第 34 卷 第 10 期 自 动 化 学 报 Vol. 34, No. 10
2008 年 10 月 ACTA AUTOMATICA SINICA October, 2008

一类连续级联系统的全局一致稳定性

丁世宏[1] 李世华[1] 李 奇[1]

摘 要 针对一类非线性连续级联系统, 利用齐次系统的齐次性质给出了其全局一致稳定性分析结果. 假设级联系统中的驱动子系统和被驱动子系统分别满足全局一致渐近稳定且满足一定的齐次度, 若级联项也满足一给定齐次不等式, 则整个非线性级联系统为全局一致渐近稳定的. 若驱动子系统和被驱动子系统都具有负的齐次度, 则该非线性级联系统为全局一致有限时间稳定的. 与传统的 ISS 假设或级联项增长假设相比, 文中方法所给的齐次不等式条件更容易验证. 且文中方法不仅适用于 Lipschitz 连续的系统, 而且适用于非 Lipschitz 连续的系统. 两个例子验证了该方法的有效性.

关键词 级联系统, 连续系统, 齐次系统, 全局一致稳定性, 有限时间稳定性
中图分类号 TP13

Globally Uniform Stability of a Class of Continuous Cascaded Systems

DING Shi-Hong[1] LI Shi-Hua[1] LI Qi[1]

Abstract Globally uniform stability is obtained for a class of nonlinear continuous cascaded systems by using homogeneous properties of homogeneous systems. It is assumed that the driving subsystem and the driven subsystem have globally uniformly asymptotical stability and have certain degrees of homogeneity. If the cascaded term also satisfies a homogeneous inequality, then the cascaded system has globally uniformly asymptotical stability. Furthermore, if both the driving subsystem and the driven subsystem have the negative degrees of homogeneity, the cascaded system is globally uniformly finite-time stable. Compared with the conventional ISS assumption or the growth assumption of the cascaded term, the homogeneous inequality assumption of the cascaded term is easier to verify. Furthermore, the proposed method can be applied not only to the Lipschitz continuous systems but also to the non-Lipschitz continuous systems. Two examples are given to verify the effectiveness of the method.

Key words Cascaded system, continuous system, homogeneous system, global uniform stability, finite time stability

非线性级联系统是一类重要的非线性系统. 一方面, 很多非线性系统可以通过状态反馈或控制设计转化为级联系统. 另一方面, 级联系统也代表了一类实际系统[1]. 非线性级联系统主要由两个级联子系统即驱动子系统和被驱动子系统, 和一个级联项构成. 控制量只作用在驱动子系统上, 通过级联项改变被驱动子系统的状态. 一般来说, 子系统的稳定性并不能保证整个级联系统的稳定性. 往往, 级联项在分析级联系统的稳定性中起着至关重要的作用.

近年来, 非线性级联系统的控制问题引起了人们的广泛兴趣. 已有文献主要从级联项的增长假设和系统的 ISS (输入到状态稳定) 假设来考虑级联系统的稳定性问题. 基于级联项增长假设的分析方法一般假设级联项满足一定的范式增长条件, 再加上其他条件如被驱动子系统的 Lyapunov 函数导数不等式等, 得到系统的稳定性. 关于级联系统级联项的增长假设主要包括线性增长假设[2−3] 和非线性增长假设[4−6].

级联系统另外一种常见的稳定性分析方法是基于 ISS 假设的分析方法. 基于 ISS 理论[7], 文献 [8] 指出, 假设驱动子系统和被驱动子系统分别满足全局渐近稳定, 若被驱动子系统的状态满足 ISS 假设, 则该级联系统全局渐近稳定. 文献 [9] 将 ISS 情形推广到积分 ISS 情形.

除此之外, 还有其他的一些验证条件来分析级联系统的稳定性. 文献 [10] 假设被驱动子系统和驱动子系统为全局渐近稳定, 并指出若系统状态有界, 则可以得到系统的全局渐近稳定结果. 文献 [11] 将文献 [10] 的结果推广到离散形式. 文献 [12] 证明了级联子系统的一致前向有界可以保证级联系统的全局有限时间稳定性, 该文首次给出了非自治级联系统的有限时间稳定性分析结果.

然而, 上面所给出的关于级联系统稳定性分析的方法中存在两个主要问题. 1) 所给出的条件过于保守, 且有时不易验证. 基于级联项增长假设的稳定性分析方法, 一般除了需要级联项的增长假设之外, 还需要驱动子系统和被驱动子系统的信息. 这些条

收稿日期 2007-10-11 收修改稿日期 2008-02-19
Received October 11, 2007; in revised form February 19, 2008
国家自然科学基金 (60504007), 教育部博士点基金 (20070286040), 江苏省研究生培养创新基金和东南大学优博基金资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60504007), Doctoral Programs Foundation of Ministry of Education of China (20070286040), Graduate Innovation Program of Jiangsu Province and Scientific Research Foundation of Graduate School of Southeast University
1. 东南大学自动化学院 南京 210096
1. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.01268

件往往不易验证. 如文献 [4, 6] 中子系统的局部指数稳定性假设; 文献 [2−3, 5] 中关于被驱动子系统的 Lyapunov 函数导数不等式的假设; 文献 [5, 12] 中的一致前向有界性假设等. 基于 ISS 假设的稳定性分析方法需要验证被驱动子系统状态关于驱动子系统状态的输入到状态稳定性. 一般需要通过构造被驱动子系统的 Lyapunov 函数来证明, 故也不易验证, 对于非自治情形更是如此. 2) 在级联系统的稳定性分析过程中一般均要求向量场或级联项满足一定的光滑条件或 Lipschitz 连续条件. 如文献 [2] 中级联项需要满足 Lipschitz 连续条件; 文献 [3] 中向量场需要满足可导性; 文献 [4, 8] 中向量场需要满足光滑性; 文献 [5−6, 9] 中向量场需要满足局部 Lipschitz 连续条件.

