

基于非线性映射的约束系统 自适应反推控制

郭涛¹ 王丁磊¹ 王爱民¹

摘要 针对基于障碍 Lyapunov 函数的非线性约束系统反推控制中, 控制器结构复杂、约束量初值选取区间小、会引入额外参数等问题, 提出了一种新的基于非线性映射的自适应反推控制方案. 该方法扩大约束量的初值选取区间为整个约束区间, 增加了系统初值选取和控制器设计的便易性. 约束量被映射至实数空间中, 因此映射后的新系统可以直接应用反推法设计控制器, 简化了控制器结构且不会引入额外参数. 证明了映射前后系统具有一致的收敛性, 保证闭环系统所有信号一致有界, 并且跟踪误差渐近收敛于零. 仿真结果进一步验证了本文方法的有效性.

关键词 约束系统, 反推控制, 非线性映射, Lyapunov 稳定性

引用格式 郭涛, 王丁磊, 王爱民. 基于非线性映射的约束系统自适应反推控制. 自动化学报, 2013, 39(9): 1558–1563

DOI 10.3724/SP.J.1004.2013.01558

Adaptive Backstepping Control for Constrained Systems Using Nonlinear Mapping

GUO Tao¹ WANG Ding-Lei¹ WANG Ai-Min¹

Abstract In this paper, a novel nonlinear mapping based adaptive backstepping control is presented for nonlinear systems with output constraint to overcome the problems faced by barrier Lyapunov function based backstepping control, such as complex controller structure, small set for initial value of constrained output and extra parameters employment. The constrained output can take any initial value within the output constrained space, so added flexibility is achieved in the control design. By mapping the constrained output into the real number set, the backstepping control design can be directly used for the transformed system, while simultaneously prevent the constraints from being violated. A similar convergence feature is proved between the system and its mapping, so that the stability of the closed-loop system is guaranteed in the sense that all closed-loop signals are uniformly bounded and the tracking error converges to zero asymptotically. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed control.

Key words Constrained system, backstepping control, nonlinear mapping, Lyapunov stability

Citation Guo Tao, Wang Ding-Lei, Wang Ai-Min. Adaptive backstepping control for constrained systems using nonlinear mapping. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(9): 1558–1563

严格来说, 任何系统都要受到各种实际条件的约束. 常见的约束条件有物理中断、饱和、死区以及为了保证系统性

能和安全而做的一些限制等. 这些约束会对系统的运行情况造成影响, 而如果约束条件得不到满足, 将会导致控制性能下降、闭环不稳定, 甚至造成系统破坏. 由于理论发展和实际的需要, 如何处理系统中的约束条件一直是一个重要的研究课题, 产生了一些值得注意的结果, 如基于不变集理论的控制设计^[1]、模型预测控制^[2]、无模型映射学习控制^[3–4] 和基于极值搜索方法的控制^[5–6] 等.

积分反推控制 (Integrator backstepping)^[7] 是一种基于 Lyapunov 稳定性理论反向递归设计控制器的非线性设计方法, 所要求的系统具有严格反馈的形式. 反推法通过在定义域上构造径向无界的 Lyapunov 函数, 并据此来设计控制器, 从而达到控制目的. 反推法同自适应控制方法相结合, 便产生了所谓的自适应反推控制方法^[8–14], 突破了此前研究非线性系统的控制问题时所必须的一些假设条件, 如匹配条件、增长条件等, 因而成为非线性控制领域的一种重要的控制方法, 引起了众多学者的重视. 近年来, 反推法被延伸到多种不同的系统, 如关联大系统、时滞系统、随机系统、非仿射系统等^[9–14], 并被成功应用到很多的实际控制问题中, 如机器人、飞机和导弹的控制等. 最近, 反推法也被引入到非线性约束系统的控制问题中.

为满足系统的约束条件, 在应用反推法时, 可以以约束区间为定义域来构造 Lyapunov 函数. 这样, 当约束量趋向于约束条件时, Lyapunov 函数值将趋向于无穷大, 进而保证约束量始终保持在约束区间内. 根据这个思想设计的 Lyapunov 函数被称为障碍 Lyapunov 函数 (Barrier Lyapunov function, BLF). 首先将这种方法应用于约束非线性系统的是文献 [15], 在该文献中, Ngo 等通过构造 log 型的对称障碍 Lyapunov 函数 (Symmetric BLF, SBLF), 解决了一类 Brunovsky 类型约束系统的控制问题. 沿着这一思路, Tee 等在文献 [16] 中研究了一类输出受限的严格反馈非线性系统的控制问题. 与文献 [15] 不同的是, 除了将 SBLF 应用到严格反馈非线性系统之外, 该文献还提出了一种新的 log 型的分段 BLF, 即非对称障碍 Lyapunov 函数 (Asymmetric BLF, ABLF). 同 SBLF 相比, ABLF 使得闭环系统的约束变量初值选择区间可以是非对称的, 以便扩大该初值的选取区间, 增加控制器设计的便易性, 尽管该初值区间仍然仅为约束区间的子集. 接着, 基于 ABLF 的反推控制又被延伸到输出反馈非线性系统^[17–19]、全状态约束非线性系统^[20] 和不确定约束非线性系统^[18] 等的控制问题中. 文献 [21–22] 则进一步研究了含有时变约束条件的非线性系统的自适应控制问题. 在文献 [23] 中, 通过假设约束条件时变, 约束变量的初值区间被进一步扩大整个约束区间. 这种方法还被应用到双向驱动的微机电系统 (Micro electromechanical systems, MEMS)^[19, 23]、机器人^[24]、柴油发动机^[25] 以及主动电磁轴承^[26] 等实际控制问题中.

