

带未知耦合权重的领导-跟随 多智能体系统的实用一致性

张文¹ 马忠军¹ 王毅^{2,3}

摘要 一致性理论在许多领域有广泛应用. 现有很多研究成果是关于恒同一致的. 在实际中, 由于任何系统都会不可避免地受到一定的外界扰动, 要求误差函数的极限等于 0 是难以做到的, 但当时间充分大时误差函数在可接受区间内是可行的. 本文首先给出多智能体系统的实用一致性概念, 然后研究含未知耦合权重的一阶非线性领导-跟随多智能体系统的实用一致性问题. 通过设计合适的控制协议, 运用图论、矩阵理论和强实用稳定性理论, 得到该多智能体系统实现实用一致性的充分条件. 数值模拟验证了理论结果的正确性.

关键词 多智能体系统, 实用一致性, 领导-跟随, 强实用稳定性

引用格式 张文, 马忠军, 王毅. 带未知耦合权重的领导-跟随多智能体系统的实用一致性. 自动化学报, 2018, 44(12): 2300–2304

DOI 10.16383/j.aas.2018.c170193

Practical Consensus of Leader-following Multi-agent System With Unknown Coupling Weights

ZHANG Wen¹ MA Zhong-Jun¹ WANG Yi^{2,3}

Abstract Consensus theory has been widely applied to many fields. Most of the research is on identical consensus. In many practical cases, it is impossible for agents to achieve identical consensus because any system has certain disturbance. In this case, it cannot be achieved that the limit of the error function is equal to 0, but it is feasible that the value of the error function is bounded within an interval if the time is sufficiently large. In this paper, the concept of practical consensus is given, then the problem of practical consensus in leader-following multi-agent systems with unknown coupling weights is investigated. By designing an appropriate control protocol and using graph theory, matrix theory and strong practical stability theory, a sufficient condition is given to realize practical consensus of the multi-agent system. Numerical simulations are given to verify the theoretical results.

Key words Multi-agent system, practical consensus, leader-following, strong practical stability

Citation Zhang Wen, Ma Zhong-Jun, Wang Yi. Practical consensus of leader-following multi-agent system with unknown coupling weights. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(12): 2300–2304

收稿日期 2017-04-12 录用日期 2017-09-15

Manuscript received April 12, 2017; accepted September 15, 2017
国家自然科学基金 (11562006, 61663006), 浙江省自然科学基金 (LY17A020007), 广西自然科学基金 (2015GXNSFAA139013, 2016GXNSFDA380031), 广西可信软件重点实验室基金 (KX201612), 桂林电子科技大学研究生教育创新计划资助项目 (2017YJCX79) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (11562006, 61663006), Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (LY17A020007), Natural Science Foundation of Guangxi (2015GXNSFAA139013, 2016GXNSFDA380031), Guangxi Key Laboratory of Trusted Software (KX201612), and Innovation Project of GUET Graduate Education (2017YJCX79)

本文责任编辑 郭戈

Recommended by Associate Editor GUO Ge

1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西高校数据分析与计算重点实验室 桂林 541004 2. 浙江财经大学数据科学学院 杭州 310018 3. 桂林电子科技大学广西可信软件重点实验室 桂林 541004

1. School of Mathematics and Computing Science, Guangxi Col-

近十几年来, 随着人工智能技术的发展, 多智能体的一致性逐渐引起了数学、物理、控制和通信等多个领域中学者的兴趣^[1–9]. 一致性是指通过设计控制协议, 使得智能体的一些状态变量 (例如位置或速度等) 渐近趋于恒同. 目前已经有许多有关多智能体一致性的研究成果. 例如, Zeng 等^[10] 研究了通信延时及输入延时并存的情况下, 一般线性动态特性的高阶多智能体在固定且无向的网络拓扑下的一致性; Guan 等^[11] 研究了混合控制下二阶多智能体系统的一致性问题; 杨洪勇等^[12] 研究了离散时间分数阶多智能体系统的一致性问题; Li 等^[13] 考虑了非线性多智能体系统存在节点故障的问题, 并给出了一致性恢复方法. 此外, 领导-跟随多智能体系统一致性问题也获得了一些研究成果^[14–17]. Wen 等^[14] 研究了二阶非线性领导-跟随多智能体模型分别在无向和有向网络拓扑下的一致性; Ma 等^[15] 研究了一阶非线性系统的聚类-时延一致性; Peng 等^[16] 研究了具有时变时延的领导-跟随多智能体系统的一致性问题; Wang 等^[17] 研究了二阶非线性系统的时延一致性问题.