近年来, 齐次系统吸引了人们的广泛关注[13−16]. 所谓齐次系统是指系统的向量场具有齐次性. 向量场的齐次性保证了解空间与解空间中的单位闭球存在映射关系, 因此整个解空间可以看作是单位闭球的膨胀[13]. 齐次系统的优点是, 对自治系统, 若系统局部渐近稳定, 则系统全局渐近稳定. 因此讨论子系统的全局稳定问题可以归结为讨论其局部稳定性问题. 与一般的非线性系统相比, 齐次系统的全局性结果较易得到.

因为齐次系统具有上述优点, 故可以考虑从齐次性角度出发来讨论级联系统的稳定性问题. 对自治系统, 若级联系统的驱动子系统和被驱动子系统满足全局渐近稳定性, 且具有相同的齐次度, 而且级联项对同一扩张向量具有相同的齐次度. 则整个级联系统为全局渐近稳定的. 原因如下: 由文献 [1] 中结果可知, 级联系统的驱动子系统和被驱动子系统的全局渐近稳定可以直接推出级联系统满足局部稳定. 而被驱动子系统与驱动子系统又构成一个级联齐次系统. 由于齐次系统的局部稳定性等价于全局稳定性[17], 所以整个级联系统全局渐近稳定. 显然, 若级联项不满足齐次性条件, 由于系统不再是齐次系统, 因而不能得到系统的全局渐近稳定性. 关于级联项为非齐次情形, 目前还没有研究结果. 对于一般的非线性非自治级联系统, 由于需要考虑时间, 齐次性定义更为复杂. 目前有两种不同的非自治系统的齐次性定义. 如文献 [15] 在非自治系统中的齐次性定义没有考虑对时间的膨胀, 而文献 [18] 中的非自治系统齐次性定义考虑了对时间的膨胀. 因此, 在自治情况下成立的结果是否在非自治情况下仍然成立还是一个有待解决的问题. 关于非线性非自治齐次级联系统的稳定性结果尚无一般结论.

受到上面问题的启发, 同时为了避免基于增长假设分析方法与基于 ISS 假设分析方法中的条件保守性和不易验证问题, 本文首次从齐次系统的齐次性质来考虑一类连续级联系统的全局稳定性问题. 假设驱动子系统和被驱动子系统满足全局一致渐近稳定且具有一定齐次度, 若级联项满足某个齐次不等式, 则该级联系统也为全局一致渐近稳定的. 而且, 当驱动子系统和被驱动子系统都具有负的齐次度时, 该级联系统为全局一致有限时间稳定的. 与基于级联项增长假设和基于 ISS 假设的级联系统稳定性分析方法相比, 除关于被驱动子系统和驱动子系统的基本假设之外, 本文只需要验证关于级联项的齐次不等式, 不需要其他的附加条件. 而且文中方法只需要系统的向量场满足连续性和级联项满足局部连续. 故该方法不仅适用于满足 Lipschitz 条件的级联系统, 而且也适用于满足非 Lipschitz 连续条件的级联系统. 我们的结果适用于级联项不满足齐次条件的自治系统和带时变级联项的非自治系统. 两个例子验证了该方法的有效性.

1 问题描述

本文研究对象为一类特殊的非线性级联系统, 可由下列微分方程描述

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \tag{2}$$

其中子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

为被驱动子系统, 系统 (2) 为驱动子系统; $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$ 为系统状态; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = (h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t), \cdots, h_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t))^{\mathrm{T}}$ 为级联项, 满足 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, 0, t) = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 是连续的.

定义 1[15, 17]**.** 称系统 (3) 关于 $(r_1, \cdots, r_n), r_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 k, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k + r_i} f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \cdots, n \tag{4}$$

其中 $k \geq -\max\{r_1, \cdots, r_n\}$. 称标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 关于 $(r_1, \cdots, r_n), r_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 σ, 若对任意 $\varepsilon > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$V(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\sigma} V(\boldsymbol{x})$$

考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t),\ \boldsymbol{f}(0, t) = \boldsymbol{0}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{f} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 为连续的, 在 t_0 时刻以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初始状态的解记为 $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

定义 2[19]**.** 系统 (5) 为一致稳定的, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 满足

$$\| \boldsymbol{x}_0 \| < \delta \Longrightarrow \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

系统 (5) 为全局一致有界的, 若对 $\forall r > 0, \exists b(r) > 0$, 使得

$$\| \boldsymbol{x}_0 \| \le r \Longrightarrow \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \| \le b(r), \quad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

系统 (5) 为全局一致吸引的, 若对与初始时刻 t_0 无关的任意常数 $c > 0$, 满足

$$\| \boldsymbol{x}_0 \| \le c \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \| \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) \| = 0$$

若系统 (5) 满足一致稳定, 全局一致有界和全局一致吸引, 则系统为全局一致渐近稳定的.

