

依赖延迟线性时滞系统的稳定性判据

朱莹^{1,2} 高其娜^{1,2} 肖扬³

摘要 由于独立延迟线性时滞 (Linear time-delay with independent delays, LTD-ID) 系统的稳定条件对系统参数有严格的限制, 只有极少数依赖延迟线性时滞 (LTD with dependent delays, LTD-DD) 系统可满足该稳定条件. LTD-ID 系统的特征多项式属拟多项式, 其根为多重延迟的函数, 这使得 LTD-ID 系统的稳定性检验非常困难. 为解决该问题, 基于二维域混合多项式, 本文提出 LTD-DD 系统的若干稳定性判据. 应用例表明所提出的稳定性判据是简单的和有效的, 所提出的定理 4 可解决现有 LMI 稳定性判据的保守性问题.

关键词 控制理论, 时滞系统, 拟多项式, 二维多项式, 稳定性判据

引用格式 朱莹, 高其娜, 肖扬. 依赖延迟线性时滞系统的稳定性判据. 自动化学报, 2013, 39(12): 2150–2153

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.02150

Stability Criteria of Linear Time-delay Systems with Dependent Delays

ZHU Ying^{1,2} GAO Qi-Na^{1,2} XIAO Yang³

Abstract This paper reveals that only fewer of the linear time-delay (LTD) systems with dependent delays (LTD-DD systems) can satisfy the stability condition for linear time-delay systems with independent delays (LTD-ID systems), since there is a strict limitation for the parameters of the LTD-DD systems. The characteristic polynomials of LTD-DD systems belong to quasipolynomials, and the roots of the quasipolynomials are the function of the multiple delays, which make the stability test of LTD-DD systems difficult. To solve the problem, based on 2-D hybrid polynomials, some stability criteria of LTD-DD systems are proposed. Examples show that the proposed stability criteria are simple and valid, and that the proposed theorem can solve the conservatism problem of existing LMI stability testing algorithms.

Key words Control theory, time-delay systems, quasipolynomials, two-dimensional polynomials, stability criteria

Citation Zhu Ying, Gao Qi-Na, Xiao Yang. Stability criteria of linear time-delay systems with dependent delays. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 2150–2153

时滞现象大量存在于航空、航天、工业过程控制等各种工程中, 常常是导致系统不稳定或性能恶化的重要原因. 时滞系统稳定性研究的主要目的是找到计算简单、切实有效的或者低保守性的稳定性判据^[1–13]. 线性时滞 (Linear time-delay, LTD) 系统是一种无限维系统, 线性时滞系统可用具有延迟的微分方程或微分方程组描述^[1–12]. LTD 系统可分为两类: 具有独立延迟的线性时滞系统 (Linear time-delay

with independent delays, LTD-ID) 和具有依赖延迟的线性时滞系统 (LTD with dependent delays, LTD-DD)^[10–12], 将 LTD-ID 系统稳定的充分必要条件作为 LTD-DD 系统稳定条件是不切实际的, 因为该稳定条件要求 LTD-DD 系统状态延迟为零到无穷大^[10–11]. 在工程应用中, LTD-DD 系统并无如此苛刻的延迟要求. 在应用中主要面对的是 LTD-DD 系统.

类似于多维系统^[10], 线性时滞系统的特征根是复平面上的连续曲线, 因此线性时滞系统又被视为无限维系统^[7–12]. 线性时滞系统稳定性分析的难点在于: 1) 线性时滞系统的特征多项式为拟多项式, 其特征根为无穷多个和非孤立的, 难以将线性时滞系统特征根分离为独立根^[7–12]; 2) 延迟参数空间是多维的, 线性时滞系统的特征多项式的根为多维延迟的函数. LTD-DD 系统的稳定性判据可归为两大类: 一类是基于 Lyapunov-Krasovskii 函数的 LMI 稳定性判据^[1–6], 另一类是基于系统特征多项式的稳定性判据^[7–12]. 基于 Lyapunov-Krasovskii 函数的 LMI 稳定性判据为稳定的充分条件^[1–6], 一方面具有较大的保守性, 另一方面无法判断系统为不稳定的情况, 无法发现文献 [13] 的定理 4 的问题. 文献 [7–12] 的时滞系统特征多项式稳定条件为充分条件, 而作为时滞系统特征多项式稳定的充要条件提出的文献 [13] 的定理 4 却只是一必要条件.