以上研究考虑的一致性是所有智能体的状态变量渐近趋于恒同 (下文称为恒同一致性, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{e}_i(t)\| = 0$). 通常人们期望多智能体系统的状态是趋于恒同一致的, 然而在实际应用中要求系统中每个跟随智能体的真实运动状态与领导智能体的运动状态之间的偏差趋于 0 往往是不可能的. 近年来实用一致性的一些研究工作说明了这一点^[18–19]. 实用一致性是指偏差函数最终保持在一个确定的集合中, 而不是趋于 0. Dong 等运用 Lyapunov-Krasovskii 方法, 研究了在没有外部扰动时系统达成恒同一致 ($\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\theta}_i(t) - \mathbf{c}(t)) = 0$) 所需的条件, 并探讨了在有外界扰动时系统达成实用一致 ($\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\theta}_i(t) - \mathbf{c}(t)\| \leq \delta$) 所需的条件, 其中容许误差上界 δ 与外部扰动的范数有关^[18]. Li 等考虑了系统 $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} [\|\mathbf{x}_j(t-\tau)/\Delta\mu + 1/2\|\mu - \|\mathbf{x}_i(t)/\Delta\mu + 1/2\|\mu]$, 导出每个智能体的运动状态收敛于区间 $[(k-1/2)\mu\Delta, (k+1/2)\mu\Delta]$ 的充分条件, 其中 $k = \lfloor \eta(0)/A \rfloor$ 或 $\lfloor \eta(0)/A \rfloor + 1$ ^[19].

本文研究一阶非线性领导-跟随多智能体模型的实用一致性问题, 主要包括:

1) 给出 λ -实用一致的概念, λ 为容许误差上界; 运用强实用稳定性理论, 设计新的控制协议, 讨论系统满足何种条件时, 跟随智能体与领导智能体之间的偏差函数在充分大的时间之后能够一直保持在容许误差状态集 $Q = \{\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n | \|\mathbf{e}\| \leq \lambda\}$ 之内. 这蕴含偏差函数极限不存在的情况 (如偏差函数为正弦函数, 虽然有界但极限不存在).

2) 在假设真实系统和理想系统的耦合权重误差为有界的条件下, 用理想耦合权重和真实耦合权重之间误差的上界来描述真实系统的耦合权重需满足的条件.

本文内容安排如下: 第 1 节简述强实用稳定性的定义和相关引理; 第 2 节先给出模型描述, 再给出实用一致性的定义, 并通过设计合适的控制协议, 运用图论、矩阵理论以及稳定性理论, 得到系统实现实用一致的充分条件; 第 3 节通过数值模拟验证理论结果的正确性; 第 4 节给出结论.

1 强实用稳定性简述

符号说明: $\forall$ 表示任意, $\exists$ 表示存在, Q^c 表示 Q 的补集,

leges and Universities Key Laboratory of Data Analysis and Computation, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004
2. School of Data Sciences, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou 310018 3. Guangxi Key Laboratory of Trusted Software, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004

∂Q 表示 Q 的边界. 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{f} \in C[I \times D, \mathbf{R}^n]$, D 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含 $\mathbf{x} = 0$ 的区域, $\mathbf{f}(t, 0) \equiv 0$.

定义 1. 设 Q_0 和 Q 是包含 $\mathbf{x} = 0$ 的有界闭集, 其中 Q_0 是 Q 的子集. 若 $\forall \mathbf{x}_0 \in Q_0$, 系统 (1) 的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in Q$, $t \geq t_0$, 则称系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 实用稳定的.

定义 2. 若系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 实用稳定的; 且对 $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, $\exists T(t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, 使得当 $t > T(t_0, \mathbf{x}_0)$ 时, 系统 (1) 的所有解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in Q$, 则称系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 强实用稳定的.

实用稳定性和 Lyapunov 意义下的稳定性互不包含. 强实用稳定的容许误差状态集 Q 确定了真实状态与理想状态偏差的大小.

类似于文献 [20], 可以得到以下定理:

定理 1. 若存在函数 $V(t, \mathbf{x}) \in C^1[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$, 满足条件:

H1. $t \geq t_0$ 时, 对 $\forall \mathbf{x} \in Q_0^c \cup \partial Q_0$, 有 $\frac{dV}{dt}|_{(1)} \leq -\delta < 0$;

H2. 对 $\forall \mathbf{x}_1 \in Q_0, \forall \mathbf{x}_2 \in Q^c, \forall t_2 \geq t_1 \geq t_0$, 有 $V(t_1, \mathbf{x}_1) < V(t_2, \mathbf{x}_2)$.