定义 3. 若对函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, 存在区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 和常数 $L > 0$, $0 < \gamma \le 1$, 使得

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \| \le L \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^{\gamma}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$$

则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是局部 Holder 连续的. 若 $D = \mathbf{R}^n$, 则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为全局 Holder 连续的.

本文的目的为针对级联系统 (1) 和 (2), 讨论其全局一致渐近稳定性问题.

2 主要结果

引理 1[13]**.** 若系统 (3) 为全局渐近稳定的且具有负的齐次度, 则系统 (3) 为全局有限时间稳定的.

引理 2[17]**.** 假设系统 (3) 关于 $(r_1, \cdots, r_n), r_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 k, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为连续函数, 且 $\boldsymbol{x} = 0$ 为局部渐近稳定的平衡点. 则对任意正整数 i 和任意实数 $\sigma > i\max\{r_1, \cdots, r_n\}$, 存在一个齐次度 σ 的 i 阶可导正定函数 $V(\boldsymbol{x})$ 使得对任意 $\boldsymbol{x} \ne 0$, 有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$.

利用引理 2, 我们可以证明下面引理.

引理 3. 若系统 (3) 关于 $(r_1, \cdots, r_n), r_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 k, 则对任意的 $\sigma > i\max\{r_1, \cdots, r_n\}$, 一定存在常数 $c > 0$ 和具有齐次度 σ 的一阶可导正定函数 $V(\boldsymbol{x})$, 满足

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le -cV^{\frac{(\sigma+k)}{\sigma}}(\boldsymbol{x})$$

证明. 由引理 2 可知, 对任意的 $\sigma > i\max\{r_1, \cdots, r_n\}$, 存在一个一阶可导正定函数 $V(\boldsymbol{x})$ 关于 $(r_1, \cdots, r_n)$, $r_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 σ, 且对任意 $\boldsymbol{x} \ne 0$, 满足 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$. 故

$$V(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{\sigma}V(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

注意到 $f_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{r_i+k}f_i(x_1, \cdots, x_n)$,

$$\dot{V}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(x_1, \cdots, x_n)$$

对上式进行变量代换, 即将 $\varepsilon^{r_i}x_i$ 代替 $\dot{V}(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 x_i, 可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \\ &\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n)}{\partial \varepsilon^{r_i}x_i} f_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \\ &\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{\sigma - r_i} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \varepsilon^{r_i+k} f_i(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{\sigma+k}\dot{V}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{7}$$

令 $\varepsilon = V^{-1/\sigma}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}\ne 0}$, 并将其代入式 (7) 可得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(V^{-\frac{r_1}{\sigma}}(\boldsymbol{x})x_1, \cdots, V^{-\frac{r_n}{\sigma}}(\boldsymbol{x})x_n) = \\ &V^{-\frac{(\sigma+k)}{\sigma}}(\boldsymbol{x})\dot{V}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{8}$$

令 $\Omega_1 = \{(x_1, \cdots, x_n) | V(\boldsymbol{x}) = 1\}$, 因此 Ω_1 是一个紧的有界闭集. 因为 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负定连续函数, 故 $-\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω_1 上必有正的最小值. 记为 $c = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega_1}\{-\dot{V}(\boldsymbol{x})\}$. 由式 (8) 可知 $\dfrac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V^{(\sigma+k)/\sigma}(\boldsymbol{x})} = \dot{V}(V^{-r_1/\sigma}(\boldsymbol{x})x_1, \cdots, V^{-r_n/\sigma}(\boldsymbol{x})x_n)$. 令 $X_1 = V^{-r_1/\sigma}(\boldsymbol{x})x_1, \cdots, X_n = V^{-r_n/\sigma}(\boldsymbol{x})x_n$, 则 $V(X_1, \cdots, X_n) = 1$, 故 $(X_1, \cdots, X_n)$ 在 Ω_1 上, 即有

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{x}\ne 0}\{\dot{V}(V^{-\frac{r_1}{\sigma}}(\boldsymbol{x})x_1, \cdots, V^{-\frac{r_n}{\sigma}}(\boldsymbol{x})x_n)\} = \\ &\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega_1}\{\dot{V}(\boldsymbol{x})\} = -c\end{aligned}$$

所以有 $\dfrac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V^{(\sigma+k)/\sigma}(\boldsymbol{x})} \le -c$ 成立. 即有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) + cV^{(\sigma+k)/\sigma}(\boldsymbol{x}) \le 0$. □

下面给出如下两个假设

假设 1. 被驱动子系统 (3) 关于 $(r_1, \cdots, r_n)$, $r_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 具有齐次度 k_1, 且其平衡点 $\boldsymbol{x} = 0$ 为全局渐近稳定的. 驱动子系统 (2) 关于 $(l_1, \cdots, l_m), l_i > 0, i = 1, \cdots, m$ 具有齐次度 k_2, 且其平衡点 $y = 0$ 为全局渐近稳定的.

假设 2. 级联项 $h_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ 满足 $|h_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)| \le H_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), i = 1, \cdots, n$, $H_i(\boldsymbol{x}, 0) = 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{H_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n}x_n, \varepsilon^{l_1}y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m}y_m)}{\varepsilon^{r_i+k_2}} < +\infty \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (H_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \cdots, H_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}$ 在包含原点的区域 D 上满足局部 Holder 连续.