本文首先将文献 [10] 的 LTD-ID 系统稳定的充分必要条件推广为 LTD-DD 系统稳定的充分条件 (定理 2), 但是定理 2 的稳定条件是非常保守的, 对 LTD-DD 系统参数有极为严格的限制. 本文在二维 s - z 多项式稳定条件的基础上^[7–10], 提出 LTD-DD 系统稳定的一个充分条件 (定理 3), 具有较小的保守性. 本文提出的定理 4 为 LTD-DD 系统稳定的充分必要条件, 可发现文献 [13] 定理 4 存在的问题.

1 LTD-DD 系统模型

LTD-DD 系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{1 \leq k \leq K} A_k \mathbf{x}(t - \tau_k) + \\ &\quad \sum_{1 \leq k \leq K} B_k \mathbf{u}(t - \tau_k) \\ \mathbf{y}(t) &= C \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, A_k , B_k , C 和 D 分别是 $N_A \times N_A$, $N_A \times N_B$, $N_A \times N_C$ 和 $N_A \times N_D$ 维矩阵, $k = 0, \dots, K$, τ_k 是有限常数, $\mathbf{u}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 分别是 LTD-DD 系统的 N_B 维的输入信号向量和 N_C 维的输出信号向量. 式 (1) 的 LTD-DD 系统特征多项式为

$$B(s) = \det \left[sI - A_0 - \sum_{1 \leq k \leq K} A_k e^{-s\tau_k} \right] \quad (2)$$

其中, I 是 $N_A \times N_A$ 单位矩阵. 式 (2) 的特征多项式可展开为

$$\begin{aligned} B(s) &= \sum_{0 \leq m \leq N_A} b_{m,0} s^m + \sum_{1 \leq k \leq K} \sum_{0 \leq m \leq N_A} b_{m,k} s^m e^{-s\tau_k} = \\ &= b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s) e^{-s\tau_k} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 系数 $b_{m,k}$ 由矩阵 A_k 确定,

$$b_k(s) = \sum_{0 \leq m \leq N_A} b_{m,k} s^m, \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (4)$$

收稿日期 2012-04-01 录用日期 2012-09-19
Manuscript received April 1, 2012; accepted September 19, 2012
国家自然科学基金 (60572093) 资助, 国防科研课题 (102476) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60572093) and National Defence Project (102476)
本文责任编辑 桂卫华
Recommended by Associate Editor GUI Wei-Hua
1. 北京航空航天大学电子与信息工程学院 北京 100191 2. 北京航空技术研究中心 北京 100076 3. 北京交通大学计算机与信息技术学院 北京 100044
1. School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191 2. Beijing Aeronautical Technology Research Center, Beijing 100076 3. School of Computer and Information Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044

特征多项式 $B(s)$ 是一拟多项式, 它是一整函数, 它的幂级数对于所有复变量 s 值收敛. 理论上式 (3) 有无数个根, 但在复平面任何有界区域内只包含有限个根.

定理 1^[7-10]. 式 (1) 的 LTD-DD 系统零输入解渐近稳定的充分必要条件是

$$B(s) = b_0(s) + \sum_{0 \leq k \leq K} b_k(s)e^{-s\tau_k} \neq 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (5)$$

其中, $\tau_k \geq 0$, 是有限常数, $b_k(s)$ 由式 (4) 给出. 可将拟多项式 (3) 表示为具有独立复变量 s 和 z 的二维多项式^[7-11]

$$B(s) = \sum_{0 \leq m \leq N_A} b_{m,0}s^m + \sum_{1 \leq k \leq K} \sum_{0 \leq m \leq N_A} b_{m,k}s^m z^{-\tau_k} = b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)z^{-\tau_k} \quad (6)$$

其中, $z = e^s$.

