离散切换系统观测器存在性讨论及降维观测器设计

朱芳来 [1] 蔡 明 [1] 郭胜辉 [1, 2]

摘 要 对具有未知输入的离散切换系统讨论了未知输入观测器 (Unknown input observer, UIO) 设计方法. 首先, 对一般离散系统的未知输入观测器匹配条件的 Lyapunov-type 表示, 进行了等价性论证; 然后, 基于不具有未知输入的离散切换系统的稳定性理论, 对具有未知输入的离散切换系统提出了一种切换降维观测器设计方法. 通过矩阵分块确定出的观测器增益矩阵, 使得降维观测器能直接消去未知输入的影响; 然后, 在此基础上提出了一种未知输入代数重构方法; 最后, 通过仿真验证了方法的有效性和正确性.

关键词 离散系统, 未知输入估计, 观测器匹配条件, 切换系统

引用格式 朱芳来, 蔡明, 郭胜辉. 离散切换系统观测器存在性讨论及降维观测器设计. 自动化学报, 2017, **43**(12): 2091−2099

DOI 10.16383/j.aas.2017.c160471

Discussions on Existence of Observers and Reduced-order Observer Design for Discrete-time Switched Systems

ZHU Fang-Lai[1] CAI Ming[1] GUO Sheng-Hui[1, 2]

Abstract The paper discusses the unknown input observer (UIO) design issue for discrete-time switched systems with unknown inputs. First, a Lyapunov-type equivalent representation of observer matching condition for a general discrete-time system is given and proved. Then, based on the stability theory of discrete-time switched system without unknown inputs, a reduced-order observer is developed for a discrete-time switched system with unknown inputs. The reduced-order observer can eliminate the influences of the unknown inputs directly because of the special selection of the observer gain matrix determined by matrix block computation. Meanwhile, an algebraic unknown input reconstruction method is proposed. Finally, a simulation example is given to verify the correctness and effectiveness of the proposed methods.

Key words Discrete-time system, unknown input estimation, observer matching condition, switched system

Citation Zhu Fang-Lai, Cai Ming, Guo Sheng-Hui. Discussions on existences of observers and reduced-order observer design for discrete-time switched systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(12): 2091−2099

现代控制理论中, 未知输入观测器 (Unknown input observer, UIO) 设计具有重要意义, 自上世纪 60 年代提出以来, 一直受到学者们的广泛的关注和深入研究[1−2]. 对于连续受控系统, 文献 [3] 研究了未知输入观测器匹配条件, 并将该条件等价于一个 Lyapunov-type 矩阵代数方程. 之后, 在这一框架下, 未知输入观测器设计得到了广泛的研究[4−10]. 如文献 [7] 在匹配条件满足的前提下, 通过系统扩展并结合奇异系统设计手段, 提出了一种滑模观测器设计方法, 以此实现了故障和输出噪声的估计. 由于未知输入观测器匹配条件较为苛刻, 很多实际的控制系统并不满足, 因而如何突破该匹配条件的限制, 成为近期 UIO 设计研究热点之一[11−14], 如文献 [12] 基于构造辅助输出的方式, 提出了一种解决方案. 文献 [13] 同样通过构造辅助输出, 提出了降维观测器结合高阶滑模观测器的观测器匹配条件突破方法, 并考虑了未知输入重构问题. 文献 [14] 将未知输入分解为代数抑制未知输入和模型未知输入, 以此来达到满足观测器匹配条件的目的. 然而, 值得强调的是, 以上这些成果都是基于连续系统讨论的. 随着数字系统广泛的应用, 离散系统下的相关研究受到了关注[15−16]. 基于这样的关注, 本文首先对离散系统未知输入观测器匹配条件进行了讨论, 并将其转换为一个 Lyapunov-type 代数方程组的等价形式.

切换系统通常含有若干个子系统, 同时具有一个规定子系统之间切换方式的切换律. 切换系统可以描述一大类实际的系统, 如脉冲宽度调制 (Pulse width modulation, PWM) 电路、直流斩波电路、网络控制系统和飞行器姿态等[17−25]. 早期针对切换

收稿日期 2016-06-16 录用日期 2016-11-23
Manuscript received June 16, 2016; accepted November 23, 2016
国家自然科学基金 (61573256), 上海市科委 “创新行动计划” 项目 (16111106502), 浙江省高端创新载体专项项目浙江省高端创新载体专项项目资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61573256), Shanghai Science and Technology Innovation Fund (16111106502), Zhejiang Province High-end Innovative Carrier Project
本文责任编委 孙希明
Recommended by Associate Editor SUN Xi-Ming
1. 同济大学电子与信息工程学院 上海 201804 2. 苏州科技大学电子与信息工程学院 苏州 215009
1. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804 2. College of Electrical Engineering and Automation, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009

系统的研究主要是考虑其稳定性, 如文献 [17−18] 针对离散切换系统, 讨论了平均驻留时间 (Average dwell time, ADT) 下的切换系统稳定问题, 而文献 [19] 对切换系统的稳定性研究成果进行了更为深入的总结. 针对切换系统的状态估计的研究相对较少, 如文献 [20] 针对离散切换系统, 设计了异步滤波器来处理一类具有电力电子现实背景的问题, 并讨论了其稳定性. 文献 [21] 同时针对连续系统和离散系统设计了延迟观测器, 同时达到了异步切换的效果. 对于具有未知输入的切换系统, 文献 [22] 针对广义离散切换系统, 设计了未知输入观测器来估计系统状态, 并基于线性矩阵不等式证明了系统的稳定性. 文献 [23] 则在未知输入匹配条件满足的前提下, 基于系统强可检测性的假设, 针对连续切换系统, 设计了未知输入切换观测器. 文献 [24] 在驻留时间假设下研究了切换系统的指数镇定问题, 并消除了切换超调的不利影响. 总之, 目前针对切换系统的观测器设计的成果不多, 降维未知输入切换观测器的成果还鲜有报道.