2.1 全局渐近稳定性分析

定理 1. 若非线性级联系统 (1) 和 (2) 满足假设 1、假设 2 且 $k_1 \ge k_2$, 则该系统为全局一致渐近稳定的.

证明. 由定义 2 可知, 系统全局一致渐近稳定即满足一致稳定, 全局一致有界和全局一致吸引. 故

级联系统 (1) ∼ (2) 的全局一致渐近稳定性的证明可分为三步, 其中全局一致有界性的证明受到了文献 [20−21] 的启发. 下面我们依次给出证明.

1) 一致稳定性

由假设 1 可知, 子系统 (2) 和 (3) 为全局一致渐近稳定的, 由 Lyapunov 逆定理[22] 可知对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, 满足 $(\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) \in B_{\acute{c}} = \{\| \boldsymbol{x} \| \le \acute{c}, \| \boldsymbol{y} \| \le \acute{c}\}$, 存在 Lyapunov 函数 $\upsilon_1(\boldsymbol{x}), \upsilon_2(\boldsymbol{y})$, 和 K 类函数 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ 满足

$$\begin{aligned}&\phi_1(\| \boldsymbol{x} \|) \le \upsilon_1(\boldsymbol{x}) \le \phi_2(\| \boldsymbol{x} \|), \quad \dot{\upsilon}_1(\boldsymbol{x}) \le -\phi_3(\| \boldsymbol{x} \|)\\ &\psi_1(\| \boldsymbol{y} \|) \le \upsilon_2(\boldsymbol{y}) \le \psi_2(\| \boldsymbol{y} \|), \quad \dot{\upsilon}_2(\boldsymbol{y}) \le -\psi_3(\| \boldsymbol{y} \|)\end{aligned} \tag{10}$$

由假设 2 可知存在包含原点的区域 D, 使得 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 D 上为局部 Holder 连续的. 则一定存在 $0 < c < \acute{c}$ 且 $B_c \subset D \cap B_{\acute{c}}$. 故 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 B_c 上也为局部 Holder 连续的. 由定义 3 可知, 对任意的 $(\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) \in B_c, (\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{0}) \in B_c$, 存在 $L > 0, 0 < \gamma \le 1$, 使得

$$\| \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \| = \| \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \| \le L \| \boldsymbol{y} \|^{\gamma} \tag{11}$$

令 $a = \max_{(\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) \in B_c} \| \partial \upsilon_1(\boldsymbol{x}) / \partial \boldsymbol{x} \|$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $\phi_2(\varepsilon_1) < \phi_1(\varepsilon)$. 取 $\delta_1 > 0$ 且满足 $\delta_1 < \varepsilon_1, aL\delta_1^{\gamma} < \phi_3(\varepsilon_1)$, 取 $\delta_2 > 0$ 且满足 $\psi_2(\delta_2) < \psi_1(\delta_1)$. 由式 (10) 可知, $\delta_2 < \delta_1$. 令 $\delta = \min\{\delta_2, c\}$, 则有 $\delta \le \delta_2 < \delta_1 < \varepsilon_1$. 假设 $\| \boldsymbol{x}_0 \| \le \delta, \| \boldsymbol{y}_0 \| \le \delta$, 针对子系统 (2), 由式 (10) 可知: $\psi_1(\| \boldsymbol{y} \|) \le \upsilon_2(\boldsymbol{y}) \le \upsilon_2(\boldsymbol{y}_0) \le \psi_2(\delta) \le \psi_2(\delta_2) \le \psi_1(\delta_1)$, 即有

$$\| \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{y}_0) \| \le \delta_1, \quad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

由 (1), (10), 和 (11), 对 $\upsilon_1(\boldsymbol{x})$ 求导可知, 对 $\forall (\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) \in B_c$, $\dot{\upsilon}_1(\boldsymbol{x}) \le -\phi_3(\| \boldsymbol{x} \|) + aL \| \boldsymbol{y} \|^{\gamma}$.

故当 $\varepsilon_1 \le \| \boldsymbol{x} \| \le c$ 时有 $\phi_3(\| \boldsymbol{x} \|) \ge \phi_3(\varepsilon_1)$, 注意到 $aL\delta_1^{\gamma} < \phi_3(\varepsilon_1), \| \boldsymbol{y} \| \le \delta_1$. 从而有 $\dot{\upsilon}_1(\boldsymbol{x}) \le -\phi_3(\varepsilon_1) + aL\delta_1^{\gamma} < 0$; 因此, 当 $\| \boldsymbol{x}_0 \| < \delta < \varepsilon_1$ 时, 有 $\upsilon_1(\boldsymbol{x}) \le \upsilon_1(\varepsilon_1)$, 由 (10) 可知,

$$\phi_1(\| \boldsymbol{x} \|) \le \upsilon_1(\boldsymbol{x}) \le \upsilon_1(\varepsilon_1) \le \phi_2(\varepsilon_1)$$

又因为 $\phi_2(\varepsilon_1) < \phi_1(\varepsilon)$, 故有 $\phi_1(\| \boldsymbol{x} \|) < \phi_1(\varepsilon)$, 即有 $\| \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \| < \varepsilon, \forall t \ge t_0 \ge 0$. 因为子系统 (2) 全局一致渐近稳定, 故系统一致稳定.