则系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 强实用稳定的.

证明. 假设 $\exists \mathbf{x}_0 \in Q_0$, 系统 (1) 的解 $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ 在 $t = t_0$ 时在 Q_0 内, 在某时刻 $T > t_0$ 有 $\mathbf{x}(T, t_0, \mathbf{x}_0) \in Q^c$, 则 $\exists t_1, t_0 < t_1 < T$, 使得

$$\{\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) | t_1 < t \leq T\} \subset Q^c, \quad \mathbf{x}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0) \in Q_0$$

故根据条件 H2 有

$$V(t_1, \mathbf{x}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)) < V(T, \mathbf{x}(T, t_0, \mathbf{x}_0))$$

矛盾, 因为由条件 H1 可知, $V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0))$ 是关于 t 的单调减函数, 故系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 实用稳定的.

假设 $\exists \mathbf{x}^c \in Q_0^c, \exists t_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 有 $\mathbf{x}(t_n, t_0, \mathbf{x}^c) \in Q^c$. 由条件 H1 知

$$\frac{dV}{dt}|_{(1)} \leq -\delta < 0$$

故 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$V(t_n, \mathbf{x}(t_n, t_0, \mathbf{x}^c)) \leq V(t_0, \mathbf{x}^c) - \delta(t - t_0) \rightarrow -\infty$$

另一方面, $t \rightarrow +\infty$ 时, 取 $\mathbf{x}_0 \in Q_0$, 由条件 H2 可知

$$\text{const} = V(t_0, \mathbf{x}_0) < V(t_n, \mathbf{x}(t_n, t_0, \mathbf{x}^c))$$

矛盾, 所以对 $\forall \mathbf{x}^c \in Q_0^c, \exists T(t_0, \mathbf{x}^c)$ 使得系统 (1) 的解 $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}^c)$ 满足

$$\{\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}^c) | t \geq t_0 + T\} \subseteq Q$$

综上, 系统 (1) 的零解是关于 Q_0, Q 强实用稳定的. $\square$

2 主要理论结果

考虑一阶多智能体的理想系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{x}_j(t) + \mathbf{u}_i \quad (2)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个智能体的状态, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个连续映射, 表征第 i 个智能体的自身动力学, 当第 i 个智能体可以接受第 j 个智能体的信息时, $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$; $a_{ii} = -\sum_{j \neq i} a_{ij}$, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个智能体的控制输入.

由于网络拓扑中的耦合权重可能存在受到扰动的问题, 故真实系统 (3) 与理想系统 (2) 可能存在一定差异, 真实系统 (3) 为

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t) + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中, $\tilde{a}_{ii}(t) = -\sum_{j \neq i} \tilde{a}_{ij}(t)$, 记 $L = (a_{ij})$, $\tilde{L}(t) = (\tilde{a}_{ij}(t))$, $W = (L + L^T)/2$, $\tilde{W}(t) = (\tilde{L}(t) + \tilde{L}^T(t))/2$.

设领导智能体动力学方程

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) \quad (4)$$

下面给出实用一致性的定义.

定义 3. 记状态偏差变量 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1^T(t), \mathbf{e}_2^T(t), \dots, \mathbf{e}_N^T(t))^T$. 若 $\exists \lambda > 0$ 且 $\exists T(t_0, \mathbf{e}(t_0)) > 0$, 当 $t > T(t_0, \mathbf{e}(t_0))$ 时系统 (3) 和 (4) 的解满足 $\|\mathbf{e}_i(t, t_0, \mathbf{e}(t_0))\| \leq \lambda$, 则称系统 (3) 和 (4) 达到 λ -实用一致, λ 为容许误差上界.

接下来研究真实耦合权重 $\tilde{a}_{ij}(t)$ 与理想耦合权重 a_{ij} 之间的误差 $|\tilde{a}_{ij}(t) - a_{ij}|$ 不超过某个上界 μ 时 ($i \neq j$), 多智能体系统达成实用一致性的问题.

由系统 (3) 和 (4) 得

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) + \mathbf{u}_i \quad (5)$$

若 $\dot{\mathbf{e}}_i(t) = 0$ 时 $\mathbf{u}_i = 0$, 则 $\mathbf{e}_i(t) \equiv 0$ 是系统 (5) 的平衡点, 那么系统 (3) 和 (4) 的 λ -实用一致问题转化为系统 (5) 的强实用稳定问题.