值得指出的是, 尽管应用 BLF 来解决严格反馈非线性约束系统的控制问题已取得了一些有意义的结果, 但基于 BLF 的控制方法存在控制器结构复杂、初值选取区间小、分段的 ABLF 需专门的手段保证连续性和可导性等问题. 本文针对一类输出受限的不确定严格反馈非线性约束系统, 提出一种新的基于非线性映射 (Nonlinear mapping, NM) 的反推控制方案. 同基于 BLF 的控制方案相比, 本文方法具有如下特点: 1) 将约束区间映射为整个实数空间, 映射后的新系统可以直接应用反推法设计控制器, 同时初值选取区间扩大为整个约束区间; 2) 反推法的直接应用使得所设计的控制器结构简单且不需要额外的参数; 3) 由于传统的反推法可以直接应用, 因

收稿日期 2012-03-23 录用日期 2012-07-05
Manuscript received March 23, 2012; accepted July 5, 2012
河南省科技攻关项目 (112102210126), 河南省自然科学基金 (2011B120001) 资助

Supported by Key Scientific and Technological Research of Henan Province (112102210126) and Natural Science Foundation of Henan Province (2011B120001)

本文责任编辑 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang

1. 安阳师范学院计算机与信息工程学院 安阳 455002
1. School of Computer and Information Engineering, Anyang Normal University, Anyang 455002

此本文方法易于扩展至多种不同的系统, 如上文提到的关联大系统、时滞系统、随机系统、不确定系统等. 最后, 证明了映射后的新系统与原系统具有相似的收敛和稳定性, 因而闭环系统的稳定性可以方便地由 Lyapunov 稳定性理论来证明.

1 问题描述

考虑下述输出受限的不确定非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + h_i(\bar{x}_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= u + h_n(\mathbf{x}) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, y 和 u 分别是系统状态、系统输出和控制输入, $h_i(\bar{x}_i)$, $i = 1, \dots, n$ 为未知光滑函数, $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$. 系统输出 y 要求保持在区间 $\Omega_c = \{-k_c < y(t) < k_c\}$, $\forall t > 0$ 内, 其中 $k_c > 0$ 为常数. 控制目标是设计自适应控制器使得闭环系统所有信号一致有界, 系统输出可以跟踪参考信号 $y_r(t)$ 且跟踪误差渐近收敛为零, 同时保证约束条件不被违背.

假设 1. 在区间 $[0, +\infty)$ 上, 参考信号 $y_r(t)$ 及其前 n 阶导数已知, 且分段连续.

假设 2. 参考信号始终保持在约束区间内. 即对于任意 $k_c > 0$, 存在正数 $k_y < k_c$, 有 $-k_y \leq y_r(t) \leq k_y, \forall t > 0$.

假设 3. 未知光滑函数 $h_i(\cdot)$ 满足下述参数线性化 (linear-in-the-parameters, LIP) 条件:

$$h_i(\bar{x}_i) = \theta^T \phi_i(\bar{x}_i), \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

其中, ϕ_1, \dots, ϕ_n 为已知光滑函数, $\theta \in \mathbf{R}^l$ 为一未知参数向量且满足 $\|\theta\| \leq \theta_M$, 其中 θ_M 为正常数.

注 1. 本文把约束区间定义为对称的, 这并不失其一般性. 对于非对称的约束区间, 总可以通过平移坐标系使得约束区间对称. 也就是说, 假设约束区间为 $x_1(t) \in (k_{c1}, k_{c2})$, 其中 $k_{c1} > 0, k_{c2} > 0$, 且 $k_{c1} \neq k_{c2}$, 引入坐标变换

$$\xi = x_1 - \frac{k_{c2} - k_{c1}}{2} \tag{3}$$

那么

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{x}_1 = x_2 + h_1(x_1) = \\ &x_2 + h_1\left(\xi + \frac{k_{c2} - k_{c1}}{2}\right) = x_2 + h_1^*(\xi) \end{aligned} \tag{4}$$

将 ξ 看作为系统输出, 则 $\xi \in \Omega_c$, 其中 $k_c = (k_{c2} + k_{c1})/2$.