2) 全局一致有界性

由引理 3 可知, 对任意的 $\sigma > \max\{r_1, \cdots, r_n, l_1, \cdots, l_m\}$, 存在常数 $c_1 > 0, c_2 > 0$ 和一阶可导的正定函数 $V_1(\boldsymbol{x}), V_2(\boldsymbol{y})$, 使得

$$\dot{V}_1(\boldsymbol{x}) + c_1 V_1^{\frac{\sigma + k_1}{\sigma}}(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad \dot{V}_2(\boldsymbol{y}) + c_2 V_2^{\frac{\sigma + k_2}{\sigma}}(\boldsymbol{y}) \le 0 \tag{12}$$

且满足

$$\begin{aligned}V_1(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\sigma} V_1(\boldsymbol{x})\\ V_2(\varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) = \varepsilon^{\sigma} V_2(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

令 $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = V_1(\boldsymbol{x}) + \beta V_2(\boldsymbol{y})$, 其中 $\beta > 0$. 由假设 2, 并对 $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 求导可得

$$\dot{V} \le -e_1(\boldsymbol{x}) - \beta e_2(\boldsymbol{y}) - e_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{13}$$

其中 $e_1(\boldsymbol{x}) = c_1 V_1^{(\sigma + k_1)/\sigma}(\boldsymbol{x}), e_2(\boldsymbol{y}) = c_2 V_2^{(\sigma + k_2)/\sigma}(\boldsymbol{y})$, $e_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\sum_{i=1}^{n} H_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left| \frac{\partial V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right|$.

令 $E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = e_1(\boldsymbol{x}) + \beta e_2(\boldsymbol{y}) + e_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 由假设 2 可知: 存在连续函数 $M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), i = 1, \cdots, n$, 使得

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \frac{H_i(\varepsilon^{r_1} \boldsymbol{x}_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m)}{\varepsilon^{r_i + k_2}} = M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{14}$$

由式 (14) 可知, 当 $y = 0$ 时必有 $M_i(\boldsymbol{x}, 0) = 0$, 且对任意很小的 $\lambda_0 > 0$, 存在 $\varepsilon_0 > 1$, 当 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 时有

$$\begin{aligned}&H_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) <\\ &(M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda_0) \varepsilon^{r_i + k_2}\end{aligned} \tag{15}$$

故当 $\varepsilon > \varepsilon_0 > 1$ 时, 由式 (15) 可知

$$\begin{aligned}&E(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) \ge\\ &e_1(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) + \beta e_2(\varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) -\\ &\sum_{i=1}^{n} (M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda_0) \varepsilon^{r_i + k_2} \left| \frac{\partial V_1(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n)}{\partial (\varepsilon^{r_i} x_i)} \right|\end{aligned} \tag{16}$$

注意到

$$\begin{aligned}e_1(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{\sigma + k_1} e_1(\boldsymbol{x})\\ e_2(\varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) = \varepsilon^{\sigma + k_2} e_2(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&E(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) \ge \varepsilon^{\sigma + k_1} e_1(\boldsymbol{x}) +\\ &\varepsilon^{\sigma + k_2} \left(\beta e_2(\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{n} (M_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \lambda_0) \left| \frac{\partial V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \right| \right)\end{aligned}$$

令 $S = \{(\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) | V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1\}$. 则 S 为一个紧的有界集. 注意到对任意的 $(\boldsymbol{x}^{\rm T}, \boldsymbol{y}^{\rm T}) \in \mathbf{R}^{n+m}$, 取 $\varepsilon = V^{-1/\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, 我们可以得到

$$V(\varepsilon^{r_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{l_1} y_1, \cdots, \varepsilon^{l_m} y_m) = 1 \tag{17}$$

因此 $\mathbf{R}^{n+m}$ 空间中任意一点可以映射到 S 上来. 令 $\boldsymbol{z} = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in S, \boldsymbol{Z} = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$, 则存在一个 ε, 使得

$\boldsymbol{Z} = (\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n,\varepsilon^{l_1}y_1,\cdots,\varepsilon^{l_m}y_m)$. 又因为 $k_1 \ge k_2, \varepsilon > \varepsilon_0 > 1$, 所以有

$$E(\boldsymbol{Z}) = E(\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n,\varepsilon^{l_1}y_1,\cdots,\varepsilon^{l_m}y_m) \ge \varepsilon^{\sigma+k_2}e_1(\boldsymbol{x}) + \varepsilon^{\sigma+k_2}\left(\beta e_2(\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{n}(M_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda_0)\left|\frac{\partial V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right|\right)$$

其中 $(\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T}) \in S$. 令

$$Q = \left\{(\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T})|e_1(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{n}(M_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \lambda_0)\left|\frac{\partial V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right| > 0, (\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T}) \in S\right\}$$

$S_1 = S \cap Q, S_2 = S \cap Q^c$, 其中 Q^c 为 Q 的补集, 则有 $S = S_1 \cup S_2, S_1 \cap S_2 = \emptyset$. 显然在 S_1 上有 $E(\boldsymbol{Z}) > 0$, 现证在 S_2 上有 $E(\boldsymbol{Z}) \ge 0$.