定理 1 是 LTD-DD 系统零输入解渐近稳定的充分必要条件, 但其检验非常困难: 因为特征多项式的特征根为连续的和非孤立的, 难以将 LTD-DD 系统特征根分离为独立根^[7-10]; 延迟参数空间是多维的, $\tau_k \geq 0, k = 1, \dots, K$, 而线性时滞系统的特征多项式的根为多维延迟的函数. 下节的结果将解决定理 1 的检验问题.

2 LTD-DD 系统稳定性判据

文献 [10] 的定理 2 对于 LTD-ID 系统是稳定的充分必要条件, 但对于 LTD-DD 系统则不然. 本文将其推广到 LTD-DD 系统, 成为 LTD-DD 系统稳定的充分条件, 表述为如下定理.

定理 2. 设拟多项式 (3) 中, $\tau_k \geq 0$ 是有限常数, $k = 1, \dots, K$, 如果 1) $b_0(s)$ 稳定; 2)

$$|b_0(j\omega)| > \sum_{1 \leq k \leq K} |b_k(j\omega)|, \forall \omega > 0 \quad (7)$$

则拟多项式 (3) 稳定.

定理 2 的证明需要下列引理.

引理 1^[7-9]. 设 $b_k(s)$ 由式 (4) 给出, 令 $s = j\omega$, 如果

1) 对于 $\operatorname{Re}(s) \geq 0$,

$$B(s, 0) = b_0(s) \neq 0 \quad (8)$$

2) 对于所有 $\omega \in \mathbf{R}$ 和 $|z| > 1$

$$B(j\omega, z) = b_0(j\omega) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(j\omega)z^{-\tau_k} \neq 0 \quad (9)$$

则拟多项式 (3) 稳定.

证明. 由引理 1 的条件 1), 对于 $\operatorname{Re}(s) \geq 0, B(s, 0) \neq 0$ 等价于 $b_0(s)$ 是稳定的, 因为 $b_0(s) = B(s, 0)$. 由引理 1 知

$$B(j\omega, z) = b_0(j\omega) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(j\omega)z^{-\tau_k} \neq 0 \quad (10)$$

令式 (10) 中 $u = z^{-1}$, 对于任意 ω 有:

$$|b_0(j\omega)| > \sum_{1 \leq k \leq K} |b_k(j\omega)| \geq \left| \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(j\omega)z^{-\tau_k} \right| \quad (11)$$

根据式 (11) 与 Rouché 定理, 因为对于 $|u| = 1$,

$$|b_0(j\omega)| > \left| \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(j\omega)z^{\tau_k} \right| \quad (12)$$

所以 $b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)u^{\tau_k}$ 具有与 $b_0(s)$ 在 $|u| \leq 1$ 内有相同的零点. 但是 $b_0(s)$ 在 $|u| \leq 1$ 内没有零点, 所以 $b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)u^{\tau_k}$ 在 $|u| \leq 1$ 内亦无零点. \square

由定理 2 可以得到下列推论.

推论 1. 如果拟多项式 $B(s)$ 可分解为下列连乘积

$$B(s) = \prod_{1 \leq k \leq K} (s + a_k e^{-\tau_k s} + b_k)$$

这里, $\tau_k > 0, k = 1, \dots, K$ 为有限常数, 则拟多项式 $B(s)$ 的稳定条件是 $0 < a_k < b_k$.

对于 LTD-DD 系统的稳定性, 定理 2 是一个非常保守的稳定条件. 为了解决该问题, 本文进一步提出以下定理.

