满足:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} \|\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow T} \|\dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow T} \|\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)\| = 0 \end{cases} \quad (5)$$

且当  $t > T$  时,  $\|\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t)\| = 0$ ,  $\|\dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)\| = 0$ ,  $\|\ddot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)\| = 0$ . 其中,  $T$  是一个有限正数(称为同步时间),  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数.

定义误差变量:  $\mathbf{e}_1 = [e_{11}, e_{12}, e_{13}]^T = \boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_2 = [e_{21}, e_{22}, e_{23}]^T = \dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{e}_3 = [e_{31}, e_{32}, e_{33}]^T = \ddot{\boldsymbol{\eta}}_1(t) - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_2(t) \in \mathbf{R}^3$ , 则由同步框架(4)可以得到如下误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_3 = A_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{W} + \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2) = \Delta A \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + F_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1) - F_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)$ ,  $\Delta A = A_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1) - A_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)$ ,  $\mathbf{u}(t) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_1(\boldsymbol{\eta}_1, t) - \bar{\boldsymbol{\tau}}_2(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2, t)$ .

因此, 如果零点  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$  是误差系统(6)的平衡点(此时  $\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_2 = 0$ ), 且误差系统(6)在零点  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$  全局有限时间稳定, 那么从系统(AUV)的位置、姿态、速度及加速度与主系统(母艇)的相应状态变量达到全局有限时间同步.

由于在框架(4)中, 母艇控制输入  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_1(\boldsymbol{\eta}_1, t)$  假设是预先给定且可观测的, 因此, 母艇有限时间回收 AUV 的问题现在可表述为: 设计一种合适的同步控制器  $\mathbf{u}(t) = \bar{\boldsymbol{\tau}}_1(\boldsymbol{\eta}_1, t) - \bar{\boldsymbol{\tau}}_2(\boldsymbol{\eta}_1, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2, t)$ , 使得对于主(母艇)-从(AUV)系统的任意初始状态  $\boldsymbol{\eta}_i(0)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i(0)$  和  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i(0)$  ( $i = 1, 2$ ) 误差系统(6)在零点  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$  达到全局有限时间稳定.

### 3 控制器设计

先给出后面证明过程中要用到的定义和引理.

考虑一个非线性自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^n$  是包含零点的某一开邻域,  $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$  在  $\mathbf{D}$  上连续, 且  $f(0) = 0$ .

假设对于任一非零初始值  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 系统(7)的解为  $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ , 且  $\boldsymbol{\phi}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ . 我们称系统(7)在零点是有限时间稳定的, 如果系统(7)在零点是 Lyapunov 稳定的, 并且对于任意  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U} \setminus \{0\}$  ( $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{D}$ ),  $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  定义在  $t \geq t_0$  上, 且存在函数  $T: \mathbf{U} \rightarrow [0, \infty)$ , 使得对任意  $t \geq T(\mathbf{x}_0) + t_0$ ,  $\boldsymbol{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ .

如果进一步地有  $\mathbf{U} = \mathbf{D} = \mathbf{R}^n$ , 则称系统(7)在零点是全局有限时间稳定的.

**引理 1**<sup>[14]</sup>. 如果存在正实数  $c > 0$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  和关于时间  $t$  连续可微的正定函数  $V: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^+$ , 使得:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) + cV(\mathbf{x})^\gamma \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{U} \setminus \{0\} \quad (8)$$

那么, 系统(7)在  $\mathbf{x} = 0$  是有限时间稳定的. 如果  $\mathbf{U} = \mathbf{D} = \mathbf{R}^n$ , 那么系统(7)在  $\mathbf{x} = 0$  是全局有限时间稳定的.

