

分数抽样率变换中线性相位 FIR 滤波器 多相分解的对称性研究

沈智鹏^{1,2} 郭晨¹ 张宁¹ 殷福亮²

摘要 为提高分数抽样率变换系统的计算效率,在讨论其滤波器多相分解结构的基础上,利用线性相位 FIR 滤波器的系数对称性,构造多相分解系数的中心对称矩阵,推导出适用于任意分数抽样率和任意滤波器阶数的高效实现方法,并给出所需乘法与加法运算量的计算公式.测试结果表明,与直接计算相比,采用本文方法可减少 50% 乘法运算和 30% 加法运算,计算效率显著提高.

关键词 分数抽样率变换,线性相位 FIR 滤波器,多相分解,中心对称矩阵
中图分类号 TN911.72

Polyphase Decomposition Symmetry Exploitation of Linear Phase FIR Filters for Fractional Sampling Rate Conversion

SHEN Zhi-Peng^{1,2} GUO Chen¹ ZHANG Ning¹ YIN Fu-Liang²

Abstract In order to improve the computing efficiency of fractional sampling rate conversion, the centrosymmetric matrix of filter polyphase decomposition coefficients is constructed based on the symmetric FIR filter and its polyphase decomposition structure. Then, an efficient implementation applicable to arbitrary fractional sampling rate and filters length is presented. Moreover, the formulation of multiplicative and additive complexity is deduced. The test results show that the proposed method can reduce the number of multiplications by 50% and number of additions by 30%, compared with a direct implementation.

Key words Fractional sampling rate conversion, linear phase FIR filters, polyphase decomposition, centrosymmetric matrix

在信号处理应用中,常常需要将某个抽样信号变换成一个具有不同抽样率的信号,这就是多抽样率信号处理.抽取和内插是多抽样率信号处理中的两个基本环节^[1].多抽样率数字信号处理在数字信号处理中占有重要地位,并广泛应用于通信、数字音频处理、天线及雷达、图像处理等领域,如数字音频系统中的抽样率转换,克服了模拟滤波器在过渡带的相位非线性失真^[2];增量调制码与 PCM 码之间的抽样率转换,不需要昂贵的抗混叠滤波器且允许对信号以简单的、不成帧的、串行比特流格式进行处理^[3];应用于语音和图像信号的分频带编码,能对语

音和图像信号实现大比率的压缩,而且在需要时可以对原始信号进行降噪^[4].

单独的抽取和内插只能实现整数倍的抽样率转换,在实际应用中常常需要信号的抽取率以分数因子改变,这可通过级联内插器和抽取器,且在两者间加入一低通滤波器来实现,其中滤波器起到对内插后信号进行去镜像滤波且对抽取前信号进行抗混叠滤波的作用^[5].信号滤波在实时系统中占用较大计算量,为提高计算效率,出现了多种高效实现方案^[6-10].对滤波器进行多相分解是提高多抽样率信号处理计算效率的常用方法^[6].Mou 利用线性相位 FIR 滤波器系数的对称性,研究了任意阶对称 FIR 滤波器的一类高效优化结构^[7],并应用于整数倍抽样率变换系统,取得了较好的研究结果^[8].Bregovic 等尝试将 Mou 的研究推广到分数抽样率变换系统中^[9],但其研究只考虑内插因子的多相分解,且推导过程存在明显缺陷,未能取得理想效果.

本文在文献 [7-8] 的整数倍抽样率变换实现结构基础上,对分数抽样率变换滤波器进行完全多相分解,并研究其多相分解矩阵的对称性问题,推导出适用于任意整数和分数抽样率变换的高效实现方法.本文首先给出分数抽样率变换系统的滤波器完全多

收稿日期 2008-01-02 收修改稿日期 2008-03-31
Received January 2, 2008; in revised form March 31, 2008
国家自然科学基金 (60774046), 中国博士后科学基金 (20070421047), 大连海事大学青年教师科研基金 (DLMU-ZL-200823) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60774046), China Postdoctoral Science Foundation (20070421047), and Young Teacher Research Funds of Dalian Maritime University (DLMU-ZL-200823)
1. 大连海事大学信息科学技术学院 大连 116026 2. 大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024
1. College of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026 2. School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00154

相分解结构及优化过程; 接着以应用线性相位 FIR 滤波器的 $2/3$ 抽样率变换系统为例, 具体分析其多相分解矩阵的对称性和乘法、加法计算量; 最后推导出任意抽样率情况下多相分解矩阵的通用对称表达式和乘法、加法运算量计算公式。