定理 3. 如果

1)

$$B(s, 1) = b_0(s) + \sum_{0 \leq k \leq K} b_k(s) \neq 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (13)$$

2) 对于 $\omega \in [0, 2\pi]$ 和 $|z| > 1$,

$$B(s, e^{j\omega}) = b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)e^{-j\omega\tau_k} \neq 0 \quad (14)$$

则式 (3) 的拟多项式 $B(s)$ 稳定.

证明. 反证法: 假设定理 3 的条件成立, 但拟多项式 $B(s)$ 存在 s_1 使 $b_0(s_1) + \sum_{0 \leq k \leq K} b_k(s_1) = 0$, 对于 $\operatorname{Re}(s_1) \geq 0$. 因为对于 $\operatorname{Re}s \geq 0, B(s, 1) \neq 0$. 而式 (14) 中 $B(s, e^{j\omega})$ 的根随 ω 连续变化, $\omega \in [0, 2\pi]$, 所以在 $0 \leq \omega_0 \leq \omega_1$, 存在 ω_0 及一个根 $s_0 = j\omega_0$ 使 $B(s_0, e^{j\omega_0}) = 0$, 而这与式 (14) 矛盾. 因为如果 $s_0 = 0$, 则 $e^{j\omega} = 1$, (即 $B(s_0, 1) = 0$). 或 $s_0 \neq 0$, 则 $|e^{j\omega}| = 1$, (即 $B(s_0, e^{j\omega_0}) = 0$). 因此对于 $\operatorname{Re}s \geq 0$ 和 $\omega \in [0, 2\pi], B(s, e^{j\omega}) \neq 0$. 进而 $B(s) = b_0(s) + \sum_{0 \leq k \leq K} b_k(s)e^{-s\tau_k}$ 在 $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ 无零点. \square

定理 3 中 s 和 ω 是相互独立的, 对于给定 ω , 允许将式 (14) 中的 $B(s, e^{j\omega})$ 视为复系数多项式. 利用传统的一维稳定性检验算法对频率 ω 扫描^[10], 可确定 $B(s, e^{j\omega})$ 的稳定性. 定理 3 的保守性主要来自二维多项式的两变量 s 和 ω 是相互独立的. 为进一步减小拟多项式 $B(s)$ 稳定性判据的保守性, 本文提出下列定理.

定理 4. 由式 (3) 设

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0(-j\omega) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(-j\omega)e^{j\omega\tau_k}}{b_0(-j\omega) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(-j\omega)} \quad (15)$$

$H(e^{j\omega})$ 的实部为 $u(\omega)$, 虚部为 $v(\omega)$, 有:

$$u(\omega) = \operatorname{Re}H(e^{j\omega}), \quad v(\omega) = \operatorname{Im}H(e^{j\omega}) \quad (16)$$

则拟多项式 $B(s)$ 稳定的充分必要条件是

1)

$$B(s, 1) = b_0(s) + \sum_{0 \leq k \leq K} b_k(s) \neq 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (17)$$

2) 对于 $\omega \in [0, 2\pi]$, 曲线 $(u(\omega), v(\omega))$ 不环绕原点也不通过原点.

证明. 由式 (3) 和式 (17) 可构造一传递函数

$$H(s) = \frac{b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)e^{-s\tau_k}}{b_0(s) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)} \quad (18)$$

令 $z = e^{-s}$, 则 s 域的右半平面被映射到单位圆内, 由式 (18) 得

$$H(z) = \frac{b_0(-\ln(z)) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(s)z_k^T}{b_0(-\ln(z)) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(-\ln(z))} \quad (19)$$