定义 4. QUAD 条件^[21-22]. 若 $\exists \varepsilon > 0$, 对 $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 使得函数 $\mathbf{f}$ 满足

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)) \leq \varepsilon (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6)$$

则称 $\mathbf{f}$ 满足 QUAD 条件.

注 1. 相较于 Lipschitz 条件, QUAD 条件是弱化的条件.

定理 2. 如果矩阵 $[\varepsilon + 2(N-1)\mu]I_N + W - B$ 是负定矩阵, 那么对 $\forall t, \varepsilon I_N + \tilde{W}(t) - B$ 也是负定矩阵, 其中 $B = \text{diag}\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_N\}$.

证明. 记 $(c_{ij}) = [\varepsilon + 2(N-1)\mu]I_N + W - B$, $(\tilde{c}_{ij}(t)) = \varepsilon I_N + \tilde{W}(t) - B$. 那么 $c_{ii} = a_{ii} + \varepsilon + 2(N-1)\mu - b_i$, $\tilde{c}_{ii}(t) = \tilde{a}_{ii}(t) + \varepsilon - b_i$, $c_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$, $\tilde{c}_{ij}(t) = (\tilde{a}_{ij}(t) + \tilde{a}_{ji}(t))/2$, $i \neq j$.

根据 Gershgorin 圆盘定理^[23], (c_{ij}) 第 i 个行 Gershgorin 圆圆心为 $(c_{ii}, 0)$, 半径为 $\sum_{j=1, j \neq i}^N |c_{ij}|$, 由于 (c_{ij}) 是负定矩阵, 所有 Gershgorin 圆包含的区域都在负半平面, 那么 $c_{ii} < 0$ 且 $c_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^N |c_{ij}| < 0$. 那么, $i \neq j$ 时

$$\tilde{c}_{ii}(t) - c_{ii} = \tilde{a}_{ii}(t) - a_{ii} - 2(N-1)\mu =$$

$$\sum_{j=1, i \neq j}^N (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}(t)) - 2(N-1)\mu \leq -(N-1)\mu$$

$$\begin{aligned} |\tilde{c}_{ij}(t)| - |c_{ij}| &\leq |\tilde{c}_{ij}(t)| - |c_{ij}| \leq \\ \left| \frac{\tilde{a}_{ij}(t) + \tilde{a}_{ji}(t)}{2} - \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right| &\leq \\ \left| \frac{\tilde{a}_{ij}(t) - a_{ij}}{2} \right| + \left| \frac{\tilde{a}_{ji}(t) - a_{ji}}{2} \right| &\leq \mu \end{aligned}$$

则

$$\tilde{c}_{ii}(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^N |\tilde{c}_{ij}(t)| \leq c_{ii} + \sum_{j=1, i \neq j}^N |c_{ij}| < 0$$

显然 $\tilde{c}_{ii}(t) < 0$. $(\tilde{c}_{ij}(t))$ 的 Gershgorin 圆圆心为 $(\tilde{c}_{ii}(t), 0)$, 半径为 $\sum_{j=1, i \neq j}^N |\tilde{c}_{ij}(t)|$.

由 $\tilde{c}_{ii}(t) + \sum_{j=1, i \neq j}^N |\tilde{c}_{ij}(t)| < 0$ 可知, 所有 Gershgorin 圆包含的区域都在负半轴, 即 $(\tilde{c}_{ij}(t))$ 负定. $\square$

定理 3. 若系统 (2), (3) 和 (4) 中的智能体的自身动力学 $\mathbf{f}$ 满足 QUAD 条件, $[\varepsilon + 2(N-1)\mu]I_N + W - B$ 是负定矩阵, $\tilde{a}_{ij}(t)$ 是关于 t 连续变化的, 令控制器

$$\mathbf{u}_i = \begin{cases} -b_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)), & \|\mathbf{e}\| \geq \lambda \\ -b_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) \exp(k\|\mathbf{e}\| - k\lambda), & \|\mathbf{e}\| < \lambda \end{cases}$$

称正常数 k 为控制衰减系数, 则系统 (3) 和 (4) 达到 λ -实用一致.