**引理 2.** 如果  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正数,  $0 < p < 2$ , 那么下面不等式成立:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^p \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^2 \quad (9)$$

下面我们采用滑模控制方法来设计误差系统的有限时间同步控制器  $\mathbf{u}(t)$ . 考虑如下切换函数

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= [s_1(t), s_2(t), s_3(t)]^T = \\ &\mathbf{e}_1(t) + \delta^\alpha(\mathbf{e}_2(t)) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2(t)) \in \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

其中,  $\delta^\alpha(\mathbf{e}_2) = [|\mathbf{e}_{21}|^\alpha, |\mathbf{e}_{22}|^\alpha, |\mathbf{e}_{23}|^\alpha]^T \in \mathbf{R}^3$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ , 符号“ $\circ$ ”表示向量的 Hadamard 积,  $\text{sgn}(\mathbf{e}_2) = [\text{sgn}(e_{21}), \text{sgn}(e_{22}), \text{sgn}(e_{23})]^T \in \mathbf{R}^3$ ,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数.

**定理 1.** 令:

$\text{sgn}(\mathbf{S}) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \text{sgn}(s_3)]^T \in \mathbf{R}^3$ . 如果选定控制器:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T = \\ &-\mathbf{u}_0 - [\boldsymbol{\theta} + \delta(\mathbf{e}_2) - \alpha^{-1}\delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \\ &\text{sgn}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{S})] \circ \text{sgn}(\mathbf{S}) \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{u}_0 = A_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{W} + \alpha^{-1}\delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2)$ ,  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\boldsymbol{\theta} = [1, 1, 1]^T$ , 那么在该控制器的作用下, 同步框架(4)达到有限时间同步.

**证明.** 容易验证, 在控制器(10)下,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$  是误差系统(6)的平衡点. 利用控制器(10),  $\mathbf{S}$  关于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= \dot{\mathbf{e}}_1 + \alpha\delta^{\alpha-1}(\mathbf{e}_2) \circ \dot{\mathbf{e}}_2 = \\ &\mathbf{e}_2 + \alpha\delta^{\alpha-1}(\mathbf{e}_2) \circ [A_{\boldsymbol{\eta}_2}(\boldsymbol{\eta}_2, \dot{\boldsymbol{\eta}}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{W} + \mathbf{u}(t)] = \\ &-\alpha\delta^{\alpha-1}(\mathbf{e}_2) \circ [\boldsymbol{\theta} + \delta(\mathbf{e}_2) - \alpha^{-1}\delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \\ &\text{sgn}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{S})] \circ \text{sgn}(\mathbf{S}) \end{aligned}$$

显然,  $\mathbf{S} = 0$  是该系统的平衡点. 选取 Lyapunov 函数

$$V_1(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (11)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\mathbf{S}) &= 2\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} = \\ &-2\alpha[\delta(\mathbf{S}) \circ \text{sgn}(\mathbf{S})]^T (\delta^{\alpha-1}(\mathbf{e}_2) \circ [\boldsymbol{\theta} + \delta(\mathbf{e}_2) - \\ &\alpha^{-1}\delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{S})] \circ \text{sgn}(\mathbf{S})) \end{aligned}$$

令  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, k_3]^T = [\boldsymbol{\theta} + \delta(\mathbf{e}_2) - \alpha^{-1}\delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{S})] \in \mathbf{R}^3$ , 则有:

$$k_i = 1 + |\mathbf{e}_{2i}| - \alpha^{-1}|\mathbf{e}_{2i}|^{2-\alpha} \text{sgn}(\mathbf{e}_{2i})\text{sgn}(s_i), \quad i = 1, 2, 3$$

由于  $\alpha \in (1, 2)$ , 显然  $1 + |\mathbf{e}_{2i}| > \alpha^{-1}|\mathbf{e}_{2i}|^{2-\alpha}$  恒成立, 因此, 对于任意的  $\mathbf{e}_{2i}$  和  $s_i$ ,  $k_i > 0$ . 此时,  $\dot{V}_1(\mathbf{S}) \leq 0$ .

因此, 对于任意的初始条件  $\mathbf{S}(0) = \mathbf{e}_1(0) + \delta^\alpha(\mathbf{e}_2(0)) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2(0))$ , 平衡点  $\mathbf{S} = 0$  是 Lyapunov 稳定的.