结合上述背景, 本文首先对离散系统未知输入观测器的存在性进行讨论, 然后将其应用于离散切换系统, 设计了降维未知输入切换观测器, 并提出了未知输入代数重构方法. 本文的贡献在于: 1) 将连续系统未知输入观测器的秩条件和 Lyapunov-type 代数方程组两者的等价性结论, 推广到了离散系统; 2) 基于等价性条件, 给出了切换系统未知输入观测器存在性的前提条件; 3) 提出了一种切换降维观测器设计方法, 该方法可以直接消除未知输入的影响, 并提出了一种未知输入代数重构方法. 论文的结构如下: 第 1 节对问题进行了描述, 对一般系统, 讨论了观测器匹配条件与一个 Lyapunov-type 代数方程的等价性; 第 2 节提出了降维未知输入切换系统观测器设计方法; 第 3 节提出了未知输入代数重构; 第 4 节给出了仿真分析; 第 5 节对全文进行了总结.

1 问题描述

考虑一类具有未知输入的离散线性系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + D\eta(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中, $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 是已知控制输入, $y(k) \in \mathbf{R}^p$ 是可测输出, $\eta(k) \in \mathbf{R}^q$ 是未知输入. 系数矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ 和 $D \in \mathbf{R}^{n\times p}$ 为已知常数矩阵. 不失一般性, 假设 (A, C) 可观测, B, D 为列满秩, C 为行满秩, 并有 $n \geq p \geq q$.

定义 1. 定义

$$R(z) = \begin{bmatrix} zI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

为系统 (1) 的 Rosen-brock 矩阵. 当复数 z_0 满足秩条件 $\mathrm{rank}(R(z_0)) < n + q$ 时, 称 z_0 为系统 (1) 的不变零点.

定义 2. 若系统 (1) 的所有不变零点均在 z 平面单位圆内, 则称系统 (1) 为最小相系统. 其等价描述为: 对任何满足 $|z| \geq 1$ 的 $z \in C$, 有 $\mathrm{rank}(R(z)) = n + q$.

假设 1. 系统 (1) 是最小相系统.

假设 2. $\mathrm{rank}(D) = \mathrm{rank}(CD) = q$.

注 1. 无论是连续系统还是离散系统, 假设 1 和 2 都是未知输入观测器设计的基本前提条件. 针对连续系统, 文献 [3] 给出了一个与假设 1 和 2 等价的 Lyapunov-type 描述, 而这样的等价描述, 为未知输入观测器设计带来了极大的便利. 接下来我们在引理 1 中将该等价描述推广到离散系统, 并给出严格的证明和算法.

引理 1. 假设 1 和 2 成立的充分必要条件是: 对于任意对称正定矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 如下 Lyapunov 矩阵代数方程组

$$\begin{cases} (A + LC)^{\mathrm{T}} P (A + LC) - P = -Q \\ D^{\mathrm{T}} P = GC \end{cases} \tag{3}$$

关于矩阵 $L \in \mathbf{R}^{n\times p}$、$G \in \mathbf{R}^{q\times p}$ 和对称正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 有解.

证明. 详见附录.

2 切换降维观测器设计

本节将上述结论应用于切换系统观测器设计中, 结合切换系统的稳定性理论, 提出一种切换降维观测器设计方法. 为此, 考虑如下具有未知输入的离散切换系统

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k) + B_{\sigma(k)} u(k) + D_{\sigma(k)} \eta(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{4}$$

其中, $x(k) \in \mathbf{R}^n$, $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 是已知控制输入, $y(k) \in \mathbf{R}^p$ 是可测输出, $\eta(k) \in \mathbf{R}^q$ 是未知输入. 系数矩阵 $A_{\sigma(k)} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B_{\sigma(k)} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ 和 $D_{\sigma(k)} \in \mathbf{R}^{n\times q}$ 为常数切换矩阵, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ 为已知常数矩阵. 不失一般性, 假设 $C = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}$. 切换信号 $\sigma(k) : N^+ \to \ell = \{1, 2, \cdots, N\}$, 其中 N 为子系统数. 设采样时刻 $k_1, k_2, \cdots, k_v, k_{v+1}, \cdots$ 为切换系统 (4) 的切换时刻, 且不妨假设当 $k \in [k_v, k_{v+1})$, 第 i 个子系统被激活, 即假设当 $k \in [k_v,\ k_{v+1})$ 时, $\sigma(k) = i$.

假设 3. 系统 (4) 的任意子系统均为最小相系统, 而且存在常数 $0 < \varsigma < 1$, 对任何满足 $|z| \geq \varsigma$ 的

$z \in C$, 有 $\mathrm{rank}\big(R_{\sigma(k)}(z)\big) = n+q$, 其中

$$R_{\sigma(k)}(z) = \begin{bmatrix} zI - A_{\sigma(k)} & D_{\sigma(k)} \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

假设 4. $\mathrm{rank}\big(D_{\sigma(k)}\big) = \mathrm{rank}\left(CD_{\sigma(k)}\right) = q$.

定义 3. 对任意 $0 \le k_l \le k_s$, 以 $N_{\sigma(k)}(k_l, k_s)$ 表示区间 $[k_l, k_s)$ 上的切换次数. 若存在常数 $\tau_a > 0$ 使得

$$N_{\sigma(k)}(k_l, k_s) \le N_0 + \frac{k_s - k_l}{\tau_a}$$

成立, 则称常数 τ_a 为切换信号 $\sigma(k)$ 的平均驻留时间 (Average dwell time, ADT), 称 N_0 为抖振界.

引理 2[17]**.** 考虑离散切换系统

$$x(k+1) = f_{\sigma(k)}(x(k)), \quad \sigma(k) \in \ell \tag{5}$$

若存在常数 $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, 并存在 C^1 函数 $V_{\sigma(k)} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\sigma(k) \in \ell$, 和两类 K_∞ 函数 ε_1 和 ε_2 使得 $\forall \sigma(k) = i \in \ell$, 均有:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1(|x(k)|) \le V_i(x(k)) \le \varepsilon_2(|x(k)|) \\ &\Delta V_i(x(k)) := V_i(x(k+1)) - \\ &\qquad V_i(x(k)) \le -\alpha V_i(x(k)) \end{aligned}$$

且 $\forall (\sigma(k_v) = i, \sigma(k_v - 1) = j) \in \ell \times \ell$, $i \ne j$,

$$V_i(x(k_v)) \le \beta V_j(x(k_v))$$

则平均驻留时间 (ADT) 满足

$$\tau_a \ge \tau_a^* = -\frac{\ln \beta}{\ln(1-\alpha)}$$

的切换系统 (5) 是全局渐近稳定的.