证明. 显然 $\mathbf{u}_i$ 连续. 令 $V(t, \mathbf{e}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|^2$. 取 $Q_0 = Q = \{\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{e}\| \leq \lambda\}$, 对于 $\forall \mathbf{e} \in Q_0^c \cup \partial Q_0 = \{\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{e}\| \geq \lambda\}$, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(t, \mathbf{e})}{dt} \right|_{(5)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{e}}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \dot{\mathbf{e}}_i(t) = \\ &\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t)) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}(t) + \tilde{a}_{ji}(t)) \mathbf{e}_j(t) - b_i \mathbf{e}_i(t) \right] \leq \\ &\sum_{i=1}^N \varepsilon \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}(t) + \right. \\ &\left. \tilde{a}_{ji}(t)) \mathbf{e}_j(t) - b_i \mathbf{e}_i(t) \right] = \\ &\sum_{i=1}^N \varepsilon \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\tilde{a}_{ij}(t) + \\ &\tilde{a}_{ji}(t)) \mathbf{e}_j(t) - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) b_i \mathbf{e}_i(t) = \\ &\mathbf{e}^T(t) (\varepsilon I_{Nn} + \tilde{W} \otimes I_n - B \otimes I_n) \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

由定理 2 可知, 当 $[\varepsilon + 2(N-1)\mu]I_N + W - B$ 负定时, $\varepsilon I_N + \tilde{W}(t) - B$ 负定. 而矩阵 $\tilde{W}(t) \otimes I_n$ 的特征值等于矩阵 $\tilde{W}(t)$ 的特征值乘以矩阵 I_n 的特征值. 因此 $\varepsilon I_{Nn} + \tilde{W}(t) \otimes I_n - B \otimes I_n$ 是负定的, 从而 $\left. \frac{dV(t, \mathbf{e})}{dt} \right|_{(5)}$ 在 $\forall \mathbf{e} \in Q_0^c \cup \partial Q_0$ 时负定. 另一方面, 记 m 为 $\varepsilon I_{Nn} + \tilde{W}(t) \otimes I_n - B \otimes I_n$ 的最

大特征值, 显然 $(\varepsilon - \frac{m}{2})I_{Nn} + \tilde{W}(t) \otimes I_n - B \otimes I_n$ 仍为负定矩阵. 那么对于 $\forall \mathbf{e} \in Q_0^c \cup \partial Q_0$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T(t) (\varepsilon I_{Nn} + \tilde{W} \otimes I_n - B \otimes I_n) \mathbf{e}(t) &< \\ \frac{m}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) &= \frac{m}{2} \|\mathbf{e}\|^2 \end{aligned}$$

则存在正数 $\delta = -\frac{m}{2}\lambda^2$, 使得 $\left. \frac{dV(t, \mathbf{e})}{dt} \right|_{(5)} \leq -\delta < 0$, 满足条件 H1.

对于 $\forall \mathbf{e}_1 \in Q_0, \forall \mathbf{e}_2 \in Q^c$, 显然 $\|\mathbf{e}_2\| > \|\mathbf{e}_1\|$, 又因 $V(t, \mathbf{e}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|^2$, 那么对 $\forall t_2 \geq t_1 \geq t_0$, 有 $V(t_1, \mathbf{e}_1) < V(t_2, \mathbf{e}_2)$, 满足条件 H2.

综上, 由定理 1 可知, 系统 (5) 的零解是关于 Q_0, Q 强实用稳定的. 故 $\exists T(t_0, \mathbf{e}(t_0)) > 0$, 当 $t > T(t_0, \mathbf{e}(t_0))$ 时, $\|\mathbf{e}(t, t_0, \mathbf{e}(t_0))\| \leq \lambda$, 显然 $\|\mathbf{e}_i(t, t_0, \mathbf{e}(t_0))\| \leq \lambda$, 则根据定义 3 可知系统 (3) 和 (4) 达到 λ -实用一致. $\square$

注 2. 由 $[\varepsilon + 2(N-1)\mu]I_N + W - B$ 是负定矩阵可以得到 $\varepsilon I_N + W - B$ 也是负定矩阵, 那么在定理 3 条件满足的情况下, 用类似的方法可以得到理想系统和领导智能体系统也可以达到 λ -实用一致.

注 3. 系统采用控制器 $\mathbf{u}_i$ 意味着 $\|\mathbf{e}\|$ 越小时系统越不需要控制. 控制衰减系数 k 越大表明 $\|\mathbf{e}\|$ 减小时控制强度的减弱速度越快.

3 数值模拟

本节通过数值模拟表明第 2 节中理论结果的正确性.