1 分数抽样率变换系统的滤波器多相分解与优化

将抽取器和内插器级联就可以实现分数倍的抽样率变换。若进行 L/M 倍的抽样率变换, 可以先将输入作 M 倍的抽取, 再作 L 倍的内插; 或先作 L 倍的内插, 再作 M 倍的抽取。一般情况下, 抽取会使数据点减少, 产生信息丢失, 因此合理的方法是先对信号作内插, 然后再抽取, 系统结构框图如图 1 所示。其中滤波器 $H(z)$ 为具有抗混叠滤波和去滤除镜像作用的低通滤波器, 既去除内插后的镜像, 又防止抽取后的混叠。但通过分析, 可以看出图 1 给出的实现方法效率不高。在内插过程中, 滤波前的数据含有大量的零, 如果处理不好, 可能会带来大量不必要的计算; 在抽取过程中, 完成滤波后要从中舍弃 M 点中的 $M-1$ 点, 而滤波在实时系统中占用较大计算量。因此, 有必要对该实现结构进行优化, 提高计算效率。

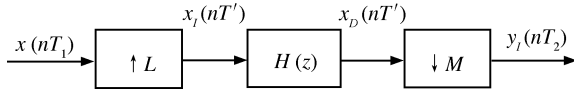


图 1 L/M 分数倍抽样率转换的系统实现
Fig. 1 A simple implementation of L/M sampling rate conversion

设滤波器传递函数 $H(z)$ 的幂次展开为

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} \quad (1)$$

将 n 进行分类, 其分类法则为被 K 所除余数相同者分为一类^[6], 则 n 被分为 K 类, 其被 K 所除后的余数分别为 $0, 1, 2, \dots, K-1$ 。因此上式可以分解为

$$\begin{aligned} H(z) = & \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(Ki)z^{-Ki} + z^{-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(Ki+1)z^{-Ki} + \\ & z^{-2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(Ki+2)z^{-Ki} + \dots + \\ & z^{-(K-1)} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(Ki+K-1)z^{-Ki} \quad (2) \end{aligned}$$

令 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(Ki+m)z^{-i} = E_m(z)$, 其中 $m =$

$0, 1, 2, \dots, K-1$, 则式 (2) 可写为

$$H(z) = E_0(z^K) + z^{-1}E_1(z^K) + \dots + z^{-(K-1)}E_{K-1}(z^K) \quad (3)$$

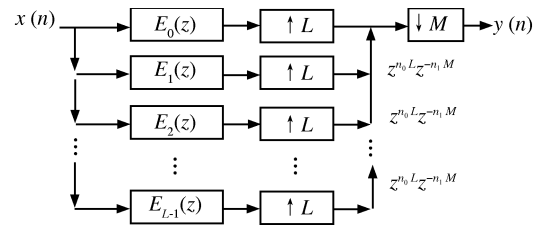
上式即为滤波器 $H(z)$ 的 K 相分解。

利用滤波器多相分解, 可以对图 1 所示的分数倍抽样率变换器进行优化^[10], 假设 M 与 L 互素 (否则可先约去最大公约数), 则由欧几里德定理, 存在正整数 n_0 和 n_1 , 满足 $n_1M - n_0L = 1$, 故可将 z^{-1} 写成 $z^{n_0L}z^{-n_1M}$ 。系统优化过程为:

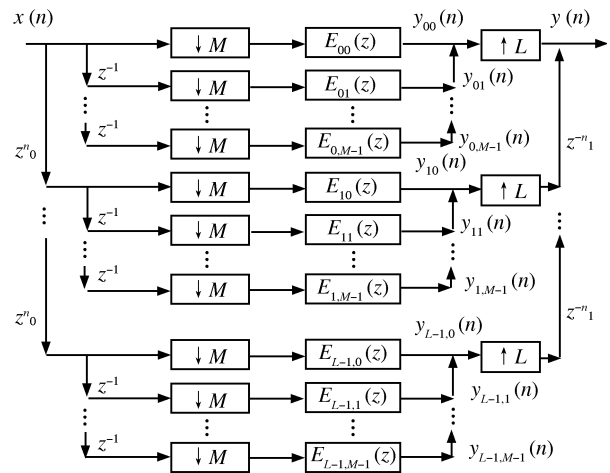
1) 将图 1 中滤波器与内插算子结合, 进行 L 相分解优化, 且将其中 z^{-1} 写成 $z^{n_0L}z^{-n_1M}$, 可得到如图 2(a) 所示结果;

2) 将内插算子与抽取算子移到一起并进行置换, 将 L 相滤波器分别与抽取算子结合在一起, 进一步进行 M 相分解, 得到图 2(b) 所示结果。

图 2(b) 中 $E_{ij}(z)$, $j = 1, 2, \dots, M-1$ 为 $E_i(z)$ 的 M 相分解成分, 可以看出在该实现结构中, 通过滤波器的数据达到最少, 能够取得最佳优化结果, 特别适用于实时系统。



(a) 滤波器 L 相分解优化后结果
(a) L -phase decomposition for $H(z)$



(b) 滤波器进一步 M 项分解优化后结果
(b) M -phase decomposition for $E_0(z), \dots, E_{L-1}(z)$

图 2 L/M 抽样率变换的多相结构优化过程
Fig. 2 Polyphase decomposition process of L/M sampling rate conversion

2 2/3 抽样率变换的滤波器多相分解矩阵对称性分析

设抽样率变换因子为 2/3, 即 $L = 2, M = 3$, 抗混叠和去滤除镜像滤波器采用线性相位 FIR 滤波器, 且阶数取 $N = 29$, 由 $n_1M - n_0L = 1$, 计算出 $n_1 = 1, n_0 = 1$.

