

基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性加权观测 融合无迹 Kalman 滤波器

李 云^{1,2} 孙书利¹ 郝 钢¹

摘 要 对非线性多传感器系统, 基于 Gauss-Hermite 逼近方法和加权最小二乘法, 提出了一种具有普适性的非线性加权观测融合算法. 该算法可将一个高维观测压缩为一个低维观测. 在此基础上, 结合无迹 Kalman 滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF), 提出了非线性加权观测融合无迹 Kalman 滤波器 (WMF (Weighted measurement fusion)-UKF). 与集中式融合 UKF (CMF (Centralized measurement fusion)-UKF) 相比, 该算法计算负担小且具有逼近的估计精度. 特别是在传感器数量较大时, 该算法在计算量上的优势更加明显. 仿真例子验证了算法的有效性.

关键词 非线性系统, 加权观测融合, Gauss-Hermite 逼近, 无迹 Kalman 滤波器

引用格式 李云, 孙书利, 郝钢. 基于 Gauss-Hermite 逼近的非线性加权观测融合无迹 Kalman 滤波器. 自动化学报, 2019, 45(3): 593–603

DOI 10.16383/j.aas.c170534

Weighted Measurement Fusion Unscented Kalman Filter Using Gauss-Hermite Approximation for Nonlinear Systems

LI Yun^{1,2} SUN Shu-Li¹ HAO Gang¹

Abstract A universal nonlinear weighted measurement fusion algorithm is proposed using the Gauss-Hermite approximation method and the weighted least squares method for multi-sensor nonlinear systems. A high-dimensional measurement is compressed to a low dimensional measurement by this algorithm. Combined with the unscented Kalman filter (UKF), a nonlinear weighted measurement fusion UKF (WMF-UKF) is proposed based on the algorithm. Compared with the centralized measurement fusion UKF (CMF-UKF), the proposed algorithm has a reduced computational cost and approximate estimation accuracy. Its advantage in computation is obvious when the number of sensors is large. A simulation example illustrates the effectiveness of the algorithm.

Key words Nonlinear system, weighted measurement fusion (WMF), Gauss-Hermite approximation, unscented Kalman filter (UKF)

Citation Li Yun, Sun Shu-Li, Hao Gang. Weighted measurement fusion unscented Kalman filter using Gauss-Hermite approximation for nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2019, 45(3): 593–603

滤波算法在定位、目标跟踪、导航和故障诊断

收稿日期 2017-09-21 录用日期 2018-03-16
Manuscript received September 21, 2017; accepted March 16, 2018

国家自然科学基金 (61573132, 61503127), 黑龙江省省级自然科学基金 (F2015014), 黑龙江省普通高等学校长江学者后备支持计划 (2013CJHB005), 黑龙江省高等教育机构科技创新研究队伍 (2012TD007), 黑龙江大学电子工程重点实验室基金资助

Supported by Natural Science Foundation of China (61573132, 61503127), Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (F2015014), Chang Jiang Scholar Candidates Program for Provincial Universities in Heilongjiang (2013CJHB005), Science and Technology Innovative Research Team in Higher Educational Institutions of Heilongjiang Province (2012TD007), and the Electronic Engineering Province Key Laboratory

本文责任编辑 李鸿一

Recommended by Associate Editor LI Hong-Yi

1. 黑龙江大学电子工程学院 哈尔滨 150080 2. 哈尔滨商业大学计算机与信息工程学院 哈尔滨 150080

1. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080 2. Computer and Information Engineering, Harbin University of Commerce, Harbin 150080

等方面发挥着重要作用^[1-3]. 然而, 单个传感器难以满足高精度、高容错性等要求, 因此, 多传感器融合估计技术应运而生. 在过去的几十年里, 线性系统的融合估计理论已经有了一系列完整的理论基础^[3]. 目前常用的信息融合估计方法主要包括两个基本的结构: 集中式融合估计和分布式融合估计. 集中式融合估计将所有传感器信息进行增广, 并基于增广的观测设计融合状态估计^[4-5]. 该算法没有信息丢失, 当所有传感器没有故障时, 估计精度具有全局最优性, 可作为其他融合算法在精度上的衡量标准, 也是现在多传感器系统经常采用的融合方式之一^[6-7]. 然而, 由于集中式融合算法计算量大, 在传感器数量较多的情况下, 集中式融合算法会导致整个系统实时性差. 特别是当存在故障传感器时可能导致滤波器发散. 分布式融合算法是把各个局部状态估计送入融合中心, 根据一定的融合准则进行加权得到融

合估计^[3,8-9]. 分布式融合方式具有良好的鲁棒性, 计算量小且容错性强, 估计精度是局部最优、全局最优的.

加权观测融合算法根据加权最小二乘准则, 将集中式融合系统增广的高维观测进行压缩处理, 得到降维的观测, 基于降维观测设计的滤波器可以明显地减小计算负担. 对于线性系统, 加权观测融合算法在最小方差意义下和集中式融合算法具有数值等价性, 因而具有重要的应用价值^[10]. 然而, 绝大多数系统具有非线性特性, 例如, 大多数定位系统观测方程是在球面坐标系下建立的, 而估计和分析状态时往往又是在笛卡尔坐标系下进行的, 这使得观测方程具有某种非线性特性^[6-7].

近些年, 基于贝叶斯估计框架和采样逼近的非线性滤波算法得到了广泛研究, 例如无迹 Kalman 滤波器 (Unscented Kalman filter, UKF)^[11-12]、容积滤波器 (Cubature Kalman filter, CKF)^[13-14]、粒子滤波器 (Particle filter, PF)^[15], 以及其他一些非线性滤波器^[16]. 这些非线性滤波器都可以统一处理非线性滤波问题, 但各具优缺点. UKF 与 CKF 具有相同的滤波精度, 区别在于粒子权值的计算上存在差异. PF 在有充足粒子条件下具有较高的滤波精度, 精度普遍要高于 UKF 与 CKF, 但是较大的计算负担成为了 PF 的一大缺点. 事实上, 以上提到的滤波器都可以与本文提出的加权观测融合算法相结合, 形成加权观测融合滤波算法, 本文将 UKF 滤波器为例, 给出一种非线性加权观测融合滤波算法.

非线性滤波算法的大量涌现表明了学者们对非线性问题的关注. 涉及到非线性系统的融合方法也层出不穷^[17-20]. 近年来, 有学者通过随机集、人工神经网络、模糊逻辑、粗糙集、D-S 证据理论等非概率方法提出了非线性融合方法^[21-23]. 这些方法可实现非线性系统的信息融合以及决策级融合, 但这些方法普遍存在信息丢失等情况, 所以这些算法不具有最优性或渐近最优性. 文献 [24] 提出了一种在线性最小方差意义下最优非线性加权观测融合 UKF 滤波器. 该算法要求传感器观测方程是相同的, 因此具有较大的局限性. 文献 [25] 中, 基于 Taylor 级数和 UKF, 提出了加权观测融合无迹 Kalman 滤波器. 该算法可以统一处理非线性融合估计问题, 但该算法需要实时计算 Taylor 级数展开项系数, 这将带来一定的在线计算负担, 而且在展开点 (状态预报) 偏离过大, 或者 Taylor 级数展开项较少的时候, 滤波精度难以保证.

Gauss-Hermite 逼近方法^[26-28] 可以通过固定点采样、Gauss 函数和 Hermite 多项式逼近任意初等函数, 且具有较好的拟合效果. 为了降低该逼近方法的计算负担, 本文采用了分段处理方法, 即将

状态区间进行分段逼近, 并离线计算每段的加权系数矩阵. 本文主要创新点及工作如下: 首先, 利用分段的 Gauss-Hermite 逼近方法将系统观测方程统一处理, 得到近似的中介函数以及系数矩阵. 进而基于此中介函数、系数矩阵以及加权最小二乘法, 提出了非线性加权观测融合算法. 该融合算法可对增广的高维观测进行压缩降维, 为后续滤波等工作降低计算负担. 最后, 结合 UKF 滤波算法, 提出了非线性加权观测融合 UKF 滤波算法 (Weighted measurement fusion UKF, WMF-UKF). 该算法可以处理非线性多传感器系统的融合估计问题. 与集中式融合 UKF (Centralized measurement fusion UKF, CMF-UKF) 算法相比, WMF-UKF 具有与之逼近的估计精度, 但计算量明显降低, 并且随着传感器数量的增加, 该算法在计算量上的优势将更加明显. 本文为非线性多传感器系统信息融合估计提供了一个有效途径. 在定位、导航、目标跟踪、通信和大数据处理等领域具有潜在应用价值^[29-31].