现在采用反证法证明: 对任意的初始状态  $\mathbf{e}_1(0) = [e_{11}(0), e_{12}(0), e_{13}(0)]^T$  和  $\mathbf{e}_2(0) = [e_{21}(0), e_{22}(0), e_{23}(0)]^T$ , 误差系统 (6) 都可在控制器 (10) 的作用下, 在有限时间到达滑模面  $\mathbf{S} = 0$ .

当初始状态  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$  满足  $s_1(0) = e_{11}(0) + \delta^\alpha(e_{21}(0)) \text{sgn}(e_{21}(0)) > 0$  时, 假设对于任意  $t > 0$ , 始终有  $s_1(t) > 0$ . 那么把控制器 (10) 代入误差系统 (6) 可得:

$$\dot{e}_{21}(t) = -1 - |e_{21}(t)| \quad (12)$$

对式 (12) 两边积分得到:

$$\begin{aligned} e_{21}(t) &= e_{21}(0) - t - \int_0^t |e_{11}(t)| dt \leq \\ &e_{21}(0) - t - \left| \int_0^t \dot{e}_{11}(t) dt \right| \leq \\ &e_{21}(0) + |e_{11}(0)| - t - |e_{11}(t)| < \\ &1 + e_{21}(0) + |e_{11}(0)| - t - |e_{11}(t)|^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

因此, 对于任意  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$ , 总是相应地存在一个常数:

$$t_m = \max\{0, 1 + e_{21}(0) + |e_{11}(0)|\} \geq 0 \quad (13)$$

使得当  $t \geq t_m$  时, 满足:

$$e_{21}(t) < -|e_{11}(t)|^{\frac{1}{\alpha}} \quad (14)$$

此时, 将式 (14) 代入切换函数  $S$  可得:

$$s_1(t) < e_{11}(t) - \left(|e_{11}(t)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = 0, \quad t \geq t_m$$

这与上述假设矛盾. 因此, 根据切换函数  $S$  的连续性, 当初始状态  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$  满足  $s_1(0) > 0$  时, 总是存在一个相关的有限时间常数  $t_{\varepsilon 1} \in [0, t_m]$ , 使得  $s_1(t_{\varepsilon 1}) = 0$ .

同理可以证明当初始状态  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$  满足  $s_1(0) < 0$  时, 总是存在一个相关的有限时间常数  $t_{\varepsilon 2} \in [0, t_m]$ , 使得  $s_1(t_{\varepsilon 2}) = 0$ .

因此, 对于任意初始状态  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$ , 总是存在有限的时间常数  $T_{11}(e_{11}(0), e_{21}(0)) \geq 0$ , 使得  $s_1(T_{11}) = 0$ .

同样地, 可以证明: 对于任意初始状态  $(e_{12}(0), e_{22}(0))$  和  $(e_{13}(0), e_{23}(0))$ , 总是相应存在有限的时间常数  $T_{12}(e_{12}(0), e_{22}(0)) \geq 0$  和  $T_{13}(e_{13}(0), e_{23}(0)) \geq 0$ , 使得  $s_2(T_{12}) = 0$  和  $s_3(T_{13}) = 0$  分别成立.

令  $T_1 = \max\{T_{11}, T_{12}, T_{13}\}$ , 那么  $\mathbf{S}(T_1) = 0$ , 这表明误差系统 (6) 在控制器 (10) 的作用下, 在有限时间  $T_1$  到达滑模面  $\mathbf{S} = 0$ . 又由于  $\mathbf{S} = 0$  是平衡点, 因此, 误差系统 (6) 在  $t \geq T_1$  期间保持在滑模面  $\mathbf{S} = 0$  上.

下面证明误差系统 (6) 在滑模面  $\mathbf{S} = 0$  上, 有限时间收敛于  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$ .

显然, 在滑模面  $\mathbf{S} = 0$  上:

$$\mathbf{e}_1 + \delta^\alpha(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2) = 0 \quad (15)$$

这说明当  $\mathbf{e}_2 = 0$  时,  $\mathbf{e}_1 = 0$ .