2 非线性映射

定义一一映射 $\mathcal{H}: x_1 \rightarrow x_1^*$ 如下:

$$x_1^* = \log \frac{k_c + x_1}{k_c - x_1} \tag{5}$$

显然 \mathcal{H} 为连续的初等函数, 如图 1 所示. 由式 (5) 可得:

$$x_1 = \mathcal{H}^{-1} = k_c \left(1 - \frac{2}{e^{x_1^*} + 1}\right) \tag{6}$$

则 x_1 的导数为

$$\dot{x}_1 = \frac{2k_c e^{x_1^*} \dot{x}_1^*}{(e^{x_1^*} + 1)^2} \tag{7}$$

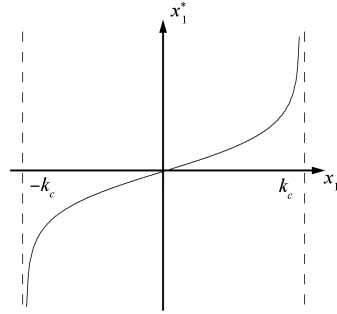


图 1 非线性映射 \mathcal{H}

Fig. 1 Nonlinear mapping function \mathcal{H}

将式 (7) 代入式 (1) 中, 并考虑式 (2), 有:

$$\dot{x}_1^* = \frac{1}{2k_c} \left(e^{x_1^*} + e^{-x_1^*} + 2\right) x_2 + \theta^T \psi_1(x_1^*) \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} \theta^T \psi_1(x_1^*) &= \frac{1}{2k_c} \left(e^{x_1^*} + e^{-x_1^*} + 2\right) \times \\ &\theta^T \phi_1\left(k_c - \frac{2k_c}{e^{x_1^*} + 1}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

进一步, 记 $x_2^* = x_2, \dots, x_n^* = x_n$, 且定义

$$\phi_i\left(k_c - \frac{2k_c}{e^{x_1^*} + 1}, x_2^*, \dots, x_i^*\right) = \psi_i(\bar{x}_i^*), \quad i = 2, \dots, n \tag{10}$$

那么系统 (1) 可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= g_1(x_1^*)x_2^* + \theta^T \psi_1(x_1^*) \\ \dot{x}_i^* &= x_{i+1}^* + \theta^T \psi_i(\bar{x}_i^*), \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n^* &= u + \theta^T \psi_n(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \tag{11}$$

其中, $g_1(x_1^*) = \frac{1}{2k_c}(e^{x_1^*} + e^{-x_1^*} + 2)$ 对任意 $x_1^* \in (-\infty, \infty)$ 均为已知正函数. 同样, 由于参考信号 $y_r(t)$ 也在区间 $(-k_c, k_c)$ 内取值, 因此可令

$$y_r^* = \log \frac{k_c + y_r}{k_c - y_r} \tag{12}$$

根据非线性映射 \mathcal{H} 的性质可知, x_1^* 为一无约束的变量, 可以在整个实数空间 \mathbf{R} 内取值. 下文中, 将对式 (11) 直接应用反推控制器设计, 并且下面的定理证明, 随着 x_1^* 渐近趋向于 y_r^* , x_1 将渐近趋向于 y_r .

引理 1. 考虑集合 $A = \{y_r(t) : -k_c < y_r(t) < k_c\}$, 集合 $B = \{y_r^*(t) : y_r^*(t) \in \mathbf{R}\}, \forall t \in [0, \infty)$, 以及一一映射 $y_r^* = \mathcal{H}(y_r)$. 如果 $y_r(t) \in \mathbf{C}^n$ 且有界, 那么 $y_r^*(t) \in \mathbf{C}^n$ 且有界.

证明. 由于 $\log(\cdot)$ 在其定义域内是光滑函数, 因此当 $y_r \in \Omega_c$ 时初等函数 $\mathcal{H}(y_r) \in \mathbf{C}^n$. 又因参考信号 y_r 满足 $y_r(t) \in \mathbf{C}^n, y_r(t) \in \Omega_c, \forall t \geq 0$, 并且

$$y_r^*(t) = \mathcal{H}(y_r(t)) = (\mathcal{H} \circ y_r)(t) \tag{13}$$

根据微分链式法则, 可知 $y_r^*(t)$ 的第 i 阶导数存在, $i = 1, \dots, n$, 因此 $y_r^*(t) \in \mathbf{C}^n$.