1 问题阐述

考虑一个非线性多传感器系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{w}(k) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}^{(j)}(k) = \mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(j)}(k), j = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

其中, $\mathbf{f}(\cdot, \cdot) \in \mathbf{R}^n$ 为已知的非线性函数, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为 k 时刻系统状态, $\mathbf{h}^{(j)}(\cdot, \cdot) \in \mathbf{R}^{m_j}$ 为已知的第 j 个传感器的观测函数, $\mathbf{z}^{(j)}(k) \in \mathbf{R}^{m_j}$ 为第 j 个传感器的观测, $\mathbf{w}(k) \sim p_{\mathbf{w}_k}(\cdot)$ 为状态噪声, $\mathbf{v}^{(j)}(k) \sim p_{\mathbf{v}_k^{(j)}}(\cdot)$ 为第 j 个传感器的观测噪声. 假设 $\mathbf{w}(k)$ 和 $\mathbf{v}^{(j)}(k)$ 是零均值、方差阵分别为 $\mathbf{Q}_w$ 和 $\mathbf{R}^{(j)}$ 且相互独立的白噪声, 即

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}^{(j)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(k) & (\mathbf{v}^{(l)}(k))^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^{(j)}\delta_{jl} \end{bmatrix} \delta_{tk} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{E}$ 为均值号, 上标 $\mathbf{T}$ 为转置号, $\delta_{tt} = 1$, $\delta_{tk} = 0$ ($t \neq k$).

在传感器网络中, 传感器的能量是有限的, 为了节省能量, 假设分布在空间上的传感器之间没有通信, 传感器的观测数据通过网络传输给融合中心, 在融合中心对数据进行压缩和滤波处理. 而在工程中经常遇到的未知参数问题^[32-33]、相关性问题^[34-35]、传感器分布及管理^[36]等问题, 本文没有涉及.

本文将从集中式融合结构入手, 引出本文所提出的基于 Gauss-Hermite 逼近的加权观测融合方

法. 该融合方法将观测函数分解成 Gauss 函数和 Hermite 多项式的组合形式, 利用其系数矩阵对集中式融合系统观测方程进行降维, 得到一个维数较低的加权融合观测方程. 对加权融合观测方程与状态方程形成的加权观测融合系统进行滤波器设计, 可获得与集中式融合逼近的估计精度, 并降低了集中式融合估计算法的计算量.

引理 1^[4-5]. 对系统式 (1) 和式 (2), 全局最优集中式融合系统的观测方程为:

$$\mathbf{z}^{(0)}(k) = \mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(0)}(k) \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{z}^{(0)}(k) = [\mathbf{z}^{(1)\mathrm{T}}(k), \mathbf{z}^{(2)\mathrm{T}}(k), \dots, \mathbf{z}^{(L)\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}} \quad (5)$$

$$\mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{x}(k), k) = [\mathbf{h}^{(1)\mathrm{T}}(\mathbf{x}(k), k), \mathbf{h}^{(2)\mathrm{T}}(\mathbf{x}(k), k), \dots, \mathbf{h}^{(L)\mathrm{T}}(\mathbf{x}(k), k)]^{\mathrm{T}} \quad (6)$$

$$\mathbf{v}^{(0)}(k) = [\mathbf{v}^{(1)\mathrm{T}}(k), \mathbf{v}^{(2)\mathrm{T}}(k), \dots, \mathbf{v}^{(L)\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

并且 $\mathbf{v}^{(0)}(k)$ 的协方差矩阵由下式给出:

$$\mathbf{R}^{(0)} = \text{diag}\{\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{R}^{(2)}, \dots, \mathbf{R}^{(L)}\} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}^{(*)\mathrm{T}}(k) = (\mathbf{\Lambda}^{(*)}(k))^{\mathrm{T}} (\mathbf{\Lambda} = \mathbf{z}, \mathbf{h}, \mathbf{v})$, “diag{·}” 表示对角阵.

对系统式 (1) 和式 (4), 应用非线性滤波算法 (例如扩展 Kalman 滤波器 (Extended Kalman filter, EKF), UKF, CKF, PF 等), 可得到相应的全局最优集中式融合非线性滤波器. 但由于集中式融合的观测方程式 (4) 是观测增广扩维形成的, 使得基于该高维观测的估计算法的计算负担随着传感器数量的增加而迅速增加. 因此, 找到等效的或者近似的融合方法来降低计算量是十分必要的. 下面本文将解决非线性系统增广观测的降维问题.

定理 1. 对系统式 (1) 和式 (2), 若存在一个中介函数 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k) \in \mathbf{R}^{\psi}$, 使得局部观测函数 $\mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$ ($j = 1, 2, \dots, L$) 满足 $\mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k) = H^{(j)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$, 其中矩阵 $H^{(j)} \in \mathbf{R}^{m_j \times \psi}$, 则加权观测融合系统的观测方程可由下式给出:

$$\mathbf{z}^{(1)}(k) = H^{(1)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(1)}(k) \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{z}^{(1)}(k) = (M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} M)^{-1} M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} \mathbf{z}^{(0)}(k) \quad (10)$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(k) = (M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} M)^{-1} M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} \mathbf{v}^{(0)}(k) \quad (11)$$

其中, $R^{(0)-1} = (R^{(0)})^{-1}$, 并且 $\mathbf{v}^{(1)}(k)$ 的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}^{(1)} = (M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} M)^{-1} \quad (12)$$

其中, M (列满秩) 和 $H^{(1)}$ (行满秩) 是 $H^{(0)} = [H^{(1)\mathrm{T}}, H^{(2)\mathrm{T}}, \dots, H^{(L)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} (H^{(*)\mathrm{T}} = (H^{(*)})^{\mathrm{T}})$ 的满秩分解矩阵:

$$H^{(0)} = M H^{(1)} \quad (13)$$

其中, $M, H^{(1)}$ 可以用 Hermite 规范形得到^[25].

证明. 由于 M 和 $H^{(1)}$ 为 $H^{(0)}$ 的满秩分解, 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(0)}(k) &= H^{(0)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(0)}(k) = \\ &= M H^{(1)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(0)}(k) \end{aligned} \quad (14)$$

由于 M 为列满秩, 因而 $M^{\mathrm{T}} R^{(0)-1} M$ 为非奇异矩阵. 令 $H^{(1)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 为观测对象, 应用加权最小二乘法, 则 $H^{(1)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 的最优 Gauss-Markov 估计为式 (9) 所示. $\square$

对加权观测融合系统式 (1) 和式 (9), 应用非线性滤波算法, 可得到全局最优加权观测融合非线性滤波算法.

2 Gauss-Hermite 逼近

本节将引入一种函数逼近方法, 该方法借由 Gauss 函数和 Hermit 多项式的组合形式逼近任意初等函数. 通过此逼近方法, 可得到 $\mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$ 的近似函数 $\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$, 进而可将 $\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$ 统一转化为 $\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k) = H^{(j)}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 的形式, 其中, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 由 Gauss 函数和 Hermit 多项式构成, $H^{(j)}$ 为系数矩阵. 非线性多传感器系统观测函数经过转换, 将满足定理 1 中要求.