在滑模面  $\mathbf{S} = 0$  上误差系统 (6) 的分量  $\mathbf{e}_2$  满足:

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = -\alpha^{-1} \delta^{2-\alpha}(\mathbf{e}_2) \circ \text{sgn}(\mathbf{e}_2) \quad (16)$$

选取 Lyapunov 函数:

$$V_2(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 \quad (17)$$

借助引理 2, 将函数 (17) 沿系统 (16) 的轨迹对时间求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\mathbf{e}_2) &= \dot{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^T \dot{\mathbf{e}}_2 = \\ &-2\alpha^{-1} (|e_{21}|^{3-\alpha} + |e_{22}|^{3-\alpha} + |e_{23}|^{3-\alpha}) \leq \\ &-2\alpha^{-1} (|e_{21}|^2 + |e_{22}|^2 + |e_{23}|^2)^{\frac{3-\alpha}{2}} = \\ &-2\alpha^{-1} (V_2(\mathbf{e}_2))^{\frac{3-\alpha}{2}} \end{aligned}$$

因为  $(3-\alpha)/2 \in (1/2, 1)$ , 根据引理 1, 此时, 误差分量  $\mathbf{e}_2$  在  $\mathbf{S} = 0$  上有限时间稳定于  $\mathbf{e}_2 = 0$ , 同时误差分量  $\mathbf{e}_1$  也稳定于  $\mathbf{e}_1 = 0$ .

综合以上分析, 误差系统 (6) 在控制器 (10) 的作用下, 全局有限时间稳定于平衡点  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$ , 即同步框架 (4) 达到有限时间同步.  $\square$

**注 1.** 在上述证明过程中, 母艇和 AUV 的运动同步时间虽然不能定量地表示出来, 但是, 由式 (13) 不难看出, 误差系统 (6) 到达滑模面  $\mathbf{S} = 0$  的时间与系统初始误差  $(e_{11}(0), e_{21}(0))$  和参数  $\alpha$  相关. 这也说明了在整个回收过程中, 母艇和 AUV 的运动同步时间与误差系统 (6) 的初始值以及控制器参数  $\alpha$  是存在联系的.

## 4 仿真实验

为了验证本文提出的回收控制方案, 开发了利用母艇自主回收 AUV 的实时视景仿真系统. 该系统采用 Multigen creator 实体建模, Vega prime 创建和管理场景, Matlab 后台实时运动解算, 然后, 由 Visual C++ 平台进行系统集成, 实现: 仿真参数装订、运动状态及轨迹实时显示, Vega Prime 环境下母艇、AUV 和场景的交互控制. 系统原理如图 1 所示.

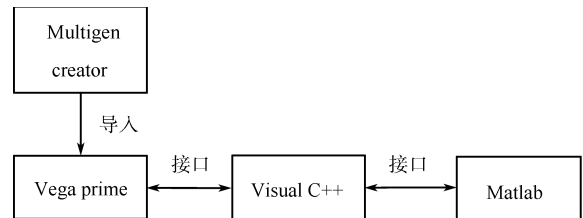


图 1 视景仿真系统原理

Fig. 1 Diagram of the visual simulation system

下面给出一个实例仿真结果. 首先, 选定以下参数:

海流参数: 流速  $U_s = 0.5$  m/s, 偏流角  $\beta_s = 30^\circ$ ;

母艇参数:  $(\xi_1(0), \eta_1(0)) = (100 \text{ m}, 10 \text{ m})$ ,  $\psi_1(0) = 0^\circ$ ,  $u_1(0) = 5$  m/s,  $v_1(0) = 2$  m/s,  $r_1(0) = 0^\circ/\text{s}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_1(t) = [2 \sin(t), \cos(t), \sin(t)]^T$ ,  $M_{RB1} = \text{diag}\{500, 500, 30\}$ ,  $M_{A1} = \text{diag}\{240, 240, 300\}$ ,  $D_1 = \text{diag}\{110, 110, 125\}$ ,

$$C_{RB1} = 500 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 0 & u_1 \\ v_1 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{A1} = 110 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 0 & u_1 \\ v_1 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

AUV 参数:  $(\xi_2(0), \eta_2(0)) = (20 \text{ m}, 50 \text{ m})$ ,  $\psi_2(0) = 30^\circ$ ,  $u_2(0) = 2$  m/s,  $v_2(0) = 1$  m/s,  $r_2(0) = 2^\circ/\text{s}$ ,

$M_{RB_2} = \text{diag}\{125, 125, 8\}$ ,  $M_{A_2} = \text{diag}\{62, 62, 70\}$ ,  
 $D_2 = \text{diag}\{30, 30, 35\}$ ,

$$C_{RB_2} = 125 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & u_2 \\ v_2 & -u_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{A_2} = 30 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & u_2 \\ v_2 & -u_2 & 0 \end{bmatrix}$$

控制器参数  $\alpha = 1.5$ .