设线性相位 FIR 滤波器为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{29} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(29)z^{-29}$$

由滤波器系数对称性可得 $h(i) = h(29 - i)$, 为便于讨论, 令 $h_i \leftrightarrow h(i)$, 先对 $H(z)$ 进行 L 相分解可得 $E_0(z), E_1(z)$, 再分别对其作 M 相分解, 得到如下结果:

$$\begin{aligned} E_{00}(z) &= h_0 + h_6z^{-1} + h_{12}z^{-2} + h_{18}z^{-3} + h_{24}z^{-4} \\ E_{01}(z) &= h_2 + h_8z^{-1} + h_{14}z^{-2} + h_{20}z^{-3} + h_{26}z^{-4} \\ E_{02}(z) &= h_4 + h_{10}z^{-1} + h_{16}z^{-2} + h_{22}z^{-3} + h_{28}z^{-4} \\ E_{10}(z) &= h_1 + h_7z^{-1} + h_{13}z^{-2} + h_{19}z^{-3} + h_{25}z^{-4} \\ E_{11}(z) &= h_3 + h_9z^{-1} + h_{15}z^{-2} + h_{21}z^{-3} + h_{27}z^{-4} \\ E_{12}(z) &= h_5 + h_{11}z^{-1} + h_{17}z^{-2} + h_{23}z^{-3} + h_{29}z^{-4} \end{aligned}$$

由此可得 2/3 抽样率变换的多相结构如图 3 所示.

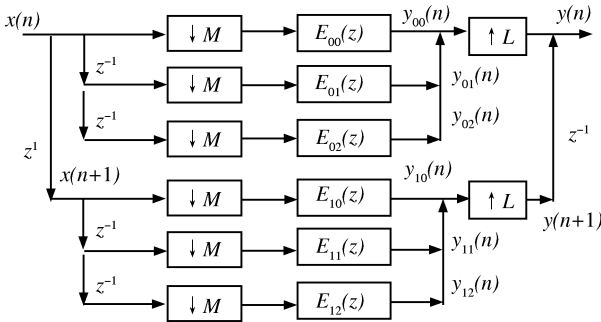


图 3 2/3 抽样率变换的多相结构

Fig. 3 Polyphase decomposition structure of sampling rate conversion by 2/3

图 3 中,

$$\begin{aligned} y_{00}(n) &= [h_0 \ h_6 \ h_{12} \ h_{18} \ h_{24}] \cdot \mathbf{x}_{n,n-4} \\ y_{01}(n) &= [h_2 \ h_8 \ h_{14} \ h_{20} \ h_{26}] \cdot \mathbf{x}_{n-1,n-5} \\ y_{02}(n) &= [h_4 \ h_{10} \ h_{16} \ h_{22} \ h_{28}] \cdot \mathbf{x}_{n-2,n-6} \\ y_{10}(n) &= [h_1 \ h_7 \ h_{13} \ h_{19} \ h_{25}] \cdot \mathbf{x}_{n+1,n-3} \\ y_{11}(n) &= [h_3 \ h_9 \ h_{15} \ h_{21} \ h_{27}] \cdot \mathbf{x}_{n,n-4} \\ y_{12}(n) &= [h_5 \ h_{11} \ h_{17} \ h_{23} \ h_{29}] \cdot \mathbf{x}_{n-1,n-5} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x}_{i,j} = [x(i) \ x(i-1) \ \dots \ x(j)]^T$, 则采样输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{00}(n) + y_{01}(n) + y_{02}(n) \\ y(n+1) &= y_{10}(n) + y_{11}(n) + y_{12}(n) \end{aligned} \quad (5)$$

可以看出, 经过多相分解后得到的各子项滤波器系数不再具备对称性, 若直接对式 (4) 和 (5) 进行计算, 需要进行乘法运算 $Mults = N + 1 = 30$ 次, 加法运算 $Adds = N + 1 - L = 28$ 次, 而每个抽样输出需要计算量为 $Mults = 15, Adds = 14$.