引理 2^[26]. 设在区间 $[a, b]$ 中存在一个点集 $\{x'_i, i = 1, \dots, S\}$, 对于任意点 x'_i 存在 y_i , 满足 $y_i = y(x'_i)$, 其中 $y(x)$ 是一个确定的函数. 进而 $y(x)$ 的近似函数 $\bar{y}(x)$ 可由 Gauss-Hermite 折叠函数得出:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^S y_i \Delta x_i \exp \left\{ - \left(\frac{x - x'_i}{\gamma} \right)^2 \right\} \cdot \\ &\quad f_p \left(\frac{x - x'_i}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, γ 是一个与 Δx_i ($i = 1, \dots, S$) 有关的常系数, $\Delta x_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})$, $f_p(u)$ ($p = 0, 2, 4, \dots$) 为一系列 Hermite 多项式的组合:

$$f_p(u) = \sum_{\rho=0}^p C_{\rho} H_{\rho}(u) \quad (16)$$

$$C_{\rho} = \frac{1}{2^{\rho} \rho!} H_{\rho}(0) \quad (17)$$

其中, $H_\rho(u) = (-1)^\rho e^{u^2} (e^{-u^2})^{(\rho)}$ 是 Hermite 多项式^[30]. 因此, $H_\rho(0)$ 为:

$$H_\rho(0) = \begin{cases} 1, & \rho = 0 \\ 2^q (-1)^q (2q-1)!!, & \rho = 2q \\ 0, & \rho = 2q+1 \end{cases}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (18)$$

由式 (17) 和式 (18) 有:

$$C_\rho = \begin{cases} 1, & \rho = 0 \\ (-1)^q \frac{(2q-1)!!}{2^q (2q)!}, & \rho = 2q \\ 0, & \rho = 2q+1 \end{cases}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (19)$$

其中, ‘!’ 表示阶乘, 双阶乘 ‘ $m!!$ ’ 表示不超过自然数 m 且与 m 有相同奇偶性的所有正整数的乘积.

注 1. 对于多维情况, 假设 $\{\mathbf{X}'_i \in \mathbf{R}^n\}$ ($i = 1, \dots, S$) 是一个采样集合, 对于集合中每一个点 $\mathbf{X}'_i = [x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n}]$ ($a \leq x_{i_\mu} \leq x_{i+1_\mu} \leq b, \mu = 1, \dots, n$) 存在点 $\mathbf{Y}'_i(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n}) = [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}]$ ($\xi \geq 1$) 满足 $\mathbf{Y}'_i = \mathbf{Y}(\mathbf{X}'_i)$, 其中 $\mathbf{Y}(\cdot)$ 是确定的多维函数. 那么 Gauss-Hermite 折叠函数如下:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i_1=1}^S \Delta x_{i_1} \sum_{i_2=1}^S \Delta x_{i_2} \dots \\ &\sum_{i_n=1}^S \Delta x_{i_n} \cdot \mathbf{Y}(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n}) \prod_{\mu=1}^n \frac{1}{\gamma_\mu \sqrt{\pi}} \cdot \\ &\exp \left\{ - \left(\frac{x_\mu - x'_{i_\mu}}{\gamma_\mu} \right)^2 \right\} f_p \left(\frac{x_\mu - x'_{i_\mu}}{\gamma_\mu} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

其中, n 维函数 $\bar{\mathbf{Y}}(\cdot)$ 为函数 $\mathbf{Y}(\cdot)$ 的近似函数. 引理 2 给出了一种利用 Gauss 函数和 Hermite 多项式组合的逼近方法, 该方法可以利用较少的函数项获得很好的逼近效果. 如果将引理 1 中的 $\sum_{i_1=1}^S \Delta x_{i_1} \sum_{i_2=1}^S \Delta x_{i_2} \dots \sum_{i_n=1}^S \Delta x_{i_n} (1/\gamma_\mu \sqrt{\pi}) \exp\{ -((x_\mu - x'_{i_\mu})/\gamma_\mu)^2 \} f_p((x_\mu - x'_{i_\mu})/\gamma_\mu)$ ($i = 1, \dots, S; \mu = 1, \dots, n$) 视为定理 1 中的中介函数 $\psi(\mathbf{x}(k), k)$, 将 $\mathbf{Y}(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n})$ 视为 $H^{(j)}$, 则定理 1 可以得以实施.

3 基于 Gauss-Hermite 逼近的加权观测融合算法

由文献 [26] 和大量仿真试验表明, 在 $p = 0, 2, 4$ 等情况下, 合理的选择 Δx_{i_μ} 和 γ_μ ($i = 1, \dots, S; \mu = 1, \dots, n$) 即可很好地逼近任意初等连续函数. 本文选取 $p = 2, \Delta x_{i_\mu} = 1, \gamma_\mu =$

γ ($i = 1, \dots, S; \mu = 1, \dots, n$), 则由式 (18) 和式 (19) 有 $C_2 = -1/4, H_2(u) = 4u^2 - 2$, 进而有 $f_2(u) = 1.5 - u^2$. 令

$$\varphi(\zeta) = \exp\{-\zeta^2\} f_2(\zeta) \quad (21)$$

则有 $\mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$ 的近似函数 $\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k)$ 为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ (\pi)^{-\frac{n}{2}} (\gamma)^{-n} \sum_{i_1=1}^S \sum_{i_2=1}^S \dots \sum_{i_n=1}^S \mathbf{h}^{(j)}(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n}) \cdot \\ \prod_{\mu=1}^n \varphi \left(\frac{x_\mu - x'_{i_\mu}}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

定理 2. 对系统式 (1) 和式 (2), 基于 Gauss-Hermite 逼近的近似加权观测融合方程为:

$$\bar{\mathbf{z}}^{(1)}(k) = \bar{\mathbf{H}}^{(1)} \bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}(k), k) + \bar{\mathbf{v}}^{(1)}(k) \quad (23)$$

其中, $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}(k), k)$ 如式 (29) 所示, x_μ ($\mu = 1, \dots, n$) 是第 μ 个状态变量, x'_{i_μ} ($i = 1, \dots, S; \mu = 1, \dots, n$) 是第 μ 个状态变量的第 i 个采样点. $\bar{\mathbf{H}}^{(0)}$ 如式 (30) 所示, 其中 $\mathbf{h}^{(j)}(\cdot)$ ($j = 1, \dots, L$) 是第 m 个观测方程的 Gauss-Hermite 拟合采样点, S 是采样点的数量. $\bar{\mathbf{M}}$ 和 $\bar{\mathbf{H}}^{(1)}$ 是 $\bar{\mathbf{H}}^{(0)}$ 的满秩分解矩阵, $\bar{\mathbf{M}} \in \mathbf{R}^{(\sum_{i=1}^L m_i) \times r}$ 是列满秩, $\bar{\mathbf{H}}^{(1)} \in \mathbf{R}^{r \times S^n}$ 是行满秩, 且有 $r \leq \min(\sum_{i=1}^L m_i, S^n)$. 则有:

$$\bar{\mathbf{z}}^{(1)}(k) = (\bar{\mathbf{M}}^T R^{(0)-1} \bar{\mathbf{M}})^{-1} \bar{\mathbf{M}}^T R^{(0)-1} \mathbf{z}^{(0)}(k) \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{(1)}(k) = (\bar{\mathbf{M}}^T R^{(0)-1} \bar{\mathbf{M}})^{-1} \bar{\mathbf{M}}^T R^{(0)-1} \mathbf{v}^{(0)}(k) \quad (25)$$

$\bar{\mathbf{v}}^{(1)}(k)$ 的协方差矩阵为:

$$\bar{\mathbf{R}}^{(1)} = (\bar{\mathbf{M}}^T R^{(0)-1} \bar{\mathbf{M}})^{-1} \quad (26)$$

证明. 利用式 (22) 将集中式融合系统观测方程式 (6) 进行近似, 得到近似的集中式融合观测方程:

$$\mathbf{z}^{(0)}(k) \approx \bar{\mathbf{h}}^{(0)}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}^{(0)}(k) \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}^{(0)}(\mathbf{x}(k), k) &= \\ [\bar{\mathbf{h}}^{(1)T}(\mathbf{x}(k), k), \dots, \bar{\mathbf{h}}^{(L)T}(\mathbf{x}(k), k)]^T \end{aligned} \quad (28)$$

$\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\cdot, \cdot)$ ($j = 1, \dots, L$) 如式 (22) 所示, 且 $\bar{\mathbf{h}}^{(j)T}(\cdot, \cdot) = (\bar{\mathbf{h}}^{(j)}(\cdot, \cdot))^T$.