然后, 对以上参数进行装订, 可以得到系统在控制器 (10) 下的仿真结果, 如图 2~图 8 所示. 图 2 显示了 Vega prime 三维视图环境下的回收控制过程, 从图 2 中可以看出, AUV 被顺利地回收到了位于母艇背部的平台上. 图 3~图 8 为由 Matlab 计算后台实时获取的相关轨迹. 显然, 在本文提出的回收控制方案下, 误差系统 (6) 能够在有限时间内稳定到滑模面  $S = 0$  上 (如图 4 所示), 并且, 母艇和 AUV 的位置、姿态、速度及加速度状态误差也均在有限时间内实现了同步 (如图 5~图 7 所示).



图 2 回收控制过程

Fig. 2 Process of recovery control

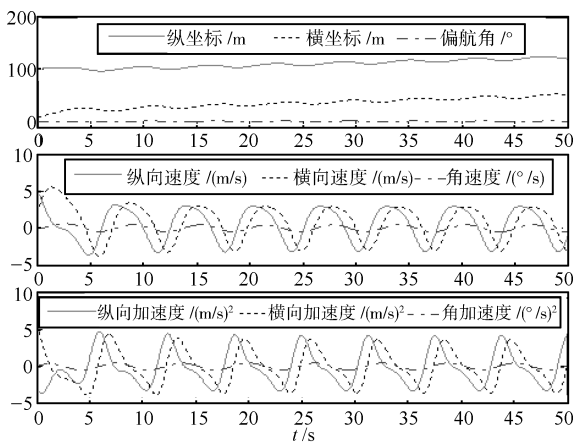


图 3 母艇运动状态轨迹

Fig. 3 The orbits of host-vessel

### 5 结论

AUV 的回收控制是当前研究 AUV 所面临的一个重要问题. 由母艇在运动中自主回收 AUV 是一种有广泛应用价值的回收方式之一. 本文提出了一种基于主-从系统状态同

步思想的母艇自主回收 AUV 控制方法. 通过建立母艇和 AUV 的水平面运动状态同步方案, 设计得到了一种在常值海流扰动影响下, 实现母艇在有限时间内回收 AUV 的滑模