令 $N_1 = \min_{(\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T})\in S_2}\{e_2(\boldsymbol{y})\}$, 则有 $N_1 \ge 0$. 现证 $N_1 = 0$ 不成立. 否则若 $N_1 = 0$, 则有 $e_2(\boldsymbol{y}) = 0$, 从而有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 即有 $\acute{S} = \{(\boldsymbol{x}^{\rm T},\ \boldsymbol{y}^{\rm T})|\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\} \subset S_2 = S \cap Q^c$. 任取 $(\boldsymbol{x}_0^{\rm T},\boldsymbol{0})|_{\boldsymbol{x}_0\ne 0} \in \acute{S}$, 则必有 $(\boldsymbol{x}_0^{\rm T},\boldsymbol{0}) \in S$ 且 $(\boldsymbol{x}_0^{\rm T},\boldsymbol{0}) \in Q^c$. 注意到 $M_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = 0$, 则有 $V(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0}) = 1$ 且 $e_1(\boldsymbol{x}_0) \le \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^{n}|\partial V_1(\boldsymbol{x})/\partial x_i|\right)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$. 注意到 $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = V_1(\boldsymbol{x}) + \beta V_2(\boldsymbol{y})$, $e_1(\boldsymbol{x}) = c_1V_1^{(\sigma+k_1)/\sigma}(\boldsymbol{x})$, 故有 $V_1(\boldsymbol{x}_0) = 1$ 且 $V_1(\boldsymbol{x}_0) \le (\lambda_0/c_1(\sum_{i=1}^{n}|\partial V_1(\boldsymbol{x})/\partial x_i|)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0})^{\sigma/(\sigma+k_1)}$ 成立. 令 $c_2 = (\sum_{i=1}^{n}|\partial V_1(\boldsymbol{x})/\partial x_i|)|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$, 又因为 λ_0 为一个很小的正数, 故必有 λ_0 使得 $(\lambda_0c_2/c_1)^{\sigma/(\sigma+k_1)} < 1$, 即 $V_1(\boldsymbol{x}_0) < 1$ 与 $V_1(\boldsymbol{x}_0) = 1$ 矛盾. 所以必有 $N_1 > 0$.

令 $N_2 = \min\limits_{(\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T})\in S}\left\{-\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda_0)|\frac{\partial V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}|\right\}$, 则必有 $N_2 \le 0$. 则在 S_2 上有

$$E(\boldsymbol{Z}) \ge \varepsilon^{\sigma+k_2}(\beta N_1 + N_2)$$

取 $\beta = \dfrac{-N_2+N_3}{N_1}, N_3 \ge 0$, 则有 $E(\boldsymbol{Z}) \ge 0$. 令

$$\Omega_\varepsilon = \{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Z} = (\varepsilon^{r_1}x_1,\cdots,\varepsilon^{r_n}x_n,\varepsilon^{l_1}y_1,\cdots,\varepsilon^{l_m}y_m), \varepsilon > \varepsilon_0 > 1, \quad (\boldsymbol{x}^{\rm T},\boldsymbol{y}^{\rm T}) \in S\}$$

则当 $\boldsymbol{Z} \in \Omega_\varepsilon$ 时, 有 $\dot{V}(\boldsymbol{Z}) \le -E(\boldsymbol{Z}) < 0$. 故系统全局一致有界.

3) 全局一致吸引性

由假设 1 可知, 子系统 (2) 会趋于零, 即状态 $\boldsymbol{y}$ 会趋于零, 又因为系统状态为全局有界的, 故 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 会趋于零. 又因为

$$\dot{\upsilon}_1(\boldsymbol{x}) \le -\phi_3(\boldsymbol{x}) + \left\|\frac{\partial \upsilon_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right\| \parallel \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \parallel$$

故当 $t \to \infty$ 时, 有 $\dot{\upsilon}_1(\boldsymbol{x}) \le -\phi_3(\boldsymbol{x})$, 即状态 $\boldsymbol{x}$ 也会趋于零. 所以系统为全局一致吸引的.

由以上证明可知, 级联系统 (1) 和 (2) 为一致稳定, 全局一致有界和全局一致吸引的, 因此由定义 2 可知该系统为全局一致渐近稳定的. □

2.2 全局有限时间稳定性分析

在控制系统的性能指标中, 收敛性能是很关键的一个指标. 在绝大多数的控制设计方法得到的研究结果中, 闭环系统最快的收敛速度为指数形式. 此时闭环系统不可能在有限时间收敛到平衡点. 从优化的角度来看, 有限时间收敛的控制方法是时间最优的控制方法. 研究表明, 在系统具有干扰和不确定情况下, 有限时间收敛的系统往往具有更好的性能[13, 23−24]. 由此带来的一个问题是有限时间控制器的设计和稳定性分析更为复杂. 近年来, 有限时间控制问题吸引了很多人的关注. 关于有限时间稳定性问题可参考文献 [12−13, 23−24], 有限时间控制问题可参考文献 [20−21, 25−33]. 目前关于级联系统的有限时间控制和稳定性分析问题的研究结果很少. 此处作为定理 1 的一种特殊情形, 利用齐次性质, 针对一类连续非线性级联系统提出一种有限时间稳定性分析方法. 该方法所给出的存在性条件较易验证.

定理 2. 若非线性级联系统 (1) 和 (2) 满足假设 1、假设 2 且有 $k_2 \le k_1 < 0$, 则该系统为全局一致有限时间稳定的.

证明. 证明系统的全局一致有限时间稳定性只需证明系统的一致稳定性、全局一致有界性和全局一致有限时间吸引性. 一致稳定性与全局一致有界性的证明与定理 1 相同, 下面给出全局一致有限时间收敛性证明.