若定义 $\hbar_i(\sigma(k)) = \begin{cases} 1, & \sigma(k) = i \\ 0, & \sigma(k) \ne i \end{cases}$, 则系统 (5) 可表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum\limits_{i=1}^{N} \hbar_i(\sigma(k)) \left[A_i x(k) + B_i u(k) + D_i \eta(k)\right] \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

则对应于 $k \in [k_v, k_{v+1})$ 上的第 i 个子系统有

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i^x(k) + B_i^u(k) + D_i^\eta(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{6}$$

引理 3. 假设 3 和 4 的 Lyapunov-type 等价描述为: 存在 $0 < \gamma_1 < 1$, 使得对任意的对称正定矩阵 $Q_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 如下的矩阵方程组

$$\begin{cases} (A_i + L_i C)^{\mathrm{T}} P_i (A_i + L_i C) - (1-\gamma_1) P_i = -Q_i \\ D_i^{\mathrm{T}} P_i = G_i C \end{cases} \tag{7}$$

关于对称正定矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $L_i \in \mathbf{R}^{n\times p}$ 和 $G_i \in \mathbf{R}^{q\times p}$ 有解.

证明. 首先, 在假设 3 下, 由矩阵 $A_i^* = (1/\varsigma) A_i$, $C^* = (1/\varsigma) C$ 和 $D_i^* = (1/\varsigma) D_i$ 所确定的未知输入切换系统 (A_i^*, C^*, D_i^*) 的任何第 i 个系统均是最小相系统. 事实上, $\forall |z| \ge 1$, 由于 $|z| \ge 1$ 且 $0 < \varsigma < 1 \Rightarrow |\varsigma z| = \varsigma |z| \ge \varsigma$, 故在假设 3 下有:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank} \begin{bmatrix} zI - A_i^* & D_i^* \\ C^* & 0 \end{bmatrix} = \\ &\mathrm{rank} \begin{bmatrix} zI - \frac{1}{\varsigma} A_i & \frac{1}{\varsigma} D_i \\ \frac{1}{\varsigma} C & 0 \end{bmatrix} = \\ &\mathrm{rank} \begin{bmatrix} \varsigma z I - A_i & D_i \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q \end{aligned}$$

这表明系统 (A_i^*, C_i^*, D_i^*) 是最小相系统. 另一方面, 易知 $\mathrm{rank}(D_i^*) = \mathrm{rank}(C^* D_i^*) = q$. 故由引理 1 可知, 假设 3 和 4 成立的充分必要条件是对任意的对称正定矩阵 $Q_i^* = \frac{1}{\varsigma^2} Q_i$.

$$\begin{cases} (A_i^* + L_i C^*)^{\mathrm{T}} P_i (A_i^* + L_i C^*) - P_i = -Q_i^* \\ (D_i^*)^{\mathrm{T}} P_i = G_i C^* \end{cases} \tag{8}$$

关于对称正定矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $L_i \in \mathbf{R}^{n\times p}$ 和 $G_i \in \mathbf{R}^{q\times p}$ 有解. 如果取 $\gamma_1 = 1 - \varsigma^2$, 则有 $0 < \gamma_1 < 1$, 这时式 (8) 即为式 (7). □

分解系统向量 $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, 其中 $x_1(k) \in \mathbf{R}^p$, 同时分解 (7) 中系数矩阵

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i,11} & A_{i,12} \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_{i,1} \\ B_{i,2} \end{bmatrix}$$

$$D_i = \begin{bmatrix} D_{i,1} \\ D_{i,2} \end{bmatrix}, P_i = \begin{bmatrix} P_{i,11} & P_{i,12} \\ P_{i,12}^{\mathrm{T}} & P_{i,22} \end{bmatrix}$$

其中, $A_{i,11} \in \mathbf{R}^{p\times p}$, $B_{i,11} \in \mathbf{R}^{p\times m}$, $D_{i,11} \in \mathbf{R}^{p\times q}$, $P_{i,11} \in \mathbf{R}^{p\times p}$.

对系统 (4) 进行线性变换 $\theta(k) = T_{\sigma(k)} x(k)$, 其中 $\theta(k) = \begin{bmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \end{bmatrix}$, $\theta_1(k) \in \mathbf{R}^p$, $T_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ K_{\sigma(k)} & I_{n-p} \end{bmatrix}$, 其中取 $K_{\sigma(k)} = P_{\sigma(k),22}^{-1} P_{\sigma(k),12}^{\mathrm{T}} \in$

$\mathbf{R}^{(n-p)\times p}$, 则有:

$$\theta_1(k)=x_1(k)=y(k)$$
$$\theta_2(k)=\left[\begin{array}{cc} K_{\sigma(k)} & I_{n-p}\end{array}\right]x(k)=$$
$$K_{\sigma(k)}x_1(k)+x_2(k)=K_{\sigma(k)}y(k)+x_2(k)$$

则当系统处于第 i 个子系统时, 一方面, 由式 (7) 的第二式知

$$\left[\begin{array}{cc} P_{i,11} & P_{i,12}\\ P_{i,12}^{\mathrm{T}} & P_{i,22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} D_{i,1}\\ D_{i,2}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} I_p\\ 0\end{array}\right]G_i$$