此外, 由 $y_r(t)$ 的有界性和单调递增的一一映射 (5) 可知, $y_r^*(t)$ 满足

$$-\log \frac{k_c + k_y}{k_c - k_y} \leq y_r^*(t) \leq \log \frac{k_c + k_y}{k_c - k_y} \quad (14)$$

因此, $y_r^*(t)$ 有界. □

引理 2. 考虑集合 $A = \{x_1(t) : -k_c < x_1(t) < k_c\}$, 集合 $B = \{x_1^*(t) : x_1^*(t) \in \mathbf{R}\}$, $\forall t \in [0, \infty)$, 以及一一映射 $x_1^* = \mathcal{H}(x_1)$. 如果 $x_1^*(t) \rightarrow b(t)$, $b(t) \in B$, 那么 $x_1(t) \rightarrow a(t) = \mathcal{H}^{-1}(b(t))$.

证明. 由于 \mathcal{H} 在其定义域内是连续的初等函数, 因此其逆映射 \mathcal{H}^{-1} 在其定义域内也是连续的初等函数. 定义 $e^*(t) = x_1^*(t) - b(t)$ 和 $e(t) = x_1(t) - a(t)$, 根据式 (6), 有

$$e = x_1 - a = 2k_c \left[\frac{e^{x_1^*} - e^b}{(e^b + 1)(e^{x_1^*} + 1)} \right] \quad (15)$$

那么

$$\lim_{e^* \rightarrow 0} e = \lim_{x_1^* \rightarrow b} 2k_c \left[\frac{e^{x_1^*} - e^b}{(e^b + 1)(e^{x_1^*} + 1)} \right] = 0 \quad (16)$$

也就是说, 随着 $x^*(t) \rightarrow b(t)$, 有 $x(t) \rightarrow a(t)$. □

注 2. 映射等效性: 首先, 根据引理 1, $y_r^*(t) = \mathcal{H}(y_r(t)) \in \mathbf{C}^n$ 且有界, 因此可作为映射后系统 (11) 的参考信号; 其次, 根据式 (5), 无论 x_1^* 在实数空间 \mathbf{R} 内取何值, x_1 均保持在约束区间 Ω_c 内; 最后, 根据引理 2, 当映射后系统 (11) 中 x_1^* 趋向于 $y_r^*(t)$ 时, 原系统 (1) 中 x_1 将趋向于 $y_r(t)$. 这说明, 映射前后的系统是等效的.

注 3. 由于映射后形成的新系统 (11) 仍然具有严格反馈的形式, 并且不存在对输出的约束, 因此借用文献 [9-14] 中的技巧, 本文方法容易扩展到其他类型的系统, 如时滞约束系统、随机约束系统、约束关联大系统和约束非仿射系统等. 此外, 同神经网络、模糊逻辑系统等相结合, 本文方法还可以延伸到自适应神经网络控制、自适应模糊控制等^[27-30].

3 控制器设计

由 $g_1(x_1^*) > 0$ 知, 对系统 (11) 进行控制器设计时, 不存在控制奇异性问题. 此外, 根据引理 1 可知, y_r^* 有界且 n 阶可导, 因此可用于反推设计. 定义坐标变换

$$\begin{cases} z_1^* = x_1^* - y_r^* \\ z_i^* = x_i^* - \alpha_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (17)$$

由于应用反推法进行控制器的设计已经有了大量的研究成果, 为了简化, 本文省略了应用反推法对式 (11) 进行控制器设计的具体步骤. 有关反推法的详细设计可参考文献 [8].

考虑正定函数

$$V_1 = \frac{1}{2}(z_1^*)^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (18)$$

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}(z_i^*)^2 \quad (19)$$

其中, $\Gamma = \Gamma^{-1} > 0$ 为自适应增益, $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. 自适应反推控制器可设计如下:

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} \left(-c_1 z_1^* - \hat{\theta}^T \mathbf{w}_1 + \dot{y}_r^* \right) \quad (20)$$

$$\alpha_2 = g_1 z_1^* - c_2 z_2^* - \hat{\theta}^T \mathbf{w}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1^*} g_1 x_2^* + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial (y_r^*)^{(k)}} (y_r^*)^{(k+1)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 \quad (21)$$

$$\alpha_i = z_{i-1}^* - c_i z_i^* - \hat{\theta}^T \mathbf{w}_i + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1^*} g_1 x_2^* + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k^*} x_{k+1}^* + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial (y_r^*)^{(k)}} (y_r^*)^{(k+1)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \mathbf{w}_i z_k, \quad i = 3, \dots, n \quad (22)$$

$$\mathbf{w}_1 = \psi_1(x_1^*) \quad (23)$$

$$\mathbf{w}_i = \psi_i(\bar{x}_i^*) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k^*} \psi_k(\bar{x}_k^*) \quad (24)$$

$$\tau_1 = \mathbf{w}_1 z_1^* \quad (25)$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \mathbf{w}_i z_i^*, \quad i = 2, \dots, n \quad (26)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n \quad (27)$$