注意到 $k_2 < 0$, 由假设 1 和引理 1 可知, 驱动子系统 (2) 全局有限时间稳定. 即状态 $\boldsymbol{y}$ 在有限时间内收敛到零; 又因为系统状态为全局一致有界的, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ 会在有限时间 t^* 内一致收敛到零. 当 $t > t^*$ 时, 系统 (1) 退化为被驱动子系统 (3). 又因为 $k_1 < 0$, 由假设 1 和引理 1 可知, 系统 (3) 有限时间稳定, 即状态 $\boldsymbol{x}$ 会在有限时间内收敛到零. 所以系统为全局一致有限时间吸引的. □

3 例子与仿真结果

为了验证上述方法的有效性, 此处我们给出两个例子.

例 1. 考虑下列级联系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^{5/3} + 2x_1y_1^{2/5}\cos(t)\\ \dot{y}_1 &= -3y_1^{7/5}\end{aligned}$$

易验证子系统 $\dot{x}_1=-x_1^{5/3}$ 和 $\dot{y}_1=-3y_1^{7/5}$ 全局渐近稳定, 且关于 $r_1=1$, $l_1=1$, 分别具有齐次度 $k_1=2/3, k_2=2/5$, 级联项 $|h_1(x_1,y_1,t)|\le H_1(x_1,y_1)=2|x_1|y_1^{2/5}$, 且 $H_1(x_1,y_1)$ 满足

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{H_1(\varepsilon^{r_1}x_1,\varepsilon^{l_1}y_1)}{\varepsilon^{r_1+k_2}}=2|x_1|y_1^{2/5}$$

又因为 $k_1\ge k_2$, 故系统满足定理 1 的条件, 系统为全局一致渐近稳定的. 取初始值为: $x_1(0)=6, x_2(0)=-6$. 仿真结果如图 1 所示.

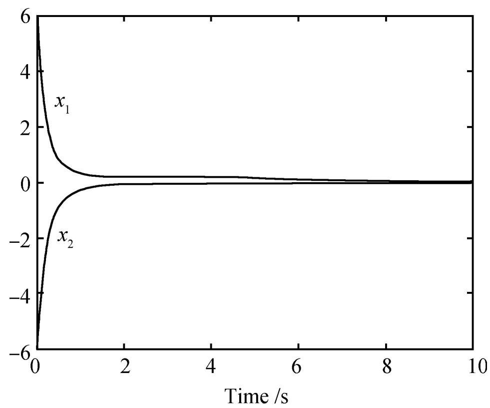

图 1　例 1 状态响应曲线

Fig. 1　Response curves of the states in Example 1

例 2. 考虑下列级联系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=x_2+(x_1^{3/10}-1)y_1^{3/10}\tfrac{t}{1+t}\\&\dot{x}_2=-\mathrm{sig}^{7/10}(x_1)-2\mathrm{sig}^{14/17}(x_2)+\tfrac{y_1^{1/2}\sin(t)}{1+x_2^2}\\&\dot{y}_1=-2\mathrm{sig}^{4/5}(y_1)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{sig}^{\alpha}(x)=\mathrm{sgn}(x)|x|^{\alpha}, \alpha>0$. 由文献 [23] 中例 2 可知子系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\\dot{x}_2&=-\mathrm{sig}^{7/10}(x_1)-2\mathrm{sig}^{14/17}(x_2)\end{aligned}$$

为全局有限时间稳定的, 且关于扩张 $(r_1,r_2)=(1,17/20)$ 具有齐次度 $k_1=-3/20$. 又因为子系统 $\dot{y}_1=-2\mathrm{sig}^{4/5}(y_1)$ 为全局有限时间稳定的, 且关于扩张 $l_1=1$ 具有齐次度 $k_2=-1/5$, 注意到级联项满足: $|h_1(x_1,x_2,y_1,t)|\le H_1(x_1,x_2,y_1)=|x_1^{3/10}-1||y_1|^{3/10}, |h_2(x_1,x_2,y_1,t)|\le H_2(x_1,x_2,y_1)=|y_1|^{1/2}$, 且易验证

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{H_1(\varepsilon^{r_1}x_1,\varepsilon^{r_2}x_2,\varepsilon^{l_1}y_1)}{\varepsilon^{r_1+k_2}}=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{H_2(\varepsilon^{r_1}x_1,\varepsilon^{r_2}x_2,\varepsilon^{l_1}y_1)}{\varepsilon^{r_2+k_2}}=0$$

又因为 $k_1\ge k_2$, 由定理 2 知该系统全局一致有限时间稳定. 取初始值为 $x_1(0)=5$, $x_2(0)=-5$, $x_3(0)=3$. 仿真结果如图 2 所示.

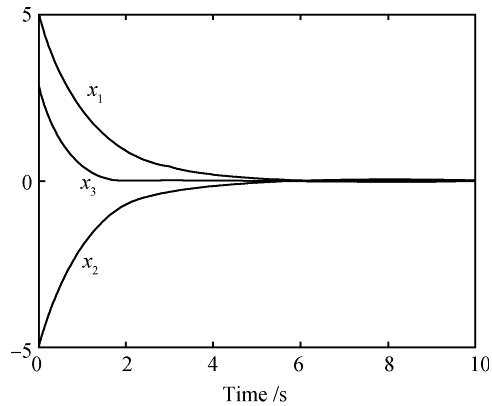

图 1　例 2 状态响应曲线

Fig. 2　Response curves of the states in Example 2

4　结论

本文从齐次性的角度讨论了一类连续非自治级联系统的稳定性问题. 假设该级联系统的驱动子系统和被驱动子系统满足全局渐近稳定特性且具有一定的齐次度, 若级联项满足给定齐次不等式, 那么整个级联系统为全局一致渐近稳定的. 若上述齐次度均小于零, 则级联系统为全局一致有限时间稳定的. 与传统的基于 ISS 假设或基于级联项增长假设的级联系统稳定性分析方法中的匹配条件相比, 文中方法所给的级联项齐次不等式条件更容易验证. 该方法不仅适用于一般的 Lipschitz 连续系统, 而且也适用于非 Lipschitz 连续系统.