现构造如下中心对称矩阵

$$H_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & h_0 & h_6 & h_{12} & h_{11} & h_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & h_8 & h_{14} & h_9 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & h_{10} & h_{13} & h_7 & h_1 \\ h_1 & h_7 & h_{13} & h_{10} & h_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_9 & h_{14} & h_8 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_5 & h_{11} & h_{12} & h_6 & h_0 & 0 \end{bmatrix}$$

设

$$\mathbf{y} = [y_{00}(n) \ y_{01}(n) \ y_{02}(n) \ y_{10}(n) \ y_{11}(n) \ y_{12}(n)]^T$$

同时考虑滤波器系数对称性 $h(i) = h(29 - i)$, 可得

$$\mathbf{y} = H_{6 \times 8} \cdot \mathbf{x}_{n+1,n-6} \quad (6)$$

设矩阵 A, B 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & h_0 & h_6 & h_{12} \\ 0 & 0 & h_2 & h_8 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_5 & h_{11} \\ 0 & h_3 & h_9 & h_{14} \\ h_1 & h_7 & h_{13} & h_{10} \end{bmatrix}$$

由矩阵 $H_{6 \times 8}$ 的中心对称性^[7], 可得

$$H_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} A & BJ_3 \\ J_3B & J_3AJ_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & J_3 \\ J_3 & -I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & J_3 \\ J_3 & -I_3 \end{bmatrix}$$

其中 J_N 为置换矩阵, 且有

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{23} & d_{22} & d_{21} & d_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} & d_{12} & d_{11} & d_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{03} & d_{02} & d_{01} & d_{00} \end{bmatrix}$$

满足

$$\begin{aligned} c_{00} &= 0, & c_{01} &= \frac{h_0}{2}, & c_{02} &= \frac{h_6 + h_5}{2}, & c_{03} &= \frac{h_{12} + h_{11}}{2} \\ c_{10} &= 0, & c_{11} &= \frac{h_3}{2}, & c_{12} &= \frac{h_2 + h_9}{2}, & c_{13} &= \frac{h_8 + h_{14}}{2} \\ c_{20} &= \frac{h_1}{2}, & c_{21} &= \frac{h_7}{2}, & c_{22} &= \frac{h_{13}}{2}, & c_{23} &= \frac{h_4 + h_{10}}{2} \\ d_{00} &= 0, & d_{01} &= \frac{-h_0}{2}, & d_{02} &= \frac{h_6 - h_5}{2}, & d_{03} &= \frac{h_{12} - h_{11}}{2} \\ d_{10} &= 0, & d_{11} &= \frac{-h_3}{2}, & d_{12} &= \frac{h_2 - h_9}{2}, & d_{13} &= \frac{h_8 - h_{14}}{2} \\ d_{20} &= \frac{-h_1}{2}, & d_{21} &= \frac{-h_7}{2}, & d_{22} &= \frac{-h_{13}}{2}, & d_{23} &= \frac{h_4 - h_{10}}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_3 & J_3 \\ J_3 & -I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(A+B)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{J_3(A-B)J_3}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{n+1} + x_{n-6} \\ x_n + x_{n-5} \\ x_{n-1} + x_{n-4} \\ x_{n-2} + x_{n-3} \\ x_{n-2} - x_{n-3} \\ x_{n-1} - x_{n-4} \\ x_n - x_{n-5} \\ x_{n+1} - x_{n-6} \end{bmatrix} \quad (7)$$

通过分析比较, 矩阵 $H_{6 \times 8}$ 可重新表示为

$$H_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} I_3 & J_3 \\ J_3 & -I_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{(A+B)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{J_3(A-B)J_3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & J_3 \\ J_3 & -I_3 \end{bmatrix}$$

为此, 式 (6) 可以改写为

由于矩阵 A 、 B 已知, 系数 $c_{i,j}$ 、 $d_{i,j}$ 可事先计算并存入存储器中, 因此该抽样率变换输出可用如图 4 所示的计算结构来实现, 所需的乘法和加法运算次数分别为 $Mults = (N - 1)/2 + 5 = 20$, $Adds = 2(N + 1)/3 + 12 = 32$, 每个抽样输出所需的计算量为 $Mults = 10$, 比直接计算时少; $Adds = 16$, 比直接计算时多. 表 1 (见下页) 给出了滤波器阶数 N 变化时, 分别应用直接计算方法和本文方法计算每个