将式 (28) 中的系数 $\mathbf{h}^j(x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n})$ 与 Gauss-Hermite 函数 $\varphi((x_\mu - x'_{i_\mu})/\gamma)$ 分离, 得到式 (29) 和式 (30). 利用定理 1 得到式 (24)~式 (26). $\square$

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}(k), k) = (\pi)^{-\frac{n}{2}} (\gamma)^{-n} \begin{bmatrix} \prod_{\mu=1}^n \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \\ \prod_{\mu=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_n - x'_{2_n}}{\gamma}\right) \\ \vdots \\ \prod_{\mu=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_n - x'_{S_n}}{\gamma}\right) \\ \prod_{\mu=1}^{n-2} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_{n-1} - x'_{2_{n-1}}}{\gamma}\right) \varphi\left(\frac{x_n - x'_{1_n}}{\gamma}\right) \\ \prod_{\mu=1}^{n-2} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_{n-1} - x'_{2_{n-1}}}{\gamma}\right) \varphi\left(\frac{x_n - x'_{2_n}}{\gamma}\right) \\ \vdots \\ \prod_{\mu=1}^{n-2} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{1_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_{n-1} - x'_{2_{n-1}}}{\gamma}\right) \varphi\left(\frac{x_n - x'_{S_n}}{\gamma}\right) \\ \vdots \\ \prod_{\mu=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{S_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_n - x'_{1_n}}{\gamma}\right) \\ \prod_{\mu=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{S_{\mu}}}{\gamma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_n - x'_{2_n}}{\gamma}\right) \\ \vdots \\ \prod_{\mu=1}^n \varphi\left(\frac{x_{\mu} - x'_{S_{\mu}}}{\gamma}\right) \end{bmatrix}_{S^n \times 1} \quad (29)$$

$$\bar{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(1)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{1_n}) & \mathbf{h}^{(1)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(1)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{S_n}) \\ \mathbf{h}^{(2)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{1_n}) & \mathbf{h}^{(2)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(2)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{S_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}^{(L)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{1_n}) & \mathbf{h}^{(L)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(L)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{S_n}) \\ \mathbf{h}^{(1)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_{n-1}}, x'_{1_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(1)}(x'_{S_1}, x'_{S_2}, \dots, x'_{S_n}) \\ \mathbf{h}^{(2)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_{n-1}}, x'_{1_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(2)}(x'_{S_1}, x'_{S_2}, \dots, x'_{S_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}^{(L)}(x'_{1_1}, x'_{1_2}, \dots, x'_{2_{n-1}}, x'_{1_n}) & \cdots & \mathbf{h}^{(L)}(x'_{S_1}, x'_{S_2}, \dots, x'_{S_n}) \end{bmatrix}_{\sum_{i=1}^L m_i \times S^n} \quad (30)$$

注 2. 定理 2 通过 Gauss-Hermite 逼近构建了一个近似的中介函数 $\bar{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$. 它使得形如式 (1) 和式 (2) 的任意非线性多传感器系统的局部观测函数具有了定理 1 中所阐述的关系, 可使定理 1 得以实施.

注 3. 如果状态范围过大, 拟合采样点数量会急剧增加, 导致计算量增加, 因此本文采取分段的处理方法. 例如, 对一维状态系统, 可以将状态的范围划分成多个区间, 对二维状态系统, 可以将状态的范围分成若干小的区域. 在每个区间或区域分别进行

Gauss-Hermite 逼近. 逼近过程中形成的中介函数 $\bar{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$, $\bar{H}^{(0)}$ 及其满秩分解矩阵 $\bar{M}$ 和 $\bar{H}^{(1)}$ 可离线计算, 在线调用, 减少了在线计算负担.

4 WMF-UKF 算法

对加权观测融合系统式 (1) 和式 (23), 应用非线性滤波算法 (EKF、UKF、PF、CKF 等), 可得加权观测融合非线性滤波算法. 本文将以 UKF 为例, 给出一种基于 Gauss-Hermite 逼近和 UKF 滤波算

法的非线性加权观测融合估计算法.

4.1 基于 Gauss-Hermite 逼近的 WMF-UKF 算法

本文 UKF 采样策略选用比例对称抽样, 即 Sigma 采样点可由式 (31) 计算.

$$\{\chi_i\} = \left[\bar{x}, \bar{x} + \sqrt{(n+\kappa)P_{xx}}, \bar{x} - \sqrt{(n+\kappa)P_{xx}} \right], \\ i = 0, \dots, 2n \quad (31)$$

且有粒子权值如式 (32) 和式 (33) 所示.

$$W_i^m = \begin{cases} \frac{\lambda}{n+\kappa}, & i = 0 \\ \frac{1}{2(n+\kappa)}, & i \neq 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$W_i^c = \begin{cases} \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1-\alpha^2+\beta^2), & i = 0 \\ \frac{1}{2(n+\lambda)}, & i \neq 0 \end{cases} \quad (33)$$

其中, $\alpha > 0$ 是比例因子, $\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$, κ 是比例参数, 通常设置 $\kappa = 0$ 或者 $\kappa = 3 - n$, $\beta = 2$. 下面给出 WMF-UKF 算法.

WMF-UKF 算法. 对非线性系统式 (1) 和式 (2), 基于定理 2 的 WMF-UKF 算法如下:

步骤 1. 设置初始值

基于多传感器的观测数据 $\mathbf{z}^{(j)}(0) \sim \mathbf{z}^{(j)}(k)$ ($j = 1, 2, \dots, L$), 加权观测融合系统 Sigma 采样点可以计算为:

$$\{\chi_i^{(1)}(k|k)\} = \left[\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k|k), \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k|k) + \sqrt{(n+\kappa)P_{xx}^{(1)}(k|k)}, \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k|k) - \sqrt{(n+\kappa)P_{xx}^{(1)}(k|k)} \right], \\ i = 0, \dots, 2n \quad (34)$$

其中初值条件为:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(0|0) = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(0)\} \quad (35)$$

$$P_{xx}^{(1)}(0|0) = \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(0|0)\right)\left(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(0|0)\right)^T\right\} \quad (36)$$

步骤 2. 预测方程

预测 Sigma 采样点:

$$\chi_i^{(1)}(k+1|k) = \mathbf{f}(\chi_i^{(1)}(k|k), k), i = 0, \dots, 2n \quad (37)$$

状态预报:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \chi_i^{(1)}(k+1|k) \quad (38)$$

状态预测误差方差阵:

$$P^{(1)}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\chi_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k))(\chi_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k))^T + Q_w \quad (39)$$

观测预报 Sigma 采样点:

$$\mathbf{z}^{(1)}(k+1|k) = \bar{H}^{(1)} \bar{\psi}(\chi_i^{(1)}(k+1|k), k+1), \\ i = 0, \dots, 2n \quad (40)$$

观测预报:

$$\mathbf{z}^{(1)}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \mathbf{z}_i^{(1)}(k+1|k) \quad (41)$$

观测预报误差方差阵:

$$P_{zz}^{(1)}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left(\mathbf{z}_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{z}}^{(1)}(k+1|k) \right) \left(\mathbf{z}_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{z}}^{(1)}(k+1|k) \right)^T \quad (42)$$

$$P_{vv}^{(1)}(k+1|k) = P_{zz}^{(1)}(k+1|k) + \bar{R}^{(1)} \quad (43)$$

其中, $\bar{R}^{(1)}$ 由式 (26) 定义.