$$u = \alpha_n \quad (28)$$

由此可得闭环系统

$$\dot{z}_1^* = -c_1 z_1^* + g_1 z_2^* + \tilde{\theta}^T \mathbf{w}_1 \quad (29)$$

$$\dot{z}_2^* = -g_1 z_1^* - c_2 z_2^* + z_3^* + \tilde{\theta}^T \mathbf{w}_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left(\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right) \quad (30)$$

$$\dot{z}_i^* = -z_{i-1}^* - c_i z_i^* + z_{i+1}^* + \tilde{\theta}^T \mathbf{w}_i + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\Gamma \tau_i - \dot{\hat{\theta}} \right) + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \mathbf{w}_i z_k^* \quad (31)$$

$$\dot{z}_n^* = -z_{n-1}^* - c_n z_n^* + \tilde{\theta}^T \mathbf{w}_n + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \left(\Gamma \tau_n - \dot{\hat{\theta}} \right) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \mathbf{w}_n z_k^* \quad (32)$$

显然, 沿着式 (27)、(29)~(32), 可得 V_n 的导数为

$$\dot{V}_n = -\sum_{i=1}^n c_i (z_i^*)^2 \quad (33)$$

引理 3 (LaSalle-Yoshizawa)^[8]. 设 $\mathbf{x} = 0$ 是系统 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的一个平衡点, f 关于 \mathbf{x} 满足局部 Lipschitz 条件, 关于 t 一致. 设 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为一连续可微、正定且径向无界的函数, 且对于 $\forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t) \leq -W(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (34)$$

其中, W 为连续函数. 那么 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$ 的所有解全局一致有界且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0 \quad (35)$$

此外, 若 $W(\mathbf{x})$ 正定, 那么平衡点 $\mathbf{x} = 0$ 为全局一致渐近稳定.

定理 1. 考虑由式 (1)、(27) 和 (28) 组成的闭环系统. 在满足假设 1 和假设 2 的情况下, 若初始条件为 $\mathbf{x}(0) \in \Omega_{\mathbf{x}(0)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : -k_c < x_1(0) < k_c\}$, 那么:

- 1) 对于 $\forall t \geq 0$, 系统输出 $y(t)$ 将始终保持在集合 $\Omega_c = \{y \in \mathbf{R} : -k_c < y < k_c\}$ 内, 即系统约束条件不会违背;
- 2) 所有闭环信号一致有界;
- 3) 跟踪误差 $z_1(t)$ 渐近收敛于零, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $y(t) \rightarrow y_r(t)$.

证明. 上述 1)~3) 依次证明如下:

1) 由式 (33) 和引理 1, 可知 z_1^* 和 y_r^* 有界, 所以 x_1^* 有界. 根据式 (5) 和式 (6), 可知对于 $\forall t > 0$, 信号 x_1 将始终保持在集合 Ω_c 内.

2) 由式 (33) 及自适应反推法的稳定性理论^[8], 可知信号 $z_1^*, \dots, z_n^*, x_1^*, \dots, x_n^*, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \hat{\theta}$ 和 u 一致有界. 根据式 (5) 和式 (6) 可知, x_1, \dots, x_n 一致有界. 因此, 所有闭环信号一致有界.

3) 由式 (33) 可知, 对于系统 (11) 来说, 平衡点 $z^* = 0$ 是全局一致稳定的. 进一步根据引理 3 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统所有解都将渐近收敛于 $z^* = 0$. 根据引理 2 及式 (5) 和式 (6) 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统 (1) 所有解将收敛于 $z = 0$, 即跟踪误差 $z_1(t)$ 渐近收敛于零, 也就是说, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $y(t) \rightarrow y_r(t)$. \square

注 4. 文献 [16–20] 同样研究了约束区间不随时间变化的情况. 文献 [16] 首次将 SBLF 和 ABLF 方法应用于严格反馈非线性系统. 文中, 约束量, 即系统输出的初值 $y(0)$ 要求满足

$$\text{SBLF: } y(0) \in (y_r(0) - k_{b1}, y_r(0) + k_{b1}) \quad (36)$$

$$\text{ABLF: } y(0) \in (y_r(0) - k_{a1}, y_r(0) + k_{b1}) \quad (37)$$

这里 $k_{a1} < k_c$ 和 $k_{b1} < k_c$ 的具体含义见文献 [16]. 这些区间均是约束区间 Ω_c 的子集. 本文方法对约束量初值区间没有要求, 即约束量初值可以取约束区间内的任何值. 该区间为约束量初值可能的最大区间.