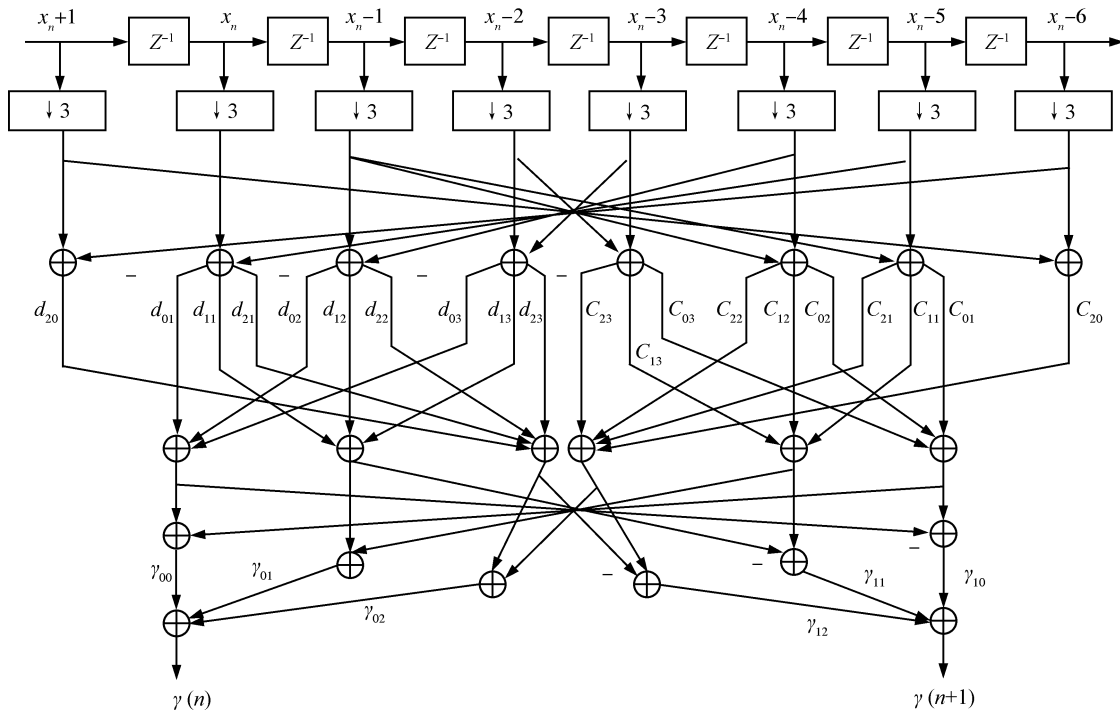


图 4 2/3 抽样率变换的计算实现结构

Fig.4 Implementation structure of sampling rate conversion by 2/3

$$\mathbf{y} = [y_{00} \ \cdots \ y_{0,M-1} \ y_{10} \ \cdots \ y_{1,M-1} \ \cdots \ y_{L-1,0} \ \cdots \ y_{L-1,M-1}]^T \quad (8)$$

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & h_0 & h_{ML} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & h_L & h_{L+ML} & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & \cdots & \cdots & h_{N-L+1} \\ & & & \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_i & \cdots & h_{i+(K-1)ML} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & h_{i+L} & \cdots & h_{i+L+(K-1)ML} & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 & h_{i+(M-1)L} & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \vdots \\ h_{L-1} & h_{L-1+ML} & \cdots & h_{L-1+(K-1)ML} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & h_{2L-1} & h_{2L-1+ML} & \cdots & h_{N-L} & 0 & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{ML-1} & h_{(ML-1)+ML} & \cdots & h_N & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

抽样输出所需乘法和加法运算量对比情况 (其中 M^+ 、 A^+ 为本文方法计算所需的乘法和加法运算量, M^* 、 A^* 为直接计算所需的乘法和加法运算量), 可以看出随着滤波器阶数 N 的增加, 本文计算结构需要的乘法和加法运算量大大减少.

通过比较可以看出, 文献 [9] 推导的计算结构只对内插因子进行多相分解, 存在明显缺陷; 而本文推导的结果表示了滤波器的完全多相分解结构, 具有高效性.

表 1 2/3 抽样时每个抽样输出所需乘法和加法运算量对比
Table 1 Implementation complexity for fractional sampling rate conversion by 2/3 in number of multiplications and additions per output sample

N	M^+	A^+	M^*	A^*	M^+/M^*	A^+/A^*
29	10	16	15	14	0.67	1.14
41	13	20	21	20	0.62	1.00
65	19	28	33	32	0.58	0.89
113	31	46	57	56	0.54	0.82
209	55.5	76	105	104	0.53	0.73
401	103	140	201	200	0.51	0.70

3 任意抽样率变换的滤波器多相分解矩阵对称性分析

若给定抽样率因子 L/M 及线性相位 FIR 滤波器阶数 N , 假设 $N + 1$ 能被 ML 整除, 且 $(N +$

$1)/ML = K$, 由 $n_1M - n_0L = 1$ 可计算出 n_1, n_0 , 并构造通用中心对称矩阵 H^* , 令式 (8) 和 (9) (见本页上方) 成立, 则有

$$\mathbf{y} = H^* \cdot \mathbf{x}_{n+n_0(L-1), n-(K+M-2)} \quad (10)$$

下面分四种情况进行讨论, 其中各参数均为整数.