协方差矩阵由下式计算:

$$P_{xz}^{(1)}(k+1|k) = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c \left(\chi_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k) \right) \left(\mathbf{z}_i^{(1)}(k+1|k) - \hat{\mathbf{z}}^{(1)}(k+1|k) \right)^T \quad (44)$$

步骤 3. 更新方程

滤波增益由下式计算:

$$W^{(1)}(k+1) = P_{xz}^{(1)}(k+1|k) P_{vv}^{(1)-1}(k+1|k) \quad (45)$$

其中, $P_{vv}^{(1)-1}(\cdot|\cdot) = \left(P_{vv}^{(1)}(\cdot|\cdot) \right)^{-1}$, 且 $k+1$ 时刻的状态估计为:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}^{(1)}(k+1|k) + W^{(1)}(k+1) \cdot \left(\mathbf{z}^{(1)}(k+1) - \hat{\mathbf{z}}^{(1)}(k+1|k) \right) \quad (46)$$

滤波误差协方差矩阵为:

$$P^{(1)}(k+1|k+1) = P^{(1)}(k+1|k) - W^{(1)}(k+1) \cdot P_{vv}^{(1)}(k+1|k) W^{(1)T}(k+1) \quad (47)$$

其中, $W^{(1)T}(\cdot) = \left(W^{(1)}(\cdot) \right)^T$.

4.2 WMF-UKF 算法的时间复杂度分析

算法 1 中的式 (45) 出现了矩阵求逆运算, 因此该算法的时间复杂度由 $P_{vv}^{(1)-1}(k+1|k)$ 决定^[37], 即 WMF-UKF 的时间复杂度为 $O(r^3)$, 而 CMF-UKF 的时间复杂度为 $O\left(\left(\sum_{i=1}^L m_i\right)^3\right)$. 由定理 2 知 $r \leq \sum_{i=1}^L m_i$, 所以 WMF-UKF 的时间复杂度小于 CMF-UKF.

另外, 随着传感器数量 L 的增加, $\sum_{i=1}^L m_i$ 将不断增加. 而在拟合采样点数 S 不改变的情况下, 由于 $r \leq \min(\sum_{i=1}^L m_i, S^n)$, 故 r 将保持在 S^n (或者更小) 不改变. 因此随着传感器数量的增加, WMF-UKF 较 CMF-UKF 在计算量上的优势将更加明显.

本文提出的 WMF-UKF 所需要的融合参数矩阵 $\bar{M}$ 和 $\bar{H}^{(1)}$ 可事先离线计算备用, 不必在线计算. 而文献 [25] 所用的 Taylor 级数方法需要根据预报值在线实时计算融合参数矩阵, 这将带来一定的在线计算负担. 相比较之下, 本文提出的 WMF-UKF 在计算量上具有一定的优势.

5 仿真例子

例 1. 考虑一个带有 4 传感器的非线性系统^[38]

$$x(k) = \frac{x(k-1)}{2} + \frac{x(k-1)}{(1+x(k-1)^2)} + \cos\left(\frac{k-1}{2}\right) + w(k) \quad (48)$$

$$z^{(j)}(k) = h^{(j)}(x(k), k) + v^{(j)}(k), \quad j = 1, \dots, 4 \quad (49)$$

其中

$$\begin{aligned} h^{(1)}(x(k), k) &= \frac{4}{5}x(k) + \frac{1}{2}x^2(k) + \frac{3}{10}\exp\left(\frac{x(k)}{3}\right) \\ h^{(2)}(x(k), k) &= \frac{7}{10}x(k) + \frac{3}{5}x^2(k) \\ h^{(3)}(x(k), k) &= 2x(k) + \frac{7}{10}\exp\left(\frac{x(k)}{3}\right) \\ h^{(4)}(x(k), k) &= \frac{3}{5}x^2(k) + \frac{4}{5}\exp\left(\frac{x(k)}{3}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

$w(k)$ 和 $v^{(j)}(k)$ ($j = 1, \dots, 4$) 是相互独立的白噪声, 方差分别为: $\sigma_w^2 = 1^2$, $\sigma_{v1}^2 = 0.09^2$, $\sigma_{v2}^2 = 0.1^2$, $\sigma_{v3}^2 = 0.12^2$, $\sigma_{v4}^2 = 0.13^2$. 状态初值为 $x(0) = 0$. 由于状态 $x(k)$ 介于 $-1 \sim 4$, 因此选取拟合采样点集

为: $\{-2, -1, \dots, 5\}$ (8 个等间隔点), 相应的系数选取为: $\gamma = 1$. 选择 $p = 2$, 则中介函数为:

$$\bar{\psi}(x(k), k) = \left[e^{-(x-x_1)^2} (1.5 - (x-x_1)^2), \dots, e^{-(x-x_8)^2} (1.5 - (x-x_8)^2) \right]^T \quad (51)$$

系数矩阵 $H^{(0)}$, M 和 $H^{(1)}$ 分别为:

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.3126 & -0.0480 & 0.1693 & 0.9697 \\ 0.5642 & -0.0564 & 0 & 0.7334 \\ -2.0540 & -0.8454 & 0.3949 & 1.6796 \\ 0.9088 & 0.4927 & 0.4514 & 0.7992 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.3126 & -0.0480 & 0.1693 \\ 0.5642 & -0.0564 & 0 \\ -2.0540 & -0.8454 & 0.3949 \\ 0.9088 & 0.4927 & 0.4514 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -3.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 3.0318 \\ 3.0000 & 6.0000 & 10.0000 & 15.0000 \\ -8.0000 & -15.0000 & -24.0000 & -35.0000 \\ 6.1397 & 10.3857 & 15.8562 & 22.6718 \end{bmatrix} \quad (54)$$

最后得到基于 Gauss-Hermite 逼近的 WMF-UKF 估计曲线和真实曲线如图 1 所示.

本例采用 k 时刻累积均方误差 (Accumulated mean square error, AMSE)^[24, 39] 作为衡量估计准确性的指标函数如式 (55) 所示.

$$\text{AMSE}(k) = \sum_{t=0}^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^i(t) - \hat{x}^i(t|t))^2 \quad (55)$$

其中, $x^i(t)$ 是 t 时刻第 i 次 Monte Carlo 实验的真实值, $\hat{x}^i(t|t)$ 是 t 时刻第 i 次 Monte Carlo 实验的估计值. 独立进行 20 次 Monte Carlo 实验, 得到的 AMSE 曲线如图 2 所示, 其中本例选取局部 UKF 估计 AMSE 曲线 (Local filter 1~4, LF 1~4)、集中式融合 UKF 估计 AMSE 曲线 (CMF-UKF) 以及本文提出的加权观测融合 UKF 估计 AMSE 曲线 (WMF-UKF) 进行对比. 由图 2 可以看出 CMF-UKF 与 WMF-UKF 具有接近的估计精度, 而高于

局部 UKF. 在计算量方面, 由于本文压缩后的观测为 3 维, 因此 WMF-UKF 滤波过程中的时间复杂度为 $O(3^3)$. 而集中式融合系统观测方程为 4 维, 因此时间复杂度为 $O(4^3)$. 因此, WMF-UKF 计算量要低于 CMF-UKF.