由此推导出 $P_{i,12}^{\mathrm{T}}D_{i,1}+P_{i,22}D_{i,2}=0$, 因而有 $K_iD_{i,1}+D_{i,2}=0$. 另一方面, 由式 (6) 可得:

$$\theta_2(k+1)=\left[\begin{array}{cc} K_i & I_{n-p}\end{array}\right]x(k+1)=$$
$$\left[\begin{array}{cc} K_i & I_{n-p}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} A_{i,11} & A_{i,12}\\ A_{i,21} & A_{i,22}\end{array}\right]\times$$
$$\left[\begin{array}{cc} I_p & 0\\ -K_i & I_{n-p}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \theta_1(k)\\ \theta_2(k)\end{array}\right]+$$
$$\left[\begin{array}{cc} K_i & I_{n-p}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} B_{i,1}\\ B_{i,2}\end{array}\right]u(k)+$$
$$\left[\begin{array}{cc} K_i & I_{n-p}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} D_{i,1}\\ D_{i,2}\end{array}\right]\eta(k)=$$
$$(K_iA_{i,12}+A_{i,22})\theta_2(k)+$$
$$[(A_{i,21}-A_{i,22}K_i)+K_i(A_{i,11}-A_{i,12}K_i)]y(k)+$$
$$(K_iB_{i,1}+B_{i,2})u(k)+(K_iD_{i,1}+D_{i,2})\eta(k)$$

注意到 $K_iD_{i,1}+D_{i,2}=0$, 因而有:

$$\begin{aligned}\theta_2(k+1)=&(K_iA_{i,12}+A_{i,22})\theta_2(k)+\\ &[(A_{i,21}-A_{i,22}K_i)+K_i(A_{i,11}-A_{i,12}K_i)]y(k)+\\ &(K_iB_{i,1}+B_{i,2})u(k)\end{aligned}\tag{9}$$

由于切换系统在切换时刻, 新子系统的状态初值为前一采样时刻的状态值, 即有 $x(k_v)=x(k_v-1)$, 所以有:

$$\theta(k_v)=T_{\sigma(k_v)}x(k_v)=T_{\sigma(k_v)}x(k_v-1)=$$
$$T_{\sigma(k_v)}T_{\sigma(k_v-1)}^{-1}\theta(k_v-1)$$

于是有:

$$\begin{aligned}&\theta_2(k_v)=\\ &\left(K_{\sigma(k_v)}-K_{\sigma(k_v-1)}\right)\theta_1(k_v-1)+\theta_2(k_v-1)=\\ &\left(K_{\sigma(k_v)}-K_{\sigma(k_v-1)}\right)y(k_v-1)+\theta_2(k_v-1)\end{aligned}\tag{10}$$

在假设 3 和 4 下, 由引理 3 知, 存在常数 $0<\gamma_1<1$, 使得 (7) 关于对称正定矩阵 $P_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和矩阵 $L_i\in\mathbf{R}^{n\times p}$ 和 $G_i\in\mathbf{R}^{q\times p}$ 有解. 如果对对称正定矩阵 P_i 解作进一步的假设, 则提出如下切换降维观测器设计方法:

定理 2. 在假设 3 和 4 下, 如果还存在常数 $\gamma_2>1$ 使得对于 $\forall(\sigma(k)=i,\sigma(k-1)=j)\in\ell\times\ell$, $i\neq j$, 满足:

$$P_i-\gamma_2P_j<0\tag{11}$$

且假设系统 (4) 切换信号 $\sigma(k)$ 的平均驻留时间 (ADT) 满足:

$$\tau_a\geq\tau_a^*=-\frac{\ln\gamma_2}{\ln(1-\gamma_1)}\tag{12}$$

则系统

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{\theta}_2(k+1)=(K_iA_{i,12}+A_{i,22})\hat{\theta}_2(k)+\\ \quad[(A_{i,21}-A_{i,22}K_i)+K_i(A_{i,11}-A_{i,12}K_i)]\times\\ \quad y(k)+(K_iB_{i,1}+B_{i,2})u(k)\\ \hat{\theta}_2(k_v)=\left(K_{\sigma(k_v)}-K_{\sigma(k_v-1)}\right)y(k_v-1)+\\ \quad\hat{\theta}_2(k_v-1)\\ \hat{x}(k)=\left[\begin{array}{c} y(k)\\ \hat{\theta}_2(k)-K_iy(k)\end{array}\right]\end{array}\right.\tag{13}$$

是系统 (4) 的切换降维未知输入观测器使得 $\lim_{k\to\infty}(x(k)-\hat{x}(k))=0$.

证明. 定义误差方程为 $\tilde{\theta}_2(k)=\theta_2(k)-\hat{\theta}_2(k)$, 选取 Lyapunov 函数为

$$V_{\sigma(k)}(k)=\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k)\sum_{i=1}^{N}\hbar_i(\sigma(k))P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k)\tag{14}$$

当系统处于第 i 个子系统的时刻时, 即当 $k\in[k_v,k_{v+1})$, 由式 (14) 可得:

$$\lambda_1\left(\left\|\tilde{\theta}_2(k)\right\|^2\right)\leq V_i(k)\leq\lambda_2\left(\left\|\tilde{\theta}_2(k)\right\|^2\right)\tag{15}$$

且 $\lambda_1=\min_{i\in\ell}\{\lambda_{\min}(P_{i,22})\}$, $\lambda_2=\max_{i\in\ell}\{\lambda_{\max}(P_{i,22})\}$, $\lambda_{\min}(P_{i,22})$ 表示 $P_{i,22}$ 最小的特征值, $\lambda_{\max}(P_{i,22})$ 表示 $P_{i,22}$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 最大的特征值.