由定理 4 的条件 1, $B(s, 1)$ 为 Hurwitz 稳定, 所以式 (19) 中 $H(z)$ 的分母多项式 $B(z, 1) = b_0(-\ln(z)) + \sum_{1 \leq k \leq K} b_k(-\ln(z))$ 无 z 域单位圆内的零点. 因为 $z = e^{-s}$, 所以 $H(z)$ 无 z 域单位圆内的零点等价于拟多项式 $B(s)$ 无 s 域右半平面的根. 由幅角定理, 当 z 从单位圆周 $|z| = 1$ 上某一点 z_0 出发, 沿 $|z| = 1$ 正向绕行一周而回到 z_0 , $\ln H(z)$ 连续变化, 其实部从 $\ln|H(z)|$ 开始连续变化, 最终又回到 $\ln|H(z)|$; 而其虚部能否回到原来的值取决于 $H(z)$ 是否存在单位圆盘内的零点. 设 φ_0 为 $\arg H(z_0)$ 在开始时的值, φ_1 为其绕行单位圆周后的值, 于是得

$$\oint_{|z|=1} \frac{\dot{H}(z)}{H(z)} dz = \Delta_{|z|=1} \arg H(z) = \varphi_1 - \varphi_0$$

因为 z 在单位圆周 $|z| = 1$ 上, 有 $z = e^{j\omega}$ 和 $\ln(z) = j\omega$, 代入式 (19) 得到式 (16) 中的 $H(e^{j\omega})$. 根据定理 4 的条件 2, 曲线 $(u(\omega), v(\omega))$ 不环绕与通过原点, 由幅角定理, 即 $H(z)$ 不存在单位圆盘内的零点. 因为 $\Delta_{|z|=1} \arg H(z) = 0$, 不存在单位圆盘内的零点等价于拟多项式 $B(s)$ 无 s 域右半平面的根. □

3 应用例

为说明本文提出的定理如何应用, 考虑以下例子. 例 1 表明定理 2 是 LTD-DD 系统稳定的充分条件.

例 1. 下列拟多项式 $B(s)$ 对应一个一阶 LTD-DD 系统

$$B(s) = s + ae^{-\tau s} + b \quad (20)$$

其中, a, b 和 τ 是常数. 确定 a 和 b 使式 (20) 的拟多项式 $B(s)$ 稳定.

由定理 2, 有 $b_0(s) = s + b, b_1(s) = a$. 为满足定理 2 的两个条件, $b_0(s) = s + b$ 稳定, 及 $|b_0(j\omega)| > |b_1(j\omega)| = a$, 需要 $0 < a < b$, 该结果由推论 1 亦可得到.

定理 2 的稳定条件非常保守, 无法处理下列例子, 需要使用定理 3.

例 2. 下列拟多项式 $B(s)$ 对应一个二阶 LTD-DD 系统:

$$B(s) = (s + e^{-\tau s})^2 + 1 \quad (21)$$

确定该拟多项式的稳定延迟区间. 根据定理 3 的式 (13), 有:

$$B(s, 1) = (s + 1)^2 + 1 \quad (22)$$

由一维 Hurwitz 稳定性检验^[10] 可知 $B(s, 1)$ 为稳定. 根据定理 3 的式 (14), 检验下列 2-D 多项式的稳定性,

$$B(s, e^{j\omega}) = (s + e^{-j\omega\tau})^2 + 1 = 0, \omega \in [0, 2\pi] \quad (23)$$

对于 $\omega \in [0, 2\pi]$ 和 $\tau \in [0, 0.25]$, $B(s, e^{j\omega})$ 的根实部最大值曲面由图 1 所示, 满足定理 3 的条件 2. 这意味着式 (21) 的拟多项式在 $\tau \in [0, 0.25]$ 区间稳定.

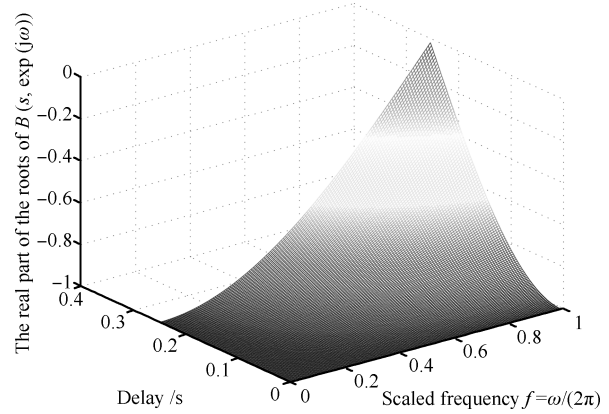


图 1 式 (23) 中 $B(s, e(j\omega))$ 的根实部最大值曲面

Fig. 1 The curve surface of maximum real part of roots of $B(s, e(j\omega))$ in (23)

下例取自文献 [13].