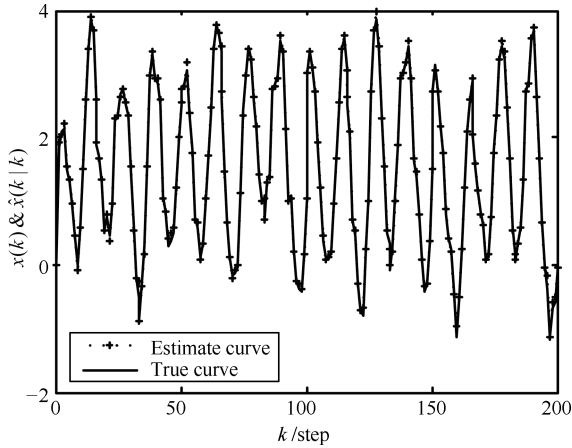


图 1 真实状态及 WMF-UKF 估计曲线

Fig. 1 Curves of the true state and the WMF-UKF estimate

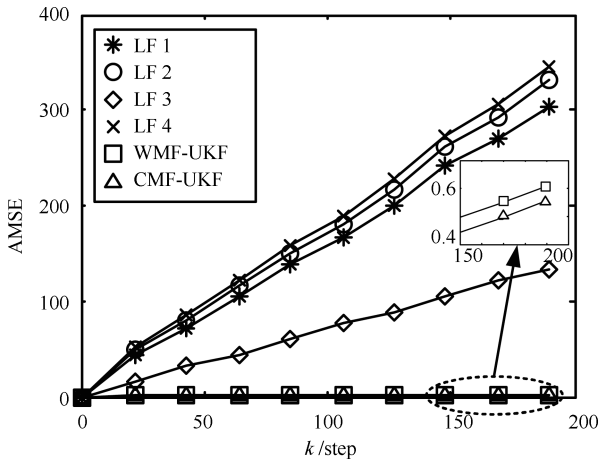


图 2 局部 UKF, WMF-UKF 以及 CMF-UKF 的 AMSE 曲线

Fig. 2 AMSE curves of local UKF, WMF-UKF and CMF-UKF

例 2. 考虑一个带有 8 传感器的平面跟踪系统, 在笛卡尔坐标下的状态方程和观测方程如下:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{w}(k) \quad (56)$$

$$\mathbf{z}^{(j)}(k) = \mathbf{h}^{(j)}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}_k^{(j)} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x(k) - x_j)^2 + (y(k) - y_j)^2} \\ \arctan\left(\frac{y(k) - y_j}{x(k) - x_j}\right) \end{bmatrix} + \mathbf{v}^{(j)}(k), \quad j = 1, \dots, 8 \quad (57)$$

其中, $\mathbf{x}(k) = [x(k) \ \dot{x}(k) \ y(k) \ \dot{y}(k)]^T$ 为状态变量,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & 0.5T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix}, \mathbf{w}_k \text{ 为}$$

零均值, 方差为 $Q_w^2 = \text{diag}\{0.1^2, 0.1^2\}$ 的过程噪声. 设 8 个传感器分别放置在 4 个地点, 其中 $l_{1,2}(5.5, 5)$, $l_{3,4}(-5, 5.5)$, $l_{5,6}(-5, -5)$, $l_{7,8}(5.5, -5.5)$. $\mathbf{v}^{(i)}(k)$, $\mathbf{v}^{(j)}(k)$ ($i \neq j$) 互不相关, 且方差分别为 $R^{(j)} = \begin{bmatrix} (0.05 + j \times 10^{-3})^2 & 0 \\ 0 & (0.004 + j \times 10^{-4})^2 \end{bmatrix}$ ($j = 1, \dots, 8$). 在仿真中, 设采样周期为 $T = 200 \text{ ms}$, 状态初值为 $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

经测试, 本例选取 Gauss-Hermite 系数 $\gamma = 1.04$. 为了减少计算量, 本例将目标移动范围划分成了 16 个 1 平方公里的子区域, 如图 3(a) 所示. 每个子区域采用以该区域为中心, 外扩 2 点的方法避免边缘拟合效果不良. 以子区域 7 为例, 以点 (0,0), (0,1), (1,1) 和 (1,0) 所围区域为中心, 外扩 2 点得到该子区域的拟合采样点如图 3(b) 所示. 计算该区域的系数矩阵 $\bar{H}^{(0)}$, $\bar{M}$ 和 $\bar{H}^{(1)}$, 如图 3(c) 所示. 不难看出, 由于 8 个传感器位于 4 个点, 这里至少可以将 16 维的集中式融合观测方程 $\mathbf{h}^{(0)}(\mathbf{x}(k), k)$ 压缩成 8 维的加权观测融合方程. 将 16 个区域对应的 $\bar{M}$ 和 $\bar{H}^{(1)}$ 与中介函数 $\bar{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 离线计算存储并形成数据库. 根据每时刻状态预报, 在数据库中选取相应的 $\bar{M}$, $\bar{H}^{(1)}$ 以及 $\bar{\psi}(\mathbf{x}(k), k)$ 可减少在线计算负担.

为了对比分析 WMF-UKF 的精度和计算量, 本文选取了 8 传感器集中式融合 UKF (8-CMF-UKF), 5 传感器集中式融合 UKF (5-CMF-UKF) 以及 3 传感器集中式融合 UKF (3-CMF-UKF). 传感器的选择原则是尽可能的分散, 例如, 3-CMF-UKF 选择的是 1, 3 和 5 传感器, 5-CMF-UKF 选择的是 1, 3, 5, 7 和 8 传感器. 各种融合系统的滤波跟踪轨迹曲线如图 4 所示.

本例采用 k 时刻位置 $(x(k), y(k))$ 的累积均方误差 (AMSE) 作为指标函数, 如式 (58) 所示.

$$\text{AMSE}(k) = \sum_{t=0}^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x^i(t) - \hat{x}^i(t|t))^2 + (y^i(t) - \hat{y}^i(t|t))^2) \quad (58)$$

其中, $(x^i(t), y^i(t))$ 是 t 时刻第 i 次 Monte Carlo 实验的真实值, $(\hat{x}^i(t|t), \hat{y}^i(t|t))$ 是 t 时刻第 i 次 Monte Carlo 实验的估计值. 独立进行 20 次 Monte Carlo 实验, 得到的 AMSE 曲线如图 5 所示.

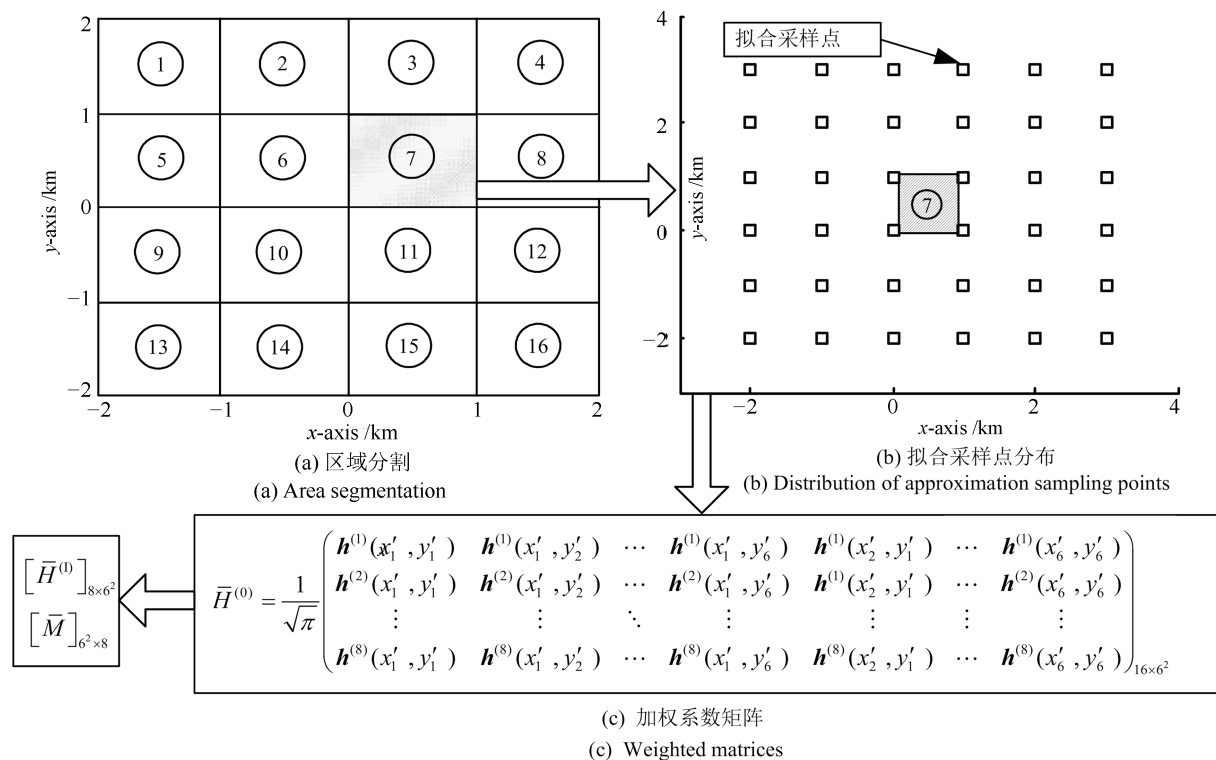
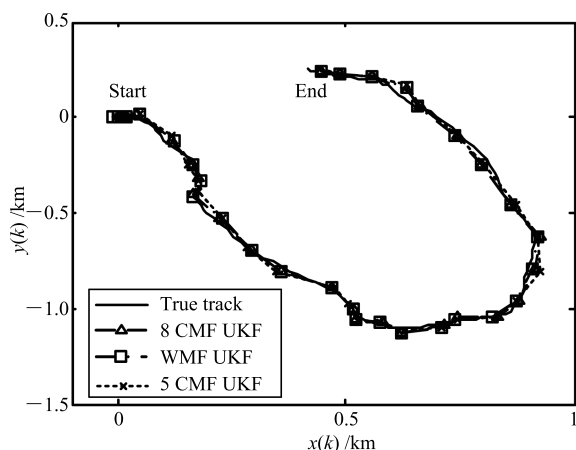
图3 加权系数矩阵 $\bar{M}$ 和 $\bar{H}^{(1)}$ 的计算Fig. 3 Calculation of the weighted matrices $\bar{M}$ and $\bar{H}^{(1)}$ 