由式 (7) 第一式, 利用 Schur 引理, 取 $W_i=P_iL_i$, 可得:

$$\left[\begin{array}{cc} -(1-\gamma_1)P_i & *\\ P_iA_i+W_iC_i & -P_i\end{array}\right]<0$$

分解上式, 有:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & -(1-\gamma_1)P_{i,22} & * & A_{i,22}^{\mathrm{T}}P_{i,22}+A_{i,12}^{\mathrm{T}}P_{i,12} \\ * & * & * & * \\ * & P_{i,12}^{\mathrm{T}}A_{i,12}+P_{i,22}A_{i,22} & * & -P_{i,22} \end{bmatrix}<0$$

再经初等行、列变换, 可得:

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & -(1-\gamma_1)P_{i,22} & A_{i,22}^{\mathrm{T}}P_{i,22}+A_{i,12}^{\mathrm{T}}P_{i,12} \\ * & * & P_{i,12}^{\mathrm{T}}A_{i,12}+P_{i,22}A_{i,22} & -P_{i,22} \end{bmatrix}<0$$

故有:

$$\begin{bmatrix} -(1-\gamma_1)P_{i,22} & A_{i,22}^{\mathrm{T}}P_{i,22}+A_{i,12}^{\mathrm{T}}P_{i,12} \\ P_{i,12}^{\mathrm{T}}A_{i,12}+P_{i,22}A_{i,22} & -P_{i,22} \end{bmatrix}<0$$

由 Schur 补定理, 可得:

$$(K_iA_{i,12}+A_{i,22})^{\mathrm{T}}P_{i,22}(K_iA_{i,12}+A_{i,22})-(1-\gamma_1)P_{i,22}<0$$

也即

$$(K_iA_{i,12}+A_{i,22})^{\mathrm{T}}P_{i,22}(K_iA_{i,12}+A_{i,22})-P_{i,22}<-\gamma_1P_{i,22} \tag{16}$$

对于第 i 个子系统, 式 (14) 即为

$$V_i(k)=\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k)P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k)$$

从式 (9) 和 (13) 中的第一式, 可得:

$$\tilde{\theta}_2(k+1)=\theta_2(k+1)-\hat{\theta}_2(k+1)=(K_iA_{i,12}+A_{i,22})\tilde{\theta}_2(k) \tag{17}$$

则有:

$$\begin{aligned}\Delta V_i(k)=&\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k+1)P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k+1)-\\&\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k)P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k)=\\&\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k)(K_iA_{i,12}+A_{i,22})^{\mathrm{T}}P_{i,22}(K_iA_{i,12}+A_{i,22})\times\\&\tilde{\theta}_2(k)-\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k)P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k)\end{aligned} \tag{18}$$

由式 (16) 和 (18) 可得:

$$\Delta V_i(k)\le-\gamma_1V_i(k) \tag{19}$$

用式 (10) 减去式 (13) 中第二式, 我们有:

$$\tilde{\theta}_2(k_v)=\theta_2(k_v)-\hat{\theta}_2(k_v)=\theta_2(k_v-1)-\hat{\theta}_2(k_v-1)=\tilde{\theta}_2(k_v-1)$$

对于 $\forall(\sigma(k_v)=i,\sigma(k_v-1)=j)\in\ell\times\ell,\ i\neq j$, 从式 (11) 可得:

$$\begin{bmatrix} P_{i,11}-\gamma_2P_{j,11} & P_{i,12}-\gamma_2P_{j,12} \\ * & P_{i,22}-\gamma_2P_{j,22} \end{bmatrix}<0$$

也即

$$P_{i,22}-\gamma_2P_{j,22}<0$$

因此有

$$\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v)P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k_v)\le\gamma_2\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v-1)P_{j,22}\tilde{\theta}_2(k_v-1)$$

进一步地

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}&\hbar_i(\sigma(k_v))\hbar_j(\sigma(k_v-1))\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v)\times\\&P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k_v)\le\gamma_2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\hbar_i(\sigma(k_v))\times\\&\hbar_j(\sigma t(k_v-1))\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v-1)\times\\&P_{j,22}\tilde{\theta}_2(k_v-1)\end{aligned}$$

又 $\sum_{i=1}^{N}\hbar_i(\sigma(k_v))=\sum_{j=1}^{N}\hbar_j(\sigma(k_v-1))=1$, 故

$$\begin{aligned}&\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v)\sum_{i=1}^{N}\hbar_i(\sigma(k_v))P_{i,22}\tilde{\theta}_2(k_v)\le\\&\gamma_2\tilde{\theta}_2^{\mathrm{T}}(k_v-1)\sum_{j=1}^{N}\hbar_j(\sigma(k_v-1))P_{j,22}\tilde{\theta}_2(k_v-1)\end{aligned}$$

也即

$$V_i(\theta_2(k_v))\le\gamma_2V_j(\theta_2(k_v)) \tag{20}$$

注意到式 (15)、(18)、(20) 和式 (12), 根据引理 2 推知观测器误差方程 (17) 是渐近稳定的, 这表明式 (13) 是式 (4) 的切换降维观测器. □

3　未知输入代数重构

本节对未知输入提出一种代数延迟重构方法, 式 (4) 两边同时左乘矩阵 C, 有:

$$Cx(k+1)=CA_{\sigma(k)}x(k)+CB_{\sigma(k)}u(k)+CD_{\sigma(k)}\eta(k)$$

即

$$CD_{\sigma(k)}\eta(k)=y(k+1)-CA_{\sigma(k)}x(k)-CB_{\sigma(k)}u(k)$$

另由假设 4 可知, $\mathrm{rank}\left(CD_{\sigma(k)}\right)=q$, 故, $\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{\mathrm{T}}\left(CD_{\sigma(k)}\right)$ 是非奇异矩阵, 因此有:

$$\eta(k)=\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}\left(y(k+1)-CA_{\sigma(k)}x(k)\right)-\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}CB_{\sigma(k)}u(k) \tag{21}$$

其中

$$\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}=\left(\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{\mathrm{T}}CD_{\sigma(k)}\right)^{-1}\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{\mathrm{T}}$$

定理 3. 在假设 3 和 4 的前提下,

$$\hat{\eta}\left(k\right)=\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}\left(y\left(k+1\right)-CA_{\sigma(k)}\hat{x}\left(k\right)\right)-$$

$$\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}CB_{\sigma(k)}u\left(k\right)\tag{22}$$

是未知输入 $\eta\left(k\right)$ 的渐近收敛延迟重构.