1) $ML = 2R, K + n_0(L - 1) + M - 1 = 2P$ 可构造 $2R$ 行、 $2P$ 列的矩阵如下:

$$H_{2R \times 2P} = \begin{bmatrix} A & BJ_P \\ J_R B & J_R A J_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R & J_R \\ J_R & -I_R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{(A+B)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{J_R(A-B)J_P}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_P & J_P \\ J_P & -I_P \end{bmatrix}$$

式中

$$A_{R \times P} = \begin{bmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,P-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,P-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{R-1,0} & h_{R-1,1} & \cdots & h_{R-1,P-1} \end{bmatrix}$$

$$B_{R \times P} = \begin{bmatrix} h_{2R-1,0} & h_{2R-1,1} & \cdots & h_{2R-1,P-1} \\ h_{2R-2,0} & h_{2R-2,1} & \cdots & h_{2R-2,P-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{R,0} & h_{R,1} & \cdots & h_{R,P-1} \end{bmatrix}$$

由中心对称矩阵的一般表达式 H^* , 可以求出矩阵 A 和 B 中元素 $h_{i,j}$ 的表达式为

$$\begin{cases} h_{i,j} = h_{a+bL+cML}, & c \geq 0 \\ h_{i,j} = 0, & c < 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中参数满足 $i = aM + b$, $c = j - [n_0(L-1-a) + b]$, 与矩阵 A 中元素 $h_{i,j}$ 对应的矩阵 B 中元素为 $h_{2R-i-1,j}$, 根据式 (11), 矩阵 A 和 B 对应元素同时为零的元素个数可由下列伪代码求解:

```
for  $i \leftarrow 0, \dots, (R-1)$ 
   $i = aM + b$ 
   $j_1 = n_0(L-1-a) + b$ 
   $j_2 = n_0(a-1) + b + 1$ 
for  $j \leftarrow 0, \dots, (P-1)$ 
  if  $(j < j_1)$  and  $(j < j_2)$ 
    then  $Z \leftarrow Z + 1$ 
```

其中 Z 即为所求得的矩阵 A 和 B 中对应元素同时为零的元素个数. 最后可推出每个抽样输出的乘法和加法运算量计算公式为

$$Mults = \frac{2(RP - Z)}{L} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{(N+1)}{2} + \frac{ML[n_0(L-1) + M - 1]}{2} - 2Z \right\}$$

$$Add_s = \frac{1}{L} [K + n_0(L-1) + (L+1)(M-1)] + Mults$$

2) $ML = 2R$, $K + n_0(L-1) + M - 1 = 2P + 1$ 可构造 $2R$ 行、 $2P + 1$ 列的矩阵如下:

$$H = \begin{bmatrix} A & F & BJ_P \\ J_R B & J_R F & J_R A J_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R & J_R \\ J_R & -I_R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{(A+B)}{2} & F & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_R(A-B)J_P}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_P & 0 & J_P \\ 0 & 1 & 0 \\ J_P & 0 & -I_P \end{bmatrix}$$

其中矩阵 A 、 B 与情况 1) 中相同, 且有

$$Mults = \frac{[2(RP - Z) + R]}{L} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{(N+1)}{2} + \frac{ML[n_0(L-1) + M - 2]}{2} - 2Z + R \right\}$$

$$Add_s = \frac{1}{L} [K + n_0(L-1) + (L+1)(M-1) - 1] + Mults$$

3) $ML = 2R + 1$, $K + n_0(L-1) + M - 1 = 2P$ 可构造 $2R + 1$ 行、 $2P$ 列的矩阵如下:

$$H = \begin{bmatrix} A & BJ_P \\ E & EJ_P \\ J_R B & J_R A J_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R & 0 & J_R \\ 0 & 1 & 0 \\ J_R & 0 & -I_R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & 0 \\ E & 0 \\ 0 & \frac{J_R(A-B)J_P}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_P & J_P \\ J_P & -I_P \end{bmatrix}$$

其中矩阵 A 与情况 1) 中相同, 矩阵 B 与 E 分别为

$$B_{R \times P} = \begin{bmatrix} h_{2R,0} & h_{2R,1} & \cdots & h_{2R,P-1} \\ h_{2R-1,0} & h_{2R-1,1} & \cdots & h_{2R-1,P-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{R+1,0} & h_{R+1,1} & \cdots & h_{R+1,P-1} \end{bmatrix}$$

$$E_{1 \times P} = [h_{R,0} \quad h_{R,1} \quad \cdots \quad h_{R,P-1}]$$

此时每个抽样输出的乘法和加法运算量计算公式为

$$Mults = \frac{1}{L} \left\{ 2(RP - Z) + P - n_0 \left[\frac{L}{2} \right] - \left[\frac{M}{2} \right] \right\} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{N+1}{2} + (ML-1) \frac{n_0(L-1) + M - 1}{2} - K - 2Z + P - n_0 \left[\frac{L}{2} \right] - \left[\frac{M}{2} \right] \right\}$$