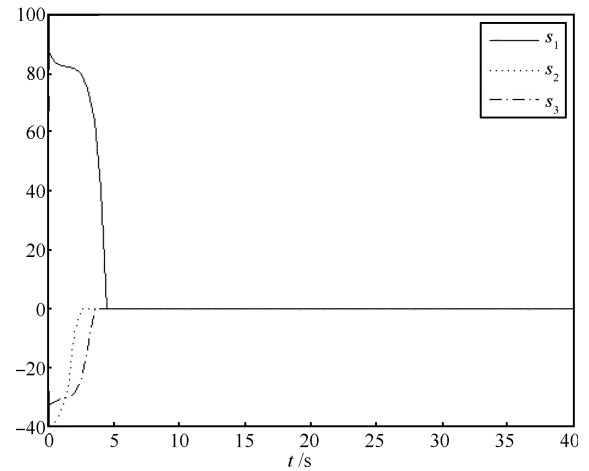


图 4 切换函数  $S = [s_1, s_2, s_3]^T$  的轨迹

Fig. 4 The orbits of switch function  $S = [s_1, s_2, s_3]^T$

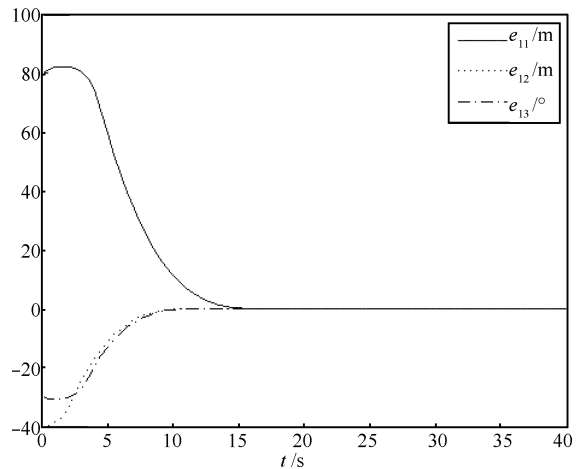


图 5 位置及姿态误差 ( $e_1 = \eta_1 - \eta_2$ ) 的轨迹

Fig. 5 The orbits of error system ( $e_1 = \eta_1 - \eta_2$ )

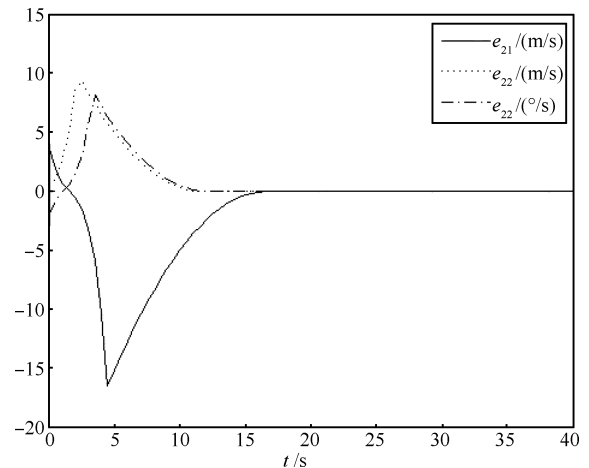


图 6 速度误差 ( $e_2 = \dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2$ ) 的轨迹

Fig. 6 The orbits of error system ( $e_2 = \dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2$ )

控制器, 并通过理论证明以及视景仿真验证了该控制器的有效性. 本文提出的控制方法可以推广到母艇对 AUV 的空间自主回收控制问题.

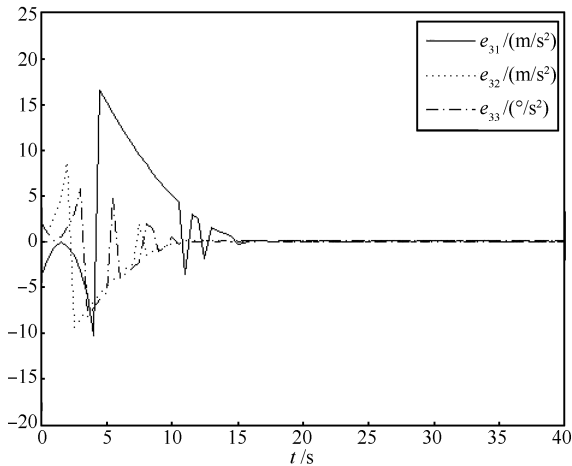


图 7 加速度误差 ( $e_3 = \ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2$ ) 的轨迹

Fig. 7 The orbits of error system ( $e_3 = \ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2$ )