注 5. 基于 SBLF 得到的稳定化函数 α_1 和 α_2 如下:

$$\alpha_1 = -\hat{\theta}^T \mathbf{w}_1 - (k_{b1}^2 - z_1^2) c_1 z_1 + \dot{y}_r \quad (38)$$

$$\alpha_2 = -\hat{\theta}^T \mathbf{w}_2 - c_2 z_2 - \frac{z_1}{k_{b1}^2 - z_1^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(j+1)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Gamma \tau_2 \quad (39)$$

而基于 ABLF 设计的 α_1 和 α_2 如下:

$$\alpha_1 = -\hat{\theta}^T \mathbf{w}_1 + \dot{y}_r - (q(k_{b1}^p - z_1^p) + (1-q)(k_{a1}^p - z_1^p)) c_1 z_1^m \quad (40)$$

$$\alpha_2 = -\hat{\theta}^T \mathbf{w}_2 - c_2 z_2 - \left(\frac{q}{k_{b1}^p - z_1^p} + \frac{1-q}{k_{a1}^p - z_1^p} \right) z_1^{p-1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \sum_{k=0}^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d^{(k)}} y_d^{(j+1)} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \Gamma \tau_2 \quad (41)$$

式 (40) 和式 (41) 为与 q 有关的分段函数. 这些式子中 p 、 q 和 m 的含义见文献 [16]. 由式 (20) 和式 (21) 可知, 本文得到的稳定化函数更简单, 因而可以简化控制器结构, 且不会引入如式 (38)~(41) 中的 k_{a1} 和 k_{b1} 这样的参数.

4 仿真实例

为说明本文所提控制方案的有效性, 考虑下面的二阶非线性约束系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + h_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u + h_2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (42)$$

其中, $h_1(x_1)$ 和 $h_2(\mathbf{x})$ 为未知函数. 仿真过程中, 为了构建系统模型且得到仿真结果, 根据假设 3, 取未知参数 $\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$, 使得:

$$h_1(x_1) = \theta^T \phi_1(x_1) = [\theta_1, \theta_2][x_1^2, 0]^T \quad (43)$$

$$h_2(x_1, x_2) = \theta^T \phi_2(x_1, x_2) = [\theta_1, \theta_2][x_1 x_2^2, -\sin(x_1 e^{-x_2})]^T \quad (44)$$

未知参数 θ 的实际值假定为 $\theta = [0.1, 0.3]^T$. 控制目标是使系统输出 $y = x_1$ 跟踪参考信号 $y_r = 0.2 + 0.3 \sin(t)$, 同时受限于约束区间 $\Omega_c : |x_1| < k_c = 0.56$.

图 2 所示为采用 SBLF、ABLF 方法和本文 NM 方法得到的 z 相位图, 设计参数选择为 $c_1 = c_2 = 5.0$. 由图可知, 尽管这三种方法均可使 $(z_1(t), z_2(t))$ 收敛于零, 但 $z_1(0)$ 的选择区域是不同的. 由于 $k_c = 0.56$, $-0.1 \leq y_r \leq 0.5$, 根据 BLF 相关理论, 有 $k_{b1} = k_c - \max\{y_r\} = 0.06$, $k_{a1} = k_c - \min\{y_r\} = 0.46$. 因此, 如图 2 所示, 当采用 SBLF 方法时有 $z_1(0) \in (-0.06, 0.06)$, 当采用 ABLF 方法时有 $z_1(0) \in (-0.46, 0.06)$; 而采用本文方法时, $z_1(0) \in (-0.76, 0.36)$, 且该区域与参考信号 y_r 无关. 这说明本文方法可以获得更大的