考虑多智能体理想系统 (2) 及真实系统 (3) 中 $N = 4, n = 3$ 的情况, 令多智能体自身的动力学满足 Chua 电路方程. Chua 电路^[24] 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha(y_i - x_i - \gamma(x_i)) \\ \dot{y}_i = x_i - y_i + z_i \\ \dot{z}_i = -\beta y_i \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, 4$$

其中, $\gamma(s) = m_1 s + \frac{1}{2}(m_0 - m_1) \times (|s+1| - |s-1|)$, 取 $\alpha = 10, \beta = 15, m_0 = -1.25, m_1 = -0.75$. 由于 Chua 电路全局 Lipschitz 是连续的, 经计算可知, $\varepsilon = 10$ 时, $\mathbf{f}$ 满足 QUAD 条件.

那么式 (2) 和式 (3) 分别满足

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha(y_i - x_i - \gamma(x_i)) + \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j + u_{ix} \\ \dot{y}_i = x_i - y_i + z_i + \sum_{j=1}^4 a_{ij}y_j + u_{iy} \\ \dot{z}_i = -\beta y_i + \sum_{j=1}^4 a_{ij}z_j + u_{iz} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 4$$

和

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \alpha(y_i - x_i - \gamma(x_i)) + \sum_{j=1}^4 \tilde{a}_{ij}x_j + u_{ix} \\ \dot{y}_i = x_i - y_i + z_i + \sum_{j=1}^4 \tilde{a}_{ij}y_j + u_{iy} \\ \dot{z}_i = -\beta y_i + \sum_{j=1}^4 \tilde{a}_{ij}z_j + u_{iz} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 4$$

其中, u_{ix}, u_{iy}, u_{iz} 是 $\mathbf{u}_i$ 的分量.

考虑多智能体的拓扑结构, 如图 1 所示.

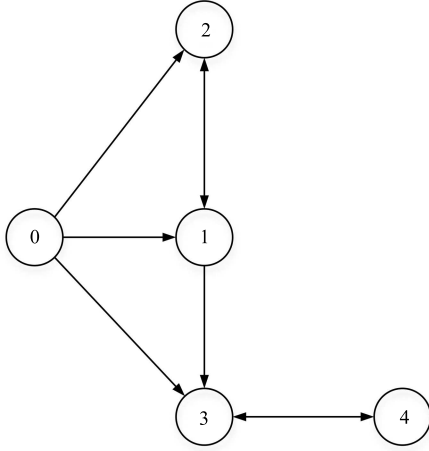


图 1 拓扑结构图

Fig. 1 Topology mode

Laplace 矩阵 $L = (a_{ij})$ 为

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & -17 \end{bmatrix}$$

令误差上界为 $\mu = 1$, 取 $\tilde{L} = (\tilde{a}_{ij})$ 为

$$\begin{bmatrix} -3.1 & 3.1 & 0 & 0 \\ 1.2 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & -2.4 & 2.2 \\ 0 & 0 & 17.5 & -17.5 \end{bmatrix}$$

取 $B = \text{diag}\{16, 19, 47, 0\}$, 也就是说第 4 个智能体不可以接收到领导的信息, 满足定理 3 的条件, 从而使得理想系统和真实系统分别与领导智能体达到 λ -实用一致.

取初始条件 $\xi_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, $i = 0, 1, \dots, 4$, 其中 $\xi_0 = (0.7, 0, 0)^T$, $\xi_1 = (1.1, 2, 3)^T$, $\xi_2 = (8, 10, 16)^T$, $\xi_3 = (25, 30, 17)^T$, $\xi_4 = (50, 100, 20)^T$,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{cases} -16\mathbf{e}_1, & \|\mathbf{e}\| \geq \lambda \\ -16\mathbf{e}_1 \exp(4\|\mathbf{e}\| - 4\lambda), & \|\mathbf{e}\| < \lambda \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{cases} -19\mathbf{e}_1, & \|\mathbf{e}\| \geq \lambda \\ -19\mathbf{e}_1 \exp(4\|\mathbf{e}\| - 4\lambda), & \|\mathbf{e}\| < \lambda \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{cases} -47\mathbf{e}_1, & \|\mathbf{e}\| \geq \lambda \\ -47\mathbf{e}_1 \exp(4\|\mathbf{e}\| - 4\lambda), & \|\mathbf{e}\| < \lambda \end{cases}$$

$\mathbf{u}_4 = 0$, 容许误差上界 $\lambda = 2$. 通过数值计算, 得到理想系统随时间变化的偏差轨迹 (图 2) 和真实系统随时间变化的偏差轨迹 (图 3). 图 2 和图 3 中的实线是容许误差上界, 表明理想系统和真实系统与领导智能体的偏差在时间充分大时都可以保证小于容许误差上界.