例 3. 设零输入 LTD-DD 系统为^[13]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{1 \leq k \leq 4} A_k \mathbf{x}(t - \tau_k) \quad (24)$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -29.17 & -56 & -36.7 & -10.1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1.55 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.7 & 0 & -0.34 & -0.6 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.08 & -0.7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

根据文献 [13], 选取 $\tau_1 = 0.5, \tau_2 = 0.3, \tau_3 = 0.169, \tau_4 = 0.26$. 采用本文定理 4 检验该系统, 定理 4 的两个条件均不满足: $B(s, 1) = \det \left[sI - A_0 - \sum_{1 \leq k \leq 4} A_k e^{-s\tau_k} \right]$ 存在右半平面的根, $\lambda_{1,2} = 0.5885 \pm j4.3818$; 对于 $\omega \in [0, 2\pi]$, 曲线 $(u(\omega), v(\omega))$ 环绕原点, 如图 2 所示, 所以系统 (24) 不稳定. 对系统 (24) 进行仿真, 求得该系统的状态响应如图 3 所示. 因为系统 (24) 的状态响应趋于无穷, 所以该系统是不稳

定的. 而文献 [13] 的定理 4 却判定该系统为稳定, 因此, 文献 [13] 的定理 4 存在问题.

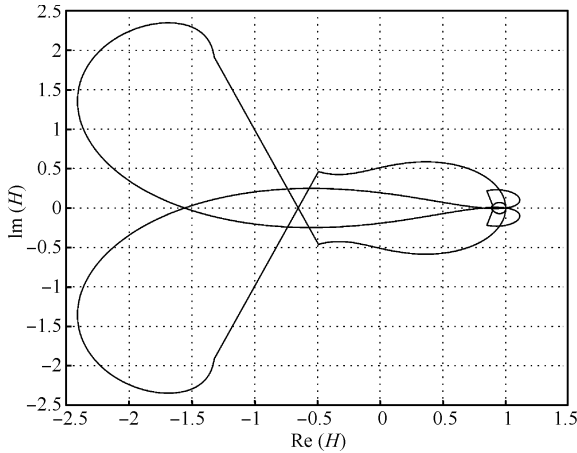


图 2 式 (24) 系统的 $H(e(j\omega))$ 在 (u, v) 平面上的曲线

Fig. 2 The curve of $H(e(j\omega))$ in system (24) on (u, v) plane

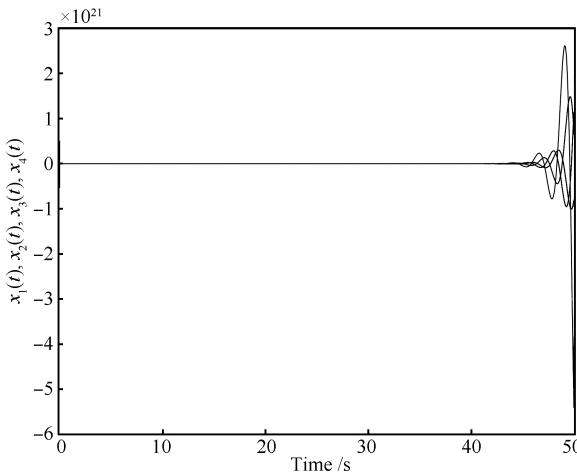


图 3 式 (24) 零输入 LTD-DD 系统的状态响应

Fig. 3 The state response of zero-input LTD-DD system in (24)

4 结论

本文提出 LTD-DD 系统稳定的两个充分条件: 定理 2 和定理 3, 一个充要条件: 定理 4. 定理 4 可解决 2-D 稳定性判据的保守性问题与现有 LMI 稳定性检验算法的保守性问题. 应用例说明基于本文提出稳定性判据的 LTD-DD 系统稳定性检验是简单的和有效的.