图4 真实轨迹和 WMF-UKF, 8-CMF-UKF 和 5-CMF-UKF 的估计曲线

Fig. 4 True and estimated tracks using WMF-UKF, 8-CMF-UKF and 5-CMF-UKF

在精度方面, 由图 5 可以看到 AMSE 由低到高依次是 8-CMF-UKF, WMF-UKF, 5-CMF-UKF 和 3-CMF-UKF. 实验说明, 随着传感器数量的增加, 集中式融合算法的精度不断提高, 而本文提出的 WMF-UKF 算法的精度接近全观测集中式融合 8-CMF-UKF.

在计算量方面, 加权观测融合系统观测方程为 8 维, 因此时间复杂度为 $O(8^3)$. 3 传感器集中式融

合系统观测方程为 6 维, 因此时间复杂度为 $O(6^3)$. 5 传感器集中式融合系统观测方程为 10 维, 因此时间复杂度为 $O(10^3)$. 8 传感器集中式融合系统观测方程为 16 维, 因此时间复杂度为 $O(16^3)$. 因此, 时间复杂度由高到低依次为: 8-CMF-UKF, 5-CMF-UKF, WMF-UKF 和 3-CMF-UKF.

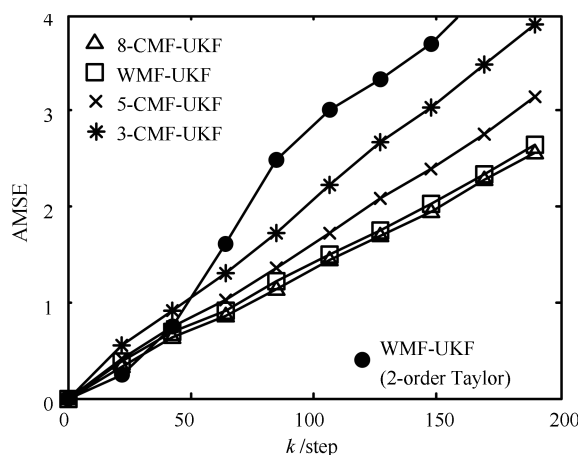


图5 位置融合估计的 AMSE 曲线

Fig. 5 AMSE curves of position fusion estimates

此外, 为了比较分析, 本例应用文献 [25] 中的 Taylor 级数逼近方法得到的 WMF-UKF 的 AMSE 曲线也绘于图 5 中, 这里我们采用 2 阶 Taylor 级数逼近. 由于 Taylor 级数展开阶数以及展开点等原因,

使得其精度低于其他融合算法. 而且与本文的不需要在线计算融合矩阵的 WMF-UKF 算法相比, 文献[25]的 WMF-UKF (2-order Taylor) 算法需要根据在线预报值实时计算融合参数矩阵, 因而具有更大的在线计算负担.

本例根据不同 Hermite 多项式 ($p = 0, 2, 4$) 情形进行了仿真分析. 经离线测试, 选取 Gauss-Hermite 系数分别为: $\gamma = 0.83$ ($p = 0$), $\gamma = 1.04$ ($p = 2$), $\gamma = 1$ ($p = 4$), 其他参数不变. 得到 Monte Carlo 实验的 AMSE 曲线如图 6 所示. 图 6 中可以看到, Hermite 多项式的数量与函数逼近效果并无直接关系, 得到融合估值精度间也不存在渐近最优性. 因此, 根据被逼近函数形式, 离线测试逼近函数效果, 对本文所提出 WMF-UKF 算法的精度起到非常关键的作用.

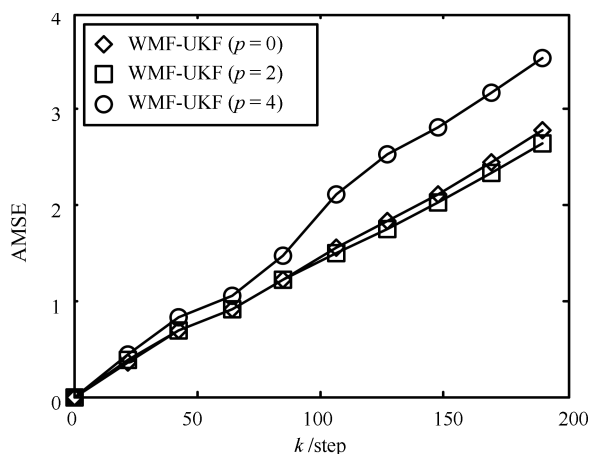


图 6 带不同 Hermite 多项式的 WMF-UKF 位置 AMSE 曲线

Fig. 6 AMSE curves of WMF-UKFs with different Hermite polynomials for position

综上, 合理的选择 Gauss-Hermite 逼近函数以及相应的系数 γ , 可使本文提出的 WMF-UKF 在精度方面接近集中式融合算法, 而减少计算量.

6 结论

本文首先基于 Gauss-Hermite 逼近方法和加权最小二乘法, 提出了一种具有普适性的非线性加权观测融合算法. 进而结合 UKF 算法, 提出了非线性加权观测融合 UKF (WMF-UKF) 算法. 与 CMF-UKF 算法相比, WMF-UKF 具有与之逼近的估计精度, 但计算量明显降低, 并且随着传感器数量的增加, 该算法在计算量上的优势将更加明显. 本文通过仿真实例对比已有的相关算法, 说明了本算法的有效性.