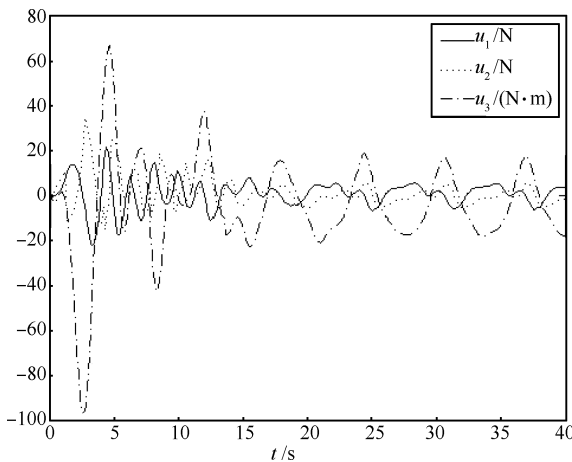


图 8 控制信号  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$  变化曲线

Fig. 8 The curves of controller  $u = [u_1, u_2, u_3]^T$

## References

- Xiang X B, Jouvencel B, Parodi O. Coordinated formation control of multiple autonomous underwater vehicles for pipeline inspection. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2010, **7**(1): 75–84
- Qian Dong, Meng Qing-Guo, Xue Meng, Zhang Shao-Wu. Requirements for task and capability of the US navy unmanned underwater vehicles. *Torpedo Technology*, 2005, **13**(4): 7–12, 25  
(钱东, 孟庆国, 薛蒙, 张少悟. 美国海军 UUV 的任务与能力需求. 鱼雷技术, 2005, **13**(4): 7–12, 25)
- Pan Guang, Huang Ming-Ming, Song Bao-Wei, Hu Hai-Bao, Du Xiao-Xu. Current situation and development trend of AUV recovery technology. *Torpedo Technology*, 2008, **16**(6): 10–14  
(潘光, 黄明明, 宋保维, 胡海豹, 杜晓旭. AUV 回收技术现状及发展趋势. 鱼雷技术, 2008, **16**(6): 10–14)
- Wang B, Su Y M, Wan L, Sun Y S. Adaptive PID control system for an autonomous underwater vehicle. *High Technology Letters*, 2011, **17**(1): 7–12
- Zhu Kang-Wu, Gu Lin-Yi, Ma Xin-Jun, Xu Ben-Tao. Studies on multivariable robust output feedback control for underwater vehicles. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2012, **46**(8): 1397–1406  
(朱康武, 顾临怡, 马新军, 胥本涛. 水下运载器多变量鲁棒输出反馈控制方法. 浙江大学学报(工学版), 2012, **46**(8): 1397–1406)
- Smallwood D A, Whitcomb L L. Model-based dynamic positioning of underwater robotic vehicles: theory and experiment. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2004, **29**(1): 169–186
- McEwen R S, Hobson B W, McBride L, Bellingham J G. Docking control system for a 54-cm-diameter (21-in) AUV. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2008, **33**(4): 550–562
- Fossen T I. *Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*. Trondheim, Norway: Marine Cybernetics, 2002
- Liu Yuan, Min Hai-Bo, Wang Shi-Cheng, Zhang Jin-Sheng, Liu Zhi-Guo. Distributed adaptive synchronization of networked Euler-Lagrange systems with communication delays. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(8): 1270–1279  
(刘源, 闵海波, 王仕成, 张金生, 刘志国. 时延网络中 Euler-Lagrange 系统的分布式自适应协调控制. 自动化学报, 2012, **38**(8): 1270–1279)
- Spong M W, Chopra N. Synchronization of networked Lagrangian systems. In: *Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, LNCIS, F. Bullo and K. Fujimoto, (Eds). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 47–59
- Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems. *International Journal of Control*, 2009, **82**(11): 2137–2149
- Mei J, Ren W, Ma G F. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(6): 1415–1421
- Mei Jie, Zhang Hai-Bo, Ma Guang-Fu. Adaptive coordinated tracking for networked Euler-Lagrange systems under a directed graph. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(5): 596–603  
(梅杰, 张海博, 马广富. 有向图中网络 Euler-Lagrange 系统的自适应协调跟踪. 自动化学报, 2011, **37**(5): 596–603)
- Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751–766

吴泽伟 海军工程大学电子工程学院博士研究生. 主要研究方向为复杂系统控制与同步. 本文通信作者. E-mail: wuzw1982@hotmail.com  
(WU Ze-Wei Ph.D. candidate at the College of Electronic Engineering, Naval University of Engineering. His research interest covers complex system control and synchronization. Corresponding author of this paper.)

吴晓锋 海军陆战学院教授. 主要研究方向为复杂系统控制与同步, 军事指挥与控制, 系统效能评估. E-mail: mathwxf@sina.com  
(WU Xiao-Feng Professor at Naval Marine Academy. His research interest covers complex system control and synchronization, military command and control, and system efficiency evaluation.)