证明. 由式 (21) 和 (22) 可得, 未知输入重构误差

$$\tilde{\eta}\left(k\right)=\eta\left(k\right)-\hat{\eta}\left(k\right)=-\left(CD_{\sigma(k)}\right)^{+}CA_{\sigma(k)}\tilde{x}\left(k\right)$$

由于 $\lim_{k\to\infty}\tilde{x}\left(k\right)=0$, 故有 $\lim_{k\to\infty}\tilde{\eta}\left(k\right)=0$. □

4 仿真

考虑离散切换系统 (4) 的系数矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}0.39 & 0.08 & 0.07\\ -0.14 & 0.66 & -0.20\\ -0.16 & -0.40 & 0.66\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.2\\0.6\\0.4\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}-0.1\\0.2\\0.2\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0.49 & 0.10 & 0.06\\ -0.32 & 0.95 & -0.23\\ -0.25 & -0.06 & 0.63\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.4\\0.4\\0.5\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}-0.1\\0.2\\-0.1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

假设输入为 $u\left(k\right)=5\sin\left(2k\right)$, 未知输入为 $\eta\left(k\right)=\sin\left(50k\right)$, $\gamma_1=0.6$, $\gamma_2=3.8$. 可以算出:

$$P_1=10^5\times\begin{bmatrix}1.612 & 0.560 & 0.104\\ 0.560 & 0.236 & 0.041\\ 0.104 & 0.041 & 0.011\end{bmatrix}$$

$$P_2=10^4\times\begin{bmatrix}4.757 & 1.516 & 0.278\\ 1.516 & 1.030 & 0.209\\ 0.278 & 0.209 & 0.140\end{bmatrix}$$

以及 $\tau_a^*=1.457$. 切换序列如图 1 所示, 图 2 给出状态估计和未知输入重构, 由图 2 可以看出, 所提方法是正确有效的.

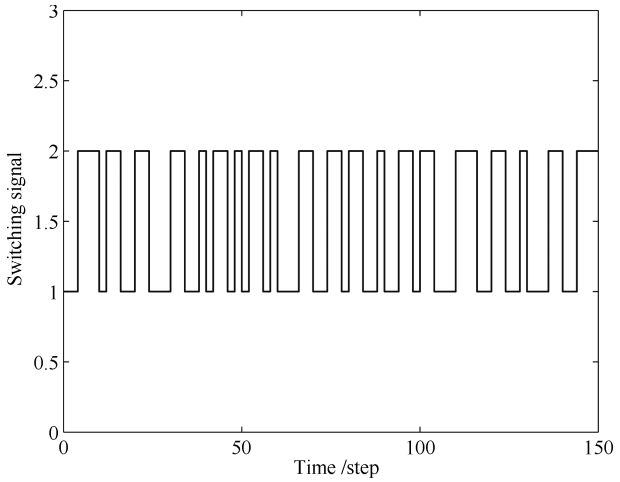


图 1 切换序列

Fig. 1 Switched sequence

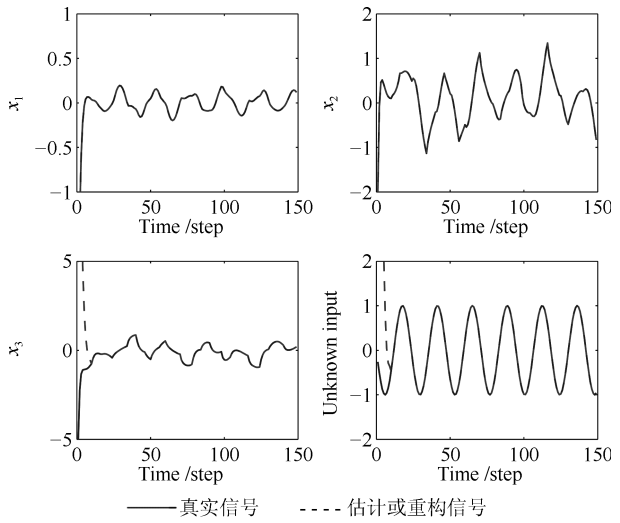


图 2 系统状态估计和未知输入重构

Fig. 2 Estimated states and unknown input reconstruction

5 总结

本文对具有未知输入的离散切换系统, 提出了一种能直接消去未知输入影响的切换降维观测器设计方法. 为了达到设计目的, 事先将文献 [3] 中有关连续系统观测器匹配条件的等价性条件的相关结论, 推广到一般的离散系统, 针对离散系统给出了类似于连续系统中观测器匹配条件的 Lyapunov-type 等价表示形式, 并给出了严格的推导过程. 然后, 将所得结论应用于离散切换系统, 提出了降维切换观测器设计方法, 并以此讨论了切换观测器存在的前提条件. 在同样的前提下, 提出了一种未知输入代数重构方法. 对同时具有未知输入和测量噪声的切换系统, 设计切换观测器并讨论存在性, 是值得进一步研讨的议题.

附录

为了证明引理 1 的结论, 首先引入下面引理.

引理 A1[3]**.** 假设 2 成立的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $S \in \mathbf{R}^{p\times p}$, 使得:

$$\bar{A} := T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} := T^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} := T^{-1}D = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} := S^{-1}CT = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{22} \end{bmatrix}$$

其中, $\bar{A}_{11} \in \mathbf{R}^{q\times q}$, $\bar{B}_1 \in \mathbf{R}^{q\times m}$, $\bar{D}_1 \in \mathbf{R}^{q\times q}$, $\bar{C}_{11} \in \mathbf{R}^{q\times q}$, $\bar{C}_{22} \in \mathbf{R}^{(p-q)\times(n-q)}$, 且 $\bar{D}_1, \bar{C}_{11}$ 是可逆的. 进一步地, 假设 1 成立当且仅当 $(\bar{A}_{22}, \bar{C}_{22})$ 可检测.

引理 A2. 对于任意对称正定矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 矩阵代数方程组 (3) 关于 $L \in \mathbf{R}^{n\times p}$, $G \in \mathbf{R}^{q\times p}$ 和 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 有解的充分必要是: $\bar{P} = T^{\mathrm{T}}PT$, $\bar{L} = T^{-1}LS$, $\bar{G} = GS$ 和 $\bar{Q} = T^{\mathrm{T}}QT$ 是如下的代数矩阵方程

$$\begin{cases} \left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P} \left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right) - \bar{P} = -\bar{Q} < 0 \\ \bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \bar{G}\bar{C} \end{cases} \tag{A1}$$

的解.