References

- Han Chong-Zhao, Zhu Hong-Yan. Multiple-sensor information fusion and automation. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(S1): 117–124
(韩崇昭, 朱洪艳. 多传感信息融合与自动化. 自动化学报, 2002, **28**(S1): 117–124)
- Pan Quan, Yu Xin, Cheng Yong-Mei, Zhang Hong-Cai. Essential methods and progress of information fusion theory. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(4): 599–615
(潘泉, 于昕, 程咏梅, 张洪才. 信息融合理论的基本方法与进展. 自动化学报, 2003, **29**(4): 599–615)
- Sun S L, Deng Z L. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter. *Automatica*, 2004, **40**(6): 1017–1023
- Deng Zi-Li, Hao Gang. Self-tuning multisensor measurement fusion Kalman estimator and its convergence analysis. *Control Theory & Applications*, 2008, **25**(5): 845–852
(邓自立, 郝钢. 自校正多传感器观测融合 Kalman 估值器及其收敛性分析. 控制理论与应用, 2008, **25**(5): 845–852)
- Ran C J, Deng Z L. Self-tuning weighted measurement fusion Kalman filtering algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2012, **56**(6): 2112–2128
- Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking: approximation techniques for nonlinear filtering. In: *Proceedings of the 2004 SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*. Orlando, USA: SPIE, 2004. 537–550
- Bar-Shalom Y, Li X R. *Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques*. Storrs: YBS Publishing, 1995. 87–99
- Sun S L. Multi-sensor information fusion white noise filter weighted by scalars based on Kalman predictor. *Automatica*, 2004, **40**(8): 1447–1453
- Sun S L. Distributed optimal component fusion weighted by scalars for fixed-lag Kalman smoother. *Automatica*, 2005, **41**(12): 2153–2159
- Gan Q Q, Harris C J. Comparison of two measurement fusion methods for Kalman-filter-based multisensor data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2001, **37**(1): 273–279
- Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. In: *Proceedings of the 11th International Symposium on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*. Orlando, USA: IEEE, 1997. 182–193
- Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 2004, **92**(3): 401–422
- Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(6): 1254–1269
- Ge Q B, Shao T, Yang Q M, Shen X F, Wen C L. Multisensor nonlinear fusion methods based on adaptive ensemble fifth-degree iterated cubature information filter for biomechatronics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, **46**(7): 912–925
- Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, Clapp T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(2): 174–188
- Lan J, Li X R. Nonlinear estimation by LMMSE-based estimation with optimized uncorrelated augmentation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **63**(16): 4270–4283

- 17 Assa A, Janabi-Sharifi F. A Kalman filter-based framework for enhanced sensor fusion. *IEEE Sensors Journal*, 2015, **15**(6): 3281–3292
- 18 Straka O, Duník J, Šimandl M. Truncation nonlinear filters for state estimation with nonlinear inequality constraints. *Automatica*, 2012, **48**(2): 273–286
- 19 Ge Q B, Xu D X, Wen C L. Cubature information filters with correlated noises and their applications in decentralized fusion. *Signal Processing*, 2014, **94**: 434–444
- 20 Hlinka O, Sluciak O, Hlawatsch F, Djuric P M, Rupp M. Likelihood consensus and its application to distributed particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(8): 4334–4349
- 21 Ge Quan-Bo, Li Wen-Bin, Sun Ruo-Yu, Xu Zi. Centralized fusion algorithms based on EKF for multisensor non-linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(6): 816–825
(葛泉波, 李文斌, 孙若愚, 徐姿. 基于 EKF 的集中式融合估计研究. 自动化学报, 2013, **39**(6): 816–825)
- 22 Jia B, Xin M, Cheng Y. High-degree cubature Kalman filter. *Automatica*, 2013, **49**(2): 510–518
- 23 Khaleghi B, Khamis F O, Karray F O, Razavi S N. Multisensor data fusion: a review of the state-of-the-art. *Information Fusion*, 2013, **14**: 28–44
- 24 Hao Gang, Ye Xiu-Fen, Chen Ting. Weighted measurement fusion algorithm for nonlinear unscented Kalman filter. *Control Theory & Applications*, 2011, **28**(6): 753–758
(郝钢, 叶秀芬, 陈亭. 加权观测融合非线性无迹卡尔曼滤波算法. 控制理论与应用, 2011, **28**(6): 753–758)
- 25 Hao G, Sun S L, Li Y. Nonlinear weighted measurement fusion unscented Kalman filter with asymptotic optimality. *Information Sciences*, 2015, **299**: 85–98
- 26 Pomorski K. Gauss-Hermite approximation formula. *Computer Physics Communications*, 2006, **174**(3): 181–186
- 27 Strutinsky V M. “Shells” in deformed nuclei. *Nuclear Physics A*, 1968, **122**(1): 1–33
- 28 Strutinsky V M. Shell effects in nuclear masses and deformation energies. *Nuclear Physics A*, 1967, **95**(2): 420–442
- 29 Oussalah M, Messaoudi Z, Ouldali A. Track-to-track measurement fusion architectures and correlation analysis. *Journal of Universal Computer Science*, 2010, **16**(1): 37–61
- 30 Santhanam B, Santhanam T S. On discrete Gauss-Hermite functions and eigenvectors of the discrete Fourier transform. *Signal Processing*, 2008, **88**(11): 2738–2746
- 31 Ge Q B, Shao T, Chen S D, Wen C L. Carrier tracking estimation analysis by using the extended strong tracking filtering. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, **64**(2): 1415–1424
- 32 Du D J, Chen R, Fei M R, Li K. A novel networked online recursive identification method for multivariable systems with incomplete measurement information. *IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks*, 2017, **3**(4): 744–759
- 33 Du Da-Jun, Shang Li-Li, Qi Bo, Fei Min-Rui. Convergence analysis of an online recursive identification method with uncomplete communication constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(8): 1502–1515
(杜大军, 商立立, 漆波, 费敏锐. 一种不完全信息下递推辨识方法及收敛性分析. 自动化学报, 2015, **41**(8): 1502–1515)
- 34 Wang Xiao-Xu, Zhao Lin, Xia Quan-Xi, Cao Wei, Li Liang. Design of unscented Kalman filter with correlative noises. *Control Theory & Applications*, 2010, **27**(10): 1362–1368
(王小旭, 赵琳, 夏全喜, 曹伟, 李亮. 噪声相关条件下 Unscented 卡尔曼滤波器设计. 控制理论与应用, 2010, **27**(10): 1362–1368)
- 35 Wang Xiao-Xu, Zhao Lin, Pan Quan, Xia Quan-Xi, Hong Wei. Design of UKF with correlative noises based on minimum mean square error estimation. *Control and Decision*, 2010, **25**(9): 1393–1398
(王小旭, 赵琳, 潘泉, 夏全喜, 洪伟. 基于最小均方误差估计的噪声相关 UKF 设计. 控制与决策, 2010, **25**(9): 1393–1398)
- 36 Fang D L, Ran X M. A distributed sensor management algorithm based on auction. *Procedia Computer Science*, 2017, **107**: 618–623
- 37 Zhang Zhao-You, Hao Yan-Ling, Wu Xu. Complexity analysis of three deterministic sampling nonlinear filtering algorithms. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2013, **45**(12): 111–115
(张召友, 郝燕玲, 吴旭. 3 种确定性采样非线性滤波算法的复杂度分析. 哈尔滨工业大学学报, 2013, **45**(12): 111–115)
- 38 Kitagawa G. Non-Gaussian state space modeling of time series. In: *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*. Los Angeles, USA: IEEE, 1987. 1700–1705
- 39 Cheng P, Yang Y, Oelmann B. Stator-free RPM sensor using accelerometers — a statistical performance simulation by Monte Carlo method. *IEEE Sensors Journal*, 2011, **11**(12): 3368–3376

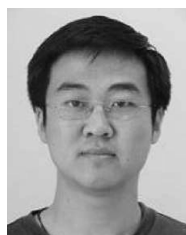


李 云 哈尔滨商业大学计算机与信息工程学院副教授. 黑龙江大学电子工程学院博士研究生. 主要研究方向为状态估计, 多传感器信息融合.
E-mail: liyunhd@sina.com



(LI Yun Associate professor at the School of Computer and Information Engineering, Harbin University of Commerce. Ph.D. candidate at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. Her research interest covers the state estimation and multi-sensor fusion.)

孙书利 黑龙江大学电子工程学院教授. 主要研究方向为网络系统滤波, 多传感器信息融合. 本文通信作者.
E-mail: sunsl@hlju.edu.cn



(SUN Shu-Li Professor at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. His research interest covers the networked systems filtering and multi-sensor fusion. Corresponding author of this paper.)

郝 钢 黑龙江大学电子工程学院副教授. 主要研究方向为状态估计, 多传感器信息融合.
E-mail: haogang@hlju.edu.cn
(HAO Gang Associate professor at the School of Electronic Engineering, Heilongjiang University. His research interest covers the state estimation and multi-sensor fusion.)