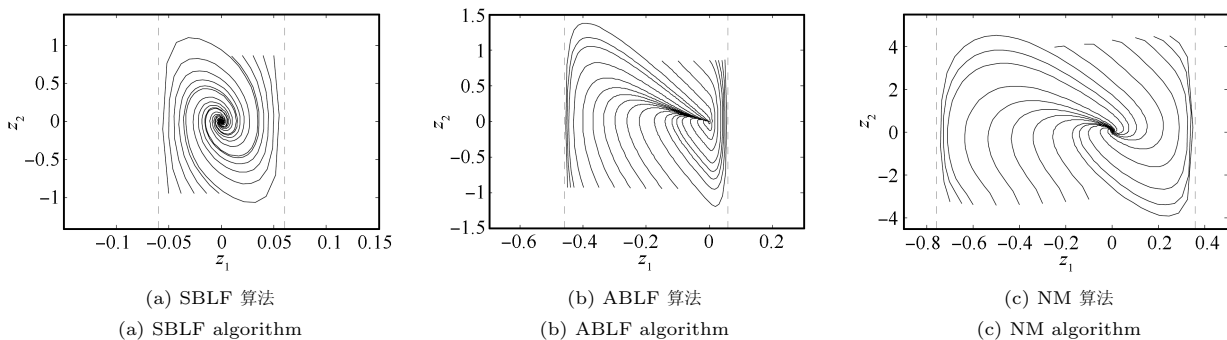


图 2 三种算法的 z 相位图对比

Fig. 2 Phase portrait of z for three different algorithms

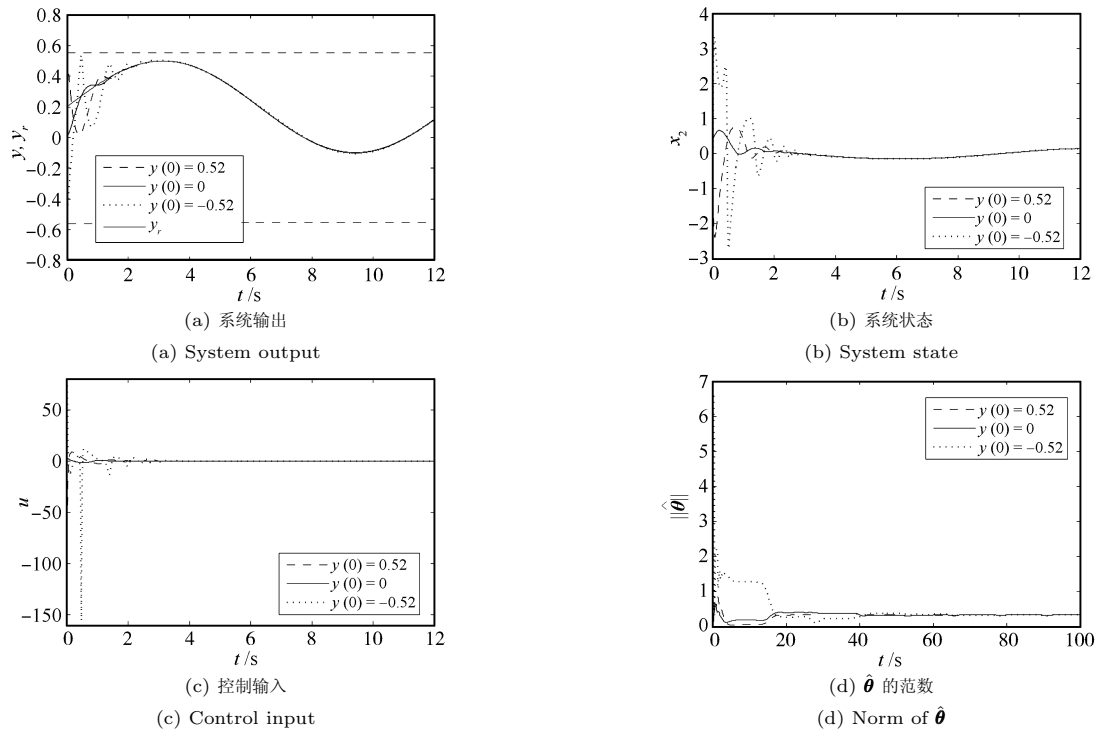


图3 不同初始条件下控制结果

Fig. 3 Control results with different initial conditions

约束量初值区间, 该初值区间等于约束区间。

本文选择了三个不同初始点, 在时域图上考察系统响应和系统变量的有界情况. 初始点分别为 $y(0) = 0.52$, $y(0) = 0$, $y(0) = -0.52$, 同时取 $x_2(0) = 1$. 设计参数取为: $c_1 = c_2 = 2.0$, $\Gamma = 5I$. 控制结果如图3所示. 图3(a)所示为三种不同初始条件下系统输出跟踪参考信号的情况, 由图可知, 对于不同的初始点, 该闭环输出均可以很好地跟踪参考信号, 且始终保持在约束区间 Ω_c 内. 图3(b)~3(d)所示为系统状态 x_2 、控制输入 u 和 $\hat{\theta}$ 的有界情况, 同时, 由图3(d)可知, $\|\hat{\theta}\|$ 最终将收敛于其真值 $\|\theta\| = 0.32$ 附近.

5 结论

本文针对输出受限的约束非线性系统, 首次提出了基于非线性映射的自适应反推控制方法. 与之前提及的控制方法相比, 本文方法使约束量的初始值选取区间扩大为整个约束区间, 减少了设计参数的引入, 避免了使用分段函数同时简化了控制器的结构, 反推法的直接应用也使得本文方法具有良好的可扩展性. 所设计的控制器可以保证闭环系统的全局稳定性, 同时使得跟踪误差渐近收敛于零.