$$Add_s = \frac{1}{L} [K + n_0(L-1) + (L+1)(M-1) - 1] + Mults$$

4) $ML = 2R + 1$, $K + n_0(L-1) + M - 1 = 2P + 1$ 可构造 $2R + 1$ 行、 $2P + 1$ 列的矩阵如下:

$$H = \begin{bmatrix} A & F & BJ_P \\ E & h_{R,P} & EJ_P \\ J_RB & J_RF & J_RA J_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R & 0 & J_R \\ 0 & 1 & 0 \\ J_R & 0 & -I_R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{(A+B)}{2} & F & 0 \\ E & h_{R,P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_R(A-B)J_P}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_P & 0 & J_P \\ 0 & 1 & 0 \\ J_P & 0 & -I_P \end{bmatrix}$$

其中矩阵 A 与情况 1) 中的相同, 矩阵 F 与情况 2) 中的相同, 矩阵 B 、 E 与情况 3) 中的相同. 同理可得乘法和加法运算量计算公式为

$$Mults = \frac{1}{L} \left\{ 2(RP - Z) + P - n_0 \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + R \right\} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{N+1}{2} + (ML-1) \frac{n_0(L-1) + M - 2}{2} \right. \\ \left. K - 2Z + P - n_0 \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor + R + 1 \right\}$$

$$Adds = \frac{1}{L} [K + n_0(L-1) + (L+1)(M-1) - 1] + Mults$$

以上对情况 1)~4) 的讨论是基于 $N+1$ 能被 ML 整除, 即 $N+1 = KML$ 情况下得出的结果, 下面讨论 $N+1$ 不能被 ML 整除的情况, 即 $N+1 < KML$ 或 $N+1 > KML$.

与前面讨论相同, 设抽样率变换因子为 $2/3$, 即 $L=2, M=3$, 但滤波器阶数取 $N=27$, 取 $K=5$, 则有 $N+1 = KML - 2 < KML$. 对滤波器进行多相分解, 可得形如式 (4) 的计算式 (12), 其中 $y_{01}(n)$ 少了 h_{28} 系数项, $y_{12}(n)$ 少了 h_{29} 系数项.

$$y_{02}(n) = [h_4 \ h_{10} \ h_{16} \ h_{22}] \cdot \mathbf{x}_{n-2, n-5}$$

$$y_{12}(n) = [h_5 \ h_{11} \ h_{17} \ h_{23}] \cdot \mathbf{x}_{n-1, n-4} \quad (12)$$

可构造如下两个中心对称矩阵

$$H_{4 \times 7} = \begin{bmatrix} 0 & h_0 & h_6 & h_{12} & h_9 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & h_8 & h_{13} & h_7 & h_1 \\ h_1 & h_7 & h_{13} & h_8 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_9 & h_{12} & h_6 & h_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & h_4 & h_{10} & h_{11} & h_5 \\ h_5 & h_{11} & h_{10} & h_4 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{y}_1 = [y_{00}(n) \ y_{01}(n) \ y_{10}(n) \ y_{11}(n)]^T$, $\mathbf{y}_2 = [y_{02}(n) \ y_{12}(n)]^T$, 同时考虑滤波器系数对称性 $h(i) = h(27-i)$, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = H_{4 \times 7} \cdot \mathbf{x}_{n+1, n-5} \\ \mathbf{y}_2 = H_{2 \times 5} \cdot \mathbf{x}_{n-1, n-5} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $H_{4 \times 7}$ 与 $H_{2 \times 5}$ 都是中心对称矩阵, 因此上式可用情况 1)~4) 中的方法进行计算.

假设滤波器阶数取 $N=31$, 同样取 $K=5$, 则有 $N+1 = KML + 2 > KML$. 此时同理可对滤波器进行多相分解, 并通过构造中心对称矩阵, 得到类似的输出形式, 并用情况 1)~4) 的方法进行计算.

由以上讨论可以看出, 对任意抽样率因子 L/M , 在任意线性相位 FIR 滤波器阶数 N 情况下, 都可以通过上述方法构造出对称矩阵, 从而大大减少了乘法和加法运算量.

为测试本文方法的计算效率, 表 2 给出了抽样率因子为 $3/2$ 时, 在不同滤波器阶数下, 分别应用本文提出方法和直接计算方法, 每个抽样输出所需乘法和加法运算量对比情况 (其中 M^+ 、 A^+ 为本文方法计算所需的乘法和加法运算量, M^* 、 A^* 为直接计算所需的乘法和加法运算量). 结合表 1 与表 2 可以看出, 随着滤波器阶数 N 的增加, 本文计算方法所需乘法运算量减少约 50%, 加法运算量减少约 30%.