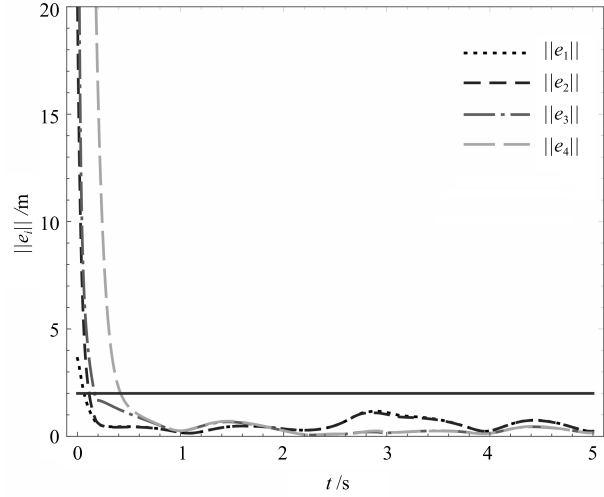


图 2 理想系统随时间变化的偏差轨迹

Fig. 2 Error trajectories of ideal multi-agent systems

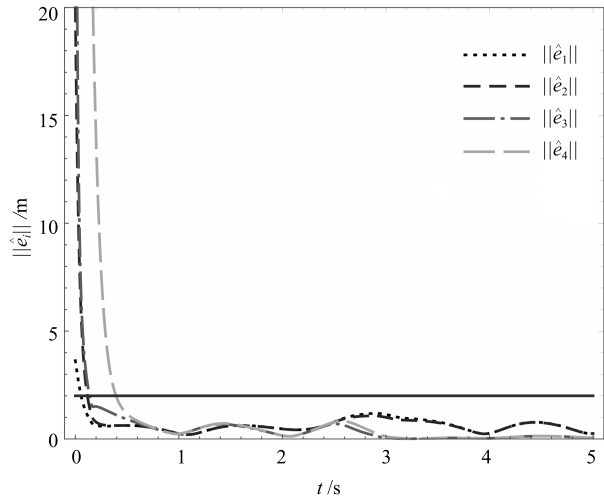


图 3 真实系统随时间变化的偏差轨迹

Fig. 3 Error trajectories of real multi-agent systems

4 结论

本文首先给出多智能体系统的实用一致性概念, 针对当耦合权重受到扰动时的一阶非线性领导-跟随多智能体系统, 通过设计合适的控制器, 建立相应的偏差系统, 将多智能体系统的实用一致性转化为偏差系统的强实用稳定性, 并运用矩阵理论和稳定性理论, 得到该多智能体真实系统实现实用一致性的充分条件. 运用数值模拟, 对理想系统和真实系统的偏差函数进行了对比. 然而现实中的一些现象是难以通过一阶多智能体系统模型来解释的, 所以我们下一步计划讨论二阶多智能体系统的实用一致性问题.

References

- 1 Hu W F, Liu L, Feng G. Consensus of linear multi-agent systems by distributed event-triggered strategy. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **46**(1): 148–157
- 2 Lu J Q, Ho D W C, Kurths J. Consensus over directed static networks with arbitrary finite communication delays. *Physical Review E*, 2009, **80**(6): Article No. 066121