References

1 Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P V. *Constructive Nonlinear Control*. London: Springer-Verlag, 1996

2 Jankovic M, Sepulchre R, Kokotovic P V. Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(12): 1723−1735

3 Panteley E, Loria A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade. *Systems and Control Letters*, 1998, **33**(2): 131−138

4 Imura J I, Sugie T, Yoshikawa T. Global robust stabilization of nonlinear cascaded systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(5): 1084−1089

5 Panteley E, Loria A. Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems. *Automatica*, 2001, **37**(3): 453−460

6 Sepulchre R, Arcak M, Teel A R. Trading the stability of finite zeros for global stabilization of nonlinear cascade systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(3): 521−525

7 Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, **34**(4): 435−443

8 Sontag E D. Remarks on stabilization and input-to-state stability. In: Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control. Tampa, USA: IEEE, 1989. 1376−1378

9 Arcak M, Angeli D, Sontag E D. A unifying integral ISS framework for stability of nonlinear cascades. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **40**(6): 1888−1904

10 Seibert P, Suarez R. Global stabilization of nonlinear cascade systems. *Systems and Control Letters*, 1990, **14**(4): 347−352

11 Sundarapandian V. Global asymptotic stability of nonlinear cascade systems. *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**(3): 275−277

12 Li S H, Tian Y P. Finite-time stability of cascaded time-varying systems. *International Journal of Control*, 2007, **80**(4): 646−657

13 Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2005, **17**(2): 101−127

14 Hermes H. Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems. *SIAM Review*, 1991, **33**(2): 238−264

15 Hermes H. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential Equations: Stability and Control*. London: CRC Press, 1990. 249−260

16 Sepulchre R, Aeyels D. Homogeneous Lyapunov functions and necessary conditions for stabilization. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1996, **9**(1): 34−58

17 Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(4): 467−473

18 Orlov Y. Finite time stability of homogeneous switched systems. In: Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA: IEEE, 2003. 4271−4276

19 Yoshizawa T. *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*. New York: Springer-Verlag, 1975

20 Hong Y G. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Systems and Control Letters*, 2002, **46**(4): 231−236

21 Hong Y G, Huang J, Xu Y S. On an output feedback finite-time stabilization problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(2): 305−309

22 Kurzweil J. On the inversion of Lyapunov′s second theorem on stability of motion. *American Mathematical Society Translations*, 1956, **24**: 19−77

23 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of homogeneous systems. In: Proceedings of American Control Conference. Albuquerque, USA: IEEE, 1997. 2513−2514

24 Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751−766

25 Ding S H, Li S H. Finite-time control for a class of nonlinear nonautonomous systems and its applications. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems-Series B-Applications and Algorithms*, 2006, **13**: 228−232

26 Ding S H, Li S H. Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques. In: Proceedings of American Control Conference. New York, USA: IEEE, 2007. 2459−2464

27 Feng Y, Yu X H, Man Z H. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 2002, **38**(12): 2159−2167

28 Huang X Q, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 2005, **41**(5): 881−888

29 Man Z H, Paplinski A P, Wu H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(12): 2464−2469

30 Yu X H, Man Z H. Multi-input uncertain linear systems with terminal sliding-mode control. *Automatica*, 1998, **34**(3): 389−392

31 Ding Shi-Hong, Li Shi-Hua. Finite time tracking control of spacecraft attitude. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, **28**(3): 628−633
(丁世宏, 李世华. 空间飞行器姿态的有限时间跟踪控制方法. 航空学报, 2007, **28**(3): 628−633)

32 Hong Yi-Guang, Wang Jian-Kui. Nonsmooth finite-time stabilization of a class of nonlinear systems. *Science in China, Series E*, 2005, **35**(6): 663−672
(洪奕光, 王剑魁. 一类非线性系统的非光滑有限时间镇定. 中国科学 E 辑, 2005, **35**(6): 663−672)

33 Li Shi-Hua, Ding Shi-Hong, Tian Yu-Ping. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(1): 101−104
(李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法. 自动化学报, 2007, **33**(1): 101−104)

丁世宏 东南大学博士研究生. 主要研究方向为非线性系统控制、飞行器姿态控制. E-mail: dingshihong@gmail.com
(**DING Shi-Hong** Ph. D. candidate at School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear system control and spacecraft attitude control.)

李世华 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为非线性系统控制、混沌控制、系统辨识. 本文通信作者.
E-mail: lsh@seu.edu.cn
(**LI Shi-Hua** Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear system control, chaos control, and system identification. Corresponding author of this paper.)

李 奇 东南大学自动化学院教授, 主要研究方向为智能控制、系统辨识.
(**LI Qi** Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers intelligent control and system identification.)