References

- 1 Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1931–1937
- 2 Xu S Y, Lam J, Zou Y. Further results on delay-dependent robust stability conditions of uncertain neutral systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, **15**(5): 233–246
- 3 Zhang Xian-Ming, Wu Min, He Yong. Delay-dependent stability for linear neutral type systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(3): 624–628
(张先明, 吴敏, 何勇. 中立型线性时滞系统的时滞相关稳定性. *自动化学报*, 2004, **30**(4): 624–628)

- 4 Li T, Gao L, Lin C. A new criterion of delay-dependent stability for uncertain time-delay systems. *IET Control Theory and Applications*, 2007, **1**(3): 611–616
- 5 Park G S, Choi H L, Lim J T. On stability of linear time-delay systems with multiple delays. *International Journal of Systems Science*, 2008, **39**(8): 839–852
- 6 Du B, Lam J, Shu Z, Wang Z. A delay-partitioning projection approach to stability analysis of continuous systems with multiple delay components. *IET Control Theory and Applications*, 2009, **3**(4): 383–390
- 7 Xiao Y. 2-D algebraic test for robust stability of time-delay systems with interval parameters. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2006, **17**(4): 802–810
- 8 Xiao Y. 2-D algebraic test for robust stability of quasipolynomials with interval parameters. *Asian Journal of Control*, 2006, **8**(2): 174–179
- 9 Xiao Yang, Kim K. Stability test for time-delay partial differential equation systems. *Journal of Applied Sciences Electronics and Information Engineering*, 2008, **26**(6): 655–660
(肖扬, Kim K. 时滞偏微分方程系统的稳定性检验. *应用科学学报*, 2008, **26**(6): 655–660)
- 10 Xiao Yang. *Stability Analysis of Multidimensional Systems*. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 2003. 187–191
(肖扬. 多维系统的稳定性分析. 上海: 上海科学技术出版社, 2003. 187–191)
- 11 Chen J, Niculescu S I, Fu P L. Robust stability of quasipolynomials: frequency-sweeping conditions and vertex tests. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(5): 1219–1234
- 12 Munz U, Ebenbauer C T, Haag T, Allgower F. Stability analysis of time-delay systems with incommensurate delays using positive polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(5): 1019–1024
- 13 Sipahi R, Delice I I. Advanced clustering with frequency sweeping methodology for the stability analysis of multiple time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(2): 467–472

朱莹 北京航空航天大学电子与信息工程学院博士研究生. 北京航空航天大学研究中心高级工程师. 主要研究方向为多维系统设计与通信与电子系统. 本文通信作者. E-mail: zhuying713272@126.com
(ZHU Ying Ph. D. candidate at the School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, and senior engineer at Beijing Aeronautical Technology Research Center. Her research interest covers design of multidimensional systems and communication and electronics systems. Corresponding author of this paper.)

高其娜 北京航空航天大学电子与信息工程学院博士研究生. 北京航空航天大学研究中心工程师. 主要研究方向为多维系统设计与预警系统设计与实现. E-mail: nianming@gmail.com
(GAO Qi-Na Ph. D. candidate at the School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, and engineer at Beijing Aeronautical Technology Research Center. Her research interest covers design of multidimensional systems and design and implementation of warning systems.)

肖扬 北京交通大学计算机与信息技术学院教授. 主要研究方向为多维系统与多维信号处理. E-mail: yxiao@bjtu.edu.cn
(XIAO Yang Professor at the School of Computer and Information Technology, Beijing Jiaotong University. His research interest covers multidimensional systems and multidimensional signal processing.)