证明. 直接验证即可得知. 引理 1 的证明: (必要性: 假设 1 和 2 成立 ⇒ 式 (3) 有解). 定义

$$\bar{Q}_3 = \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right) + \varsigma I_{n-p}$$

可知

$$\bar{Q}_3 \in \mathbf{R}^{(n-q)\times(n-q)}$$

其中, $\varsigma > 0$ 是任意的正常数, $\bar{L}_{12} \in \mathbf{R}^{q\times(p-q)}$ 为任意矩阵, 显然, $\bar{Q}_3$ 是对称正定矩阵. 在假设 1 和 2 的前提下, 由引理 4 可知, $(\bar{A}_{22}, \bar{C}_{22})$ 可检测, 因此, 存在矩阵 $\bar{L}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-q)\times(p-q)}$, 使得如下 Lyapunov 代数方程

$$\left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P}_{22} \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right) - \bar{P}_{22} = -\bar{Q}_3$$

有对称正定解 $\bar{P}_{22}$, 即有:

$$\begin{aligned} &\left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right) + \\ &\quad \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P}_{22} \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right) - \bar{P}_{22} = -\varsigma I_{n-p} \end{aligned}$$

令 $\bar{P} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$ 和 $\bar{L} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_{11}\bar{C}_{11}^{-1} & \bar{L}_{12} \\ -\bar{A}_{21}\bar{C}_{11}^{-1} & \bar{L}_{22} \end{bmatrix}$ 则有式 (A2) (见页底).

因此, 对于对称正定矩阵 $\bar{Q} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \varsigma I_{n-p} \end{bmatrix}$, 存在对称正定矩阵 $\bar{P} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}$ 和 $\bar{L} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_{11}\bar{C}_{11}^{-1} & \bar{L}_{12} \\ -\bar{A}_{21}\bar{C}_{11}^{-1} & \bar{L}_{22} \end{bmatrix}$, 使得 $\left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P} \left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right) - \bar{P} = -\bar{Q} < 0$, 又 $\bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$, 若取 $\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$, 则有 $\bar{G}\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{C}_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$, 因此式 (23) 有解, 再由引理 5 易知, 式 (3) 有解. □

充分性: 式 (3) 有解 ⇒ 假设 1 和 2 成立). 由于 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, 故矩阵 D 和 $D^{\mathrm{T}}PD$ 有相同的零空间, 即 $\mathrm{rank}(D^{\mathrm{T}}PD) = \mathrm{rank}(D)$, 由 $D^{\mathrm{T}}P = GC$, 得 $D^{\mathrm{T}}PD = GCD$, 即

$$\mathrm{rank}\left(D^{\mathrm{T}}PD\right) = \mathrm{rank}(GCD) \le \mathrm{rank}(CD) \le \mathrm{rank}(D)$$

因此有 $\mathrm{rank}(D) \le \mathrm{rank}(CD) \le \mathrm{rank}(D)$, 即有 $\mathrm{rank}(CD) = \mathrm{rank}(D)$, 也即假设 2 成立.

在假设 2 成立的前提下, 由引理 A1 可知, 存在可逆矩阵 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $S \in \mathbf{R}^{p\times p}$, 使得 (3) 成立. 对于引理 A2 中定义的矩阵 $\bar{P}$, $\bar{L}$ 和 $\bar{G}$ 进行如下的分块

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix}, \bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} \\ \bar{L}_{21} & \bar{L}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & \bar{G}_2 \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

其中, 由引理 A2 可知, 式 (3) 有解意味着式 (A1) 有解, 对式 (A1) 按分块展开

$$\begin{aligned} &\left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P} \left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right) - \bar{P} = \\ &\qquad \begin{bmatrix} * & * \\ * & \Omega_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \\ &\qquad \begin{bmatrix} * & * \\ * & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P} \left(\bar{A} + \bar{L}\bar{C}\right) - \bar{P} = \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} & \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22} \\ 0 & \bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \left(\bar{A}_{12} + \bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right) + \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}} \bar{P}_{22} \left(\bar{A}_{22} + \bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right) - \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & -\varsigma I_{n-p} \end{bmatrix} = -\bar{Q} \end{aligned} \tag{A2}$$

其中

$$\begin{aligned}\Omega_1 = &\Big[\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{11}+\\ &\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{21}\Big]\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)+\\ &\Big[\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{12}+\\ &\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}\Big]\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)\\ \Omega_2 = &\Big[\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{11}+\\ &\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{21}\Big]\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)+\\ &\Big[\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{12}+\\ &\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}\Big]\times\\ &\left(\bar{A}_{22}+\bar{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)-\bar{P}_{22}\end{aligned}$$

也即有

$$\Omega_2 = -\bar{Q}_{22} \tag{A2}$$

由式 (A2) 中第二式可得 $\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{P}_{11} = \bar{G}_1\bar{C}_{11}$ 和 $\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\bar{P}_{12} = \bar{G}_2\bar{C}_{22}$. 因 $\bar{D}_1$ 是可逆的, 故有 $\bar{P}_{11} = \left(\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{G}_1\bar{C}_{11}$, $\bar{P}_{12} = \left(\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{G}_2\bar{C}_{22}$, 另 $\bar{P}$ 是对称矩阵, 即有 $\bar{P}_{21} = \left(\left(\bar{D}_1^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\bar{G}_2\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}$, 代入式 (1) 中并化简

$$\begin{aligned}&\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)-\bar{P}_{22}+\\ &\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}\right)\times\\ &\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)=-\bar{Q}_{22}\end{aligned}$$

其中, $\tilde{L}_{22} = \bar{L}_{22}+\bar{P}_{22}^{-1}((\bar{D}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{G}_2\bar{C}_{22})^{\mathrm{T}}(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22})\bar{C}_{22}^{-1}$. 进一步地, 可得:

$$\begin{aligned}&\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)-\bar{P}_{22}=\\ &-\bar{Q}_{22}-\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}\right)\times\\ &\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)\end{aligned}$$