- 3 Xiao F, Wang L, Chen J. Partial state consensus for networks of second-order dynamic agents. *Systems and Control Letters*, 2010, **59**(12): 775–781
 - 4 Li T, Xie L H. Distributed consensus over digital networks with limited bandwidth and time-varying topologies. *Automatica*, 2011, **47**(9): 2006–2015
 - 5 Wang Pei, Lv Jin-Hu. Control of genetic regulatory networks: opportunities and challenges. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1969–1979
(王沛, 吕金虎. 基因调控网络的控制: 机遇与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(12): 1969–1979)
 - 6 Lu J Q, Zhong J, Huang C, Cao J D. On pinning controllability of Boolean control networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(6): 1658–1663
 - 7 Lu J Q, Ding C D, Lou J G, Cao J D. Outer synchronization of partially coupled dynamical networks via pinning impulsive controllers. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, **352**(11): 5024–5041
 - 8 Zhao Jun, Liu Guo-Ping. Position time-varying consensus control for multiple planar agents with non-holonomic constraint. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(7): 1169–1177
(赵俊, 刘国平. 非完整性约束的平面多智能体位置时变一致性控制. 自动化学报, 2017, **43**(7): 1169–1177)
 - 9 Wang Z H, Xu J J, Zhang H S. Consensus seeking for discrete-time multi-agent systems with communication delay. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2015, **2**(2): 151–157
 - 10 Zeng L, Hu G D. Consensus of linear multi-agent systems with communication and input delays. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(7): 1133–1140
 - 11 Guan Z H, Hu B, Chi M, He D X, Cheng X M. Guaranteed performance consensus in second-order multi-agent systems with hybrid impulsive control. *Automatica*, 2014, **50**(9): 2415–2418
 - 12 Yang Hong-Yong, Guo Lei, Zhang Yu-Ling, Yao Xiu-Ming. Delay consensus of fractional-order multi-agent systems with sampling delays. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(9): 2022–2028
(杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 姚秀明. 离散时间分数阶多自主体系统的时延一致性. 自动化学报, 2014, **40**(9): 2022–2028)
 - 13 Li L L, Ho D W C, Lu J Q. A consensus recovery approach to nonlinear multi-agent system under node failure. *Information Sciences*, 2016, **367–368**: 975–989
 - 14 Wen G G, Peng Z X, Rahmani A, Yu Y G. Distributed leader-following consensus for second-order multi-agent systems with nonlinear inherent dynamics. *International Journal of Systems Science*, 2014, **45**(9): 1892–1901
 - 15 Ma Z J, Wang Y, Li X M. Cluster-delay consensus in first-order multi-agent systems with nonlinear dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **83**(3): 1303–1310
 - 16 Peng K, Yang Y P. Leader-following consensus problem with a varying-velocity leader and time-varying delays. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2009, **388**(2–3): 193–208
 - 17 Wang Y, Ma Z J. Lag consensus of the second-order leader-following multi-agent systems with nonlinear dynamics. *Neurocomputing*, 2016, **171**: 82–88
 - 18 Dong X W, Xi J X, Shi Z Y, Zhong Y S. Practical consensus for high-order linear time-invariant swarm systems with interaction uncertainties, time-varying delays and external disturbances. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(10): 1843–1856
 - 19 Li L L, Ho D W C, Lu J Q. A unified approach to practical consensus with quantized data and time delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2013, **60**(10): 2668–2678
 - 20 Liao Xiao-Xin. *Mathematical Theory of Stability and Its Application* (2nd edition). Wuhan: Central China Normal University Press, 2001.
(廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 第2版. 武汉: 华中师范大学出版社, 2001.)
 - 21 Liu B, Lu W L, Chen T P. New conditions on synchronization of networks of linearly coupled dynamical systems with non-Lipschitz right-hand sides. *Neural Networks*, 2012, **25**: 5–13
 - 22 Wu W, Chen T P. Partial synchronization in linearly and symmetrically coupled ordinary differential systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2009, **238**(4): 355–364
 - 23 Bhatia R. *Matrix Analysis*. New York: Springer, 1996.
 - 24 Shil'nikov L P. Chua's circuit: rigorous results and future problems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 1993, **40**(10): 784–786
- 张 文 桂林电子科技大学硕士研究生. 主要研究方向为多智能体系统和复杂网络. E-mail: zhangwen_2623@163.com
(ZHANG Wen Master student at Guilin University of Electronic Technology. His research interest covers multi-agent systems and complex networks.)
- 马忠军 桂林电子科技大学数学与计算科学学院教授. 2004 年获得昆明理工大学硕士学位, 2007 年获得上海大学博士学位. 主要研究方向为多智能体系统, 非线性系统和复杂网络. 本文通信作者.
E-mail: mzj1234402@163.com
(MA Zhong-Jun Professor at the School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology. He received his master degree from Kunming University of Science and Technology in 2004, and Ph.D. degree from Shanghai University in 2007. His research interest covers multi-agent systems, nonlinear systems, and complex networks. Corresponding author of this paper.)
- 王 毅 浙江财经大学数据科学学院副教授. 2003 年获得浙江师范大学硕士学位, 2009 年获得上海大学博士学位. 主要研究方向为多智能体系统, 非线性系统与控制, 复杂网络以及生物系统.
E-mail: wangyihzh@gmail.com
(WANG Yi Associate professor at the School of Data Science, Zhejiang University of Finance and Economics. He received his master degree from Zhejiang Normal University in 2003, and Ph.D. degree from Shanghai University in 2009. His research interest covers multi-agent systems, nonlinear systems and control, complex networks, and biology systems.)