表 2 $3/2$ 抽样时每个抽样输出所需乘法和加法运算量对比
Table 2 Implementation complexity for fractional sampling rate conversion by $3/2$ in number of multiplications and additions per output sample

N	M^+	A^+	M^*	A^*	M^+/M^*	A^+/A^*
65	13	19	22	21	0.59	0.90
131	24	33	44	43	0.55	0.77
264	46	63	88	87	0.52	0.72
527	90	122	176	175	0.51	0.70
750	127	171	250	249	0.508	0.69
999	168	226	333	332	0.504	0.68

需要说明的是, 上述推导得到的构造方法和计算公式同样适用于整数倍抽样率变换系统, 此时有 $L=1$ 或 $M=1$. 当 $L=1$ 时, 成为抽取因子为整数 M 的抽取器, 可取 $n_0 = -1, n_1 = 0$; 当 $M=1$ 时, 成为内插因子为整数 L 的内插器, 可取 $n_0 = 0, n_1 = 1$. 其中参数 n_0 和 n_1 同样满足 $n_1 M - n_0 L =$

1, 但与欧几里德定理定义稍有差别, 此时 n_0 和 n_1 的取值范围不再局限于正整数, 而是任意整数.

4 结论

本文讨论了分数抽样率变换系统的滤波器完全多相分解结构及优化过程, 利用线性相位 FIR 滤波器的系数对称性特点, 通过构造滤波器多相分解系数的中心对称矩阵, 推导出适用于任意分数抽样率变换和任意滤波器阶数的高效实现方法, 并给出了每个抽样输出所需乘法与加法运算量的计算公式, 该实现方法与计算公式同样适用于任意整数抽样率变换系统. 同时, 以 $2/3$ 抽样率和 $3/2$ 抽样率为例, 测试了本文方法的计算效率. 结果表明与直接计算相比, 采用本文提出方法所需乘法运算减少约 50%, 加法运算减少达 30%, 计算效率有很大提高.

References

- 1 Fliege N J. *Multirate Digital Signal Processing: Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets*. Chichester, UK: John Wiley and Sons, 1994
- 2 Wang G Y. Analysis of quantization errors in subband speech coding with modified DFT filter banks. *Signal Processing*, 2006, **86**(2): 341–352
- 3 Krishna A V, Hari K V S. Filter bank precoding for FIR equalization in high-rate MIMO communications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(5): 1645–1652
- 4 Toshihisa T, Yasutaka H, Yukihiko Y. Variable-length lapped transforms with a combination of multiple synthesis filter banks for image coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(1): 81–88
- 5 Tao Ran, Zhang Hui-Yun, Wang Yue. *Multirate Digital Signal Processing Theory and Its Application*. Beijing: Tsinghua University Press, 2007
(陶然, 张惠云, 王越. 多抽样率数字信号处理理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 2007)
- 6 Seidner D. Polyphase antialiasing in resampling of images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **14**(11): 1876–1889
- 7 Mou Z J. Minimal structures for symmetric FIR filters of arbitrary length. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, **41**(5): 1790–1808
- 8 Mou Z J. Symmetry exploitation in digital interpolators/decimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, **44**(10): 2611–2615
- 9 Bregovic R, Saramaki T, Yu Y J, Lim Y C. An efficient implementation of linear-phase FIR filters for a rational sampling rate conversion. In: Proceedings of IEEE International

Symposium on Circuits and Systems. Kos, Greece: IEEE, 2006. 5395–5398

- 10 Shen Guo-Chong. *Multirate Signal Processing and Its Applications to Real Time System* [Ph. D. dissertation], Zhejiang University, China, 2001
(沈国重. 多抽样率信号处理方法及其在实时系统中的应用 [博士学位论文], 浙江大学, 中国, 2001)



沈智鹏 大连海事大学信息科学技术学院副教授, 博士后. 主要研究方向为数字信号处理, 船舶系统控制与仿真. 本文通信作者. E-mail: s_z_p@263.net

(**SHEN Zhi-Peng** Associate professor at the College of Information Science and Technology, Dalian Maritime University. His research interest covers

digital signal processing, ship system control and simulation. Corresponding author of this paper.)



郭晨 大连海事大学信息科学技术学院教授. 主要研究方向为船舶系统控制与仿真, 智能控制.

E-mail: guoc@dlmu.edu.cn

(**GUO Chen** Professor at the College of Information Science and Technology, Dalian Maritime University. His research interest covers ship system control and simulation, and intelligent control.)



张宁 大连海事大学信息科学技术学院博士研究生. 主要研究方向为可用性工程.

E-mail: Zhangning276@sohu.com

(**ZHANG Ning** Ph. D. candidate at the College of Information Science and Technology, Dalian Maritime University. Her main research interest is usability engineering.)



殷福亮 大连理工大学电子与信息工程学院教授. 主要研究方向为语音信号处理与宽带无线通信技术.

E-mail: flyin@dlut.edu.cn

(**YIN Fu-Liang** Professor at the School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology. His research interest covers

speech signal processing and broadband wireless communication.)