由于 $\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}$ 为 $\bar{P}$ 的 Schur 补, 且 $\bar{P}$ 为对称正定矩阵, 因此 $\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}$ 为正定矩阵, 故 $\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}\right)\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)$ 为半正定矩阵, 所以

$$\begin{aligned}&-\bar{Q}_{22}-\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{P}_{11}-\bar{P}_{21}^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}^{-1}\bar{P}_{21}\right)\times\\ &\left(\bar{A}_{12}+\bar{L}_{12}\bar{C}_{22}\right)<0\end{aligned}$$

即

$$\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)^{\mathrm{T}}\bar{P}_{22}\left(\bar{A}_{22}+\tilde{L}_{22}\bar{C}_{22}\right)-\bar{P}_{22}<0$$

则 $\left(\bar{A}_{22},\bar{C}_{22}\right)$ 是可检测的, 由引理 A1 可知假设 1 成立. □

References

1 Wang S H, Wang E, Dorato P. Observing the states of systems with unmeasurable disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, **20**(5): 716−717

2 Bhattacharyya S. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, **23**(3): 483−484

3 Corless M, Tu J. State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 1998, **34**(6): 757−764

4 Charandabi B A, Marquez H J. A novel approach to unknown input filter design for discrete-time linear systems. *Automatica*, 2014, **50**(11): 2835−2839

5 Yang Jun-Qi, Chen Yan-Tao, Zhu Fang-Lai, Bu Xu-Hui. State and unknown input estimations for uncertain switched linear systems. *Control and Decision*, 2015, **30**(12): 2247−2252
(杨俊起, 陈滟涛, 朱芳来, 卜旭辉. 不确定切换线性系统状态和未知输入估计方法. *控制与决策*, 2015, **30**(12): 2247−2252)

6 Guo S H, Zhu F L, Xu L Y. Unknown input observer design for Takagi-Sugeno fuzzy stochastic system. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, **13**(4): 1003−1009

7 Yang J Q, Zhu F L, Yu K J, Bu X H. Observer-based state estimation and unknown input reconstruction for nonlinear complex dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, **20**(3): 927−939

8 Chadli M, Karimi H R. Robust observer design for unknown inputs Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013, **21**(1): 158−164

9 Lee D J, Park Y, Park Y S. Robust H_∞ sliding mode descriptor observer for fault and output disturbance estimation of uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2928−2934

10 Gupta M K, Tomar N K, Bhaumik S. Full- and reduced-order observer design for rectangular descriptor systems with unknown inputs. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, **352**(3): 1250−1264

11 Kalsi K, Lian J M, Hui S, Żak S H. Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: a high-gain approach. *Automaitca*, 2010, **46**(2): 347−353

12 Floquet T, Edwards C, Spurgeon S K. On sliding mode observers for systems with unknown inputs. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, **21**(8−9): 638−656

13 Zhu F L. State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(1): 296−302

14 Park T G. Designing fault detection observers for linear systems with mismatched unknown inputs. *Journal of Process Control*, 2013, **23**(8): 1185−1196

15 Floquet T, Barbot J P. State and unknown input estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*, 2006, **42**(11): 1883−1889

16 Guo S H, Zhu F L. Reduced-Order observer design for discrete-time descriptor systems with unknown inputs: an linear matrix inequality approach. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2015, **137**(8): Article No. 084503

17 Zhang L. and Shi P. l_2-l_∞ model reduction for switched LPV systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(10): 2443−2448

18 Zhang L X, Shi P. Stability, l_2-gain and asynchronous H_∞ control of discrete-time switched systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(9): 2192−2199

19 Lin H, Antsaklis P J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(2): 308−322

20 Zhang L X, Cui N G, Liu M, Zhao Y. Asynchronous filtering of discrete-time switched linear systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2011, **58**(5): 1109−1118

21 Zhao X D, Liu H, Zhang J F, Li H Y. Multiple-mode observer design for a class of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2015, **12**(1): 272−280

22 Koenig D, Marx B, Jacquet D. Unknown input observers for switched nonlinear discrete time descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(1): 373−379

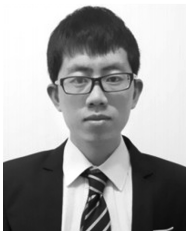
23 Bejarano F J, Pisano A. Switched observers for switched linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(3): 681−686

24 Wang Xing-Ping. Exponential stabilization of switched time-varying linear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(9): 1440−1444
(王兴平. 时变线性切换系统的指数镇定. 自动化学报, 2016, **42**(9): 1440−1444)

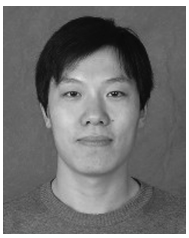
25 Wang Xing-Ping, Song Yan-Rong, Cheng Zhao-Lin. Exponential synchronization of time-varying linear multi-agent systems with switching topology. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(8): 1528−1532
(王兴平, 宋艳荣, 程兆林. 切换网络下时变线性多智能体系统的指数同步. 自动化学报, 2015, **41**(8): 1528−1532)



朱芳来 同济大学电子与信息工程学院教授. 主要研究方向为非线性系统鲁棒控制, 观测器设计, 基于模型的故障检测与隔离. 本文通信作者.
E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn
(**ZHU Fang-Lai** Professor at the College of Electronics and Information Engineering, Tongji University. His research interest covers nonlinear robust control, model-based fault detection and isolation. Corresponding author of this paper.)



蔡 明 同济大学控制理论与控制工程专业硕士研究生. 主要研究方向为基于模型的故障检测与隔离.
E-mail: basycai@163.com
(**CAI Ming** Master sutdent at the College of Electronics and Information Engineering, Tongji University. His research interest covers model-based fault detection and isolation.)



郭胜辉 苏州科技大学电子与信息工程学院讲师, 博士. 主要研究方向为基于模型的故障检测及观测器设计.
E-mail: 12gsh@tongji.edu.cn
(**GUO Sheng-Hui** Ph. D, lecturer at the College of Electronics and Information Engineering, Suzhou University of Science and Technology. His research interest covers model-based fault detection and observer design.)