References

- Blanchini F. Set invariance in control. *Automatica*, 1999, **35**(11): 1747–1767
- Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Scokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789–814
- Bemporad A. Reference governor for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(3): 415–419
- Kogiso K, Hirata K. Reference governor for constrained systems with time-varying references. *Robotics and Autonomous Systems*, 2009, **57**(3): 289–295
- Dehaan D, Guay M. Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2005, **41**(9): 1567–1574
- Adetola V, Guay M. Parameter convergence in adaptive extremum-seeking control. *Automatica*, 2007, **43**(1): 105–110
- Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1241–1253
- Krstic M, KanellaKopulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995
- Ge S S, Hong F, Lee T H. Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, **34**(1): 499–516
- Guo T, Liu G Y. Adaptive fuzzy control for unknown nonlinear time-delay systems with virtual control functions. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2011, **9**(6): 1227–1234
- Deng H, Krstic M. Stochastic nonlinear stabilization — I: a backstepping design. *Systems and Control Letters*, 1997, **32**(3): 143–150
- Jain S, Khorrami F. Decentralized adaptive control of a class of large-scale interconnected nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(2): 136–154

- 13 Chen W S, Li J M. Decentralized output-feedback neural control for systems with unknown interconnections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2008, **38**(1): 258–266
- 14 Liu Y J, Wang W. Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems. *Information Sciences*, 2007, **177**(18): 3901–3917
- 15 Ngo K B, Mahony R, Jiang Z P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain: IEEE, 2005. 8306–8312
- 16 Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, **45**(4): 918–927
- 17 Ren B, Ge S S, Tee K P, Lee T H. Adaptive control for parametric output feedback systems with output constraint. In: Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 6650–6655
- 18 Ren B B, Ge S S, Tee K P, Lee T H. Adaptive neural control for output feedback nonlinear systems using a barrier Lyapunov function. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, **21**(8): 1339–1345
- 19 Sun W, Yeow J T W, Sun Z. Robust adaptive control of a one degree of freedom electrostatic microelectromechanical systems model with output-error-constrained tracking. *IET Control Theory and Applications*, 2012, **6**(1): 111–119
- 20 Tee K P, Ge S S. Control of nonlinear systems with full state constraint using a barrier Lyapunov function. In: Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, China: IEEE, 2009. 8618–8623
- 21 Tee K P, Ge S S, Li H Z, Ren B B. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Control and Automation. Christchurch, New Zealand: IEEE, 2009. 524–529
- 22 Tee K P, Ren B B, Ge S S. Control of nonlinear systems with time-varying output constraints. *Automatica*, 2011, **47**(11): 2511–2516
- 23 Tee K P, Ge S S, Tay F E H. Adaptive control of electrostatic microactuators with bidirectional drive. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, **17**(2): 340–352
- 24 Tee K P, Yan R, Li H Z. Adaptive admittance control of a robot manipulator under task space constraint. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Anchorage, Alaska: IEEE, 2010. 5181–5186
- 25 Yan F J, Wang J M. Fuel-assisted in-cylinder oxygen fraction transient trajectory shaping control for diesel engine combustion mode switching. In: Proceedings of the 2011 American Control Conference. San Francisco, CA: IEEE, 2011. 1573–1578
- 26 Do K D, Nguyen D H, Nguyen T B. Nonlinear control of magnetic bearing. *Journal of Measurement Science and Instrumentation*, 2010, **1**(1): 10–16
- 27 Ge S S, Lee T H, Harris C J. *Adaptive Neural Network Control of Robotic Manipulators*. London: World Scientific, 1998
- 28 Yang Y S, Feng G, Ren J S. A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2004, **34**(3): 406–420
- 29 Chen B, Liu X P, Liu K F, Shi P, Lin C. Direct adaptive fuzzy control for nonlinear systems with time-varying delays. *Information Sciences*, 2010, **180**(5): 776–792
- 30 Tong S C, Cheng N. Adaptive fuzzy observer backstepping control for a class of uncertain nonlinear systems with unknown time-delay. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, **7**(2): 236–246

郭涛 安阳师范学院计算机与信息工程学院副教授。2009年在西安电子科技大学计算机应用技术专业获博士学位。主要研究方向为反推控制, 自适应模糊控制, 非线性控制。本文通信作者。

E-mail: gtmalbox@126.com

(GUO Tao Associate professor at the School of Computer and Information Engineering, Anyang Normal University. He received his Ph. D. degree from Xidian University in 2009. His research interest covers backstepping control, adaptive fuzzy control, and nonlinear control. Corresponding author of this paper.)

王丁磊 安阳师范学院计算机与信息工程学院副教授, 北京科技大学自动化学院博士研究生。主要研究方向为人工智能及先进制造技术。

E-mail: aytcdwl@163.com

(WANG Ding-Lei Associate professor at the School of Computer and Information Engineering, Anyang Normal University. He is also a Ph. D. candidate at the School of Automation, University of Science and Technology Beijing. His research interest covers artificial intelligence and advanced manufacturing technology.)

王爱民 安阳师范学院计算机与信息工程学院教授。2009年于武汉理工大学获博士学位。主要研究方向为智能信息处理, 非线性系统, 图像处理。E-mail: wam508@aynu.edu.cn

(WANG Ai-Min Professor at the School of Computer and Information Engineering, Anyang Normal University. He received his Ph. D. degree from Wuhan University of Technology in 2009. His research interest covers intelligent information process, nonlinear systems theory, and image processing.)