第 43 卷 第 11 期 自 动 化 学 报 Vol. 43, No. 11
2017 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA November, 2017

一类采用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的分数阶系统可镇定性判定准则

高 哲 [1]

摘 要 针对含有一个分数阶项的区间分数阶被控对象, 提出了采用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的闭环系统可镇定性判定准则. 将闭环系统的特征函数分解为扰动函数和标称函数, 给出了扰动函数值集顶点的构造方法. 根据被控对象分数阶阶次和控制器的阶次, 研究了值集形状是否切换和切换频率的计算方法. 此外, 给出了测试频率区间的上下界, 以实现在有限频率区间内判定闭环系统值集与原点的位置关系. 在假设值集顶点函数在测试频率区间内不为零和闭环标称系统稳定的情况下, 以解析的方式提出了采用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器闭环系统的可镇定性判定准则. 最后, 通过对数值算例的可镇定性分析, 验证了提出的判定准则的有效性.

关键词 分数阶系统, 区间不确定性, 可镇定性, 值集, 分数阶 PI$^\lambda$ 控制器

引用格式 高哲. 一类采用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的分数阶系统可镇定性判定准则. 自动化学报, 2017, **43**(11): 1993−2002

DOI 10.16383/j.aas.2017.c150875

Stabilization Criterion for A Class of Interval Fractional-order Systems Using Fractional-order PI$^\lambda$ Controllers

GAO Zhe[1]

Abstract This study proposes a stabilization criterion for interval fractional-order plants involving one fractional-order term using fractional-order PI$^\lambda$ controllers. The characteristic function of the closed loop system is divided into the nominal function and disturbance function, and the construction method for the vertices of the value set with respect to the disturbance function is investigated. Moreover, the upper and lower limits of the test frequency interval are offered to determine the position relationship between the origin and the value set corresponding to the closed loop system. By supposing that the vertex functions are not equal to zero within the test frequency interval and the closed loop nominal system is stable, the stabilization criterion for closed loop systems using fractional-order PI$^\lambda$ controllers is proposed analytically. Finally, stabilization analyses of numerical examples verify the effectiveness of the proposed criterion.

Key words Fractional-order systems, interval uncertainties, stabilization, value set, fractional-order PI$^\lambda$ controllers

Citation Stabilization criterion for a class of interval fractional-order systems using fractional-order PI$^\lambda$ controllers. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(11): 1993−2002

由于分数阶微积分运算具有记忆特征, 可以更加有效地描述具有扩散性和粘弹性等实际物理系统的动态特性[1], 并且分数阶算子的引入可以使控制器设计方法更加灵活[2], 因此分数阶微积分理论在系统与控制理论方面得到了广泛的应用[3−4]. 大部分工业现场采用的控制器为各种形式的 PID (Propartion integration differentiation) 控制器, 因此关于分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器设计和参数整定的研究是各种分数阶控制器最早出现也是成果最多的. 分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器是在整数阶 PID 控制器的基础上, 增加了两个可调参数, 即分数阶积分阶次 λ 和分数阶微分阶次 μ[5], 使控制器设计更加灵活, 与整数阶 PID 控制相比, 可以获得更好的控制效果[6−7], 并且已经应用到很多实际的控制系统[8−11].

虽然分数阶算子的引入增加了控制器可调参数, 有效地改善了控制效果, 但也为控制器参数的设计带来了新的挑战. 文献 [12] 提出了一阶时滞分数阶系统的分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的频域设计方法. 文献 [13] 研究了一阶时滞分数阶系统的分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的可镇定域的绘制方法. 在此基础上文献 [14−15] 分别提出了考虑 H_∞ 性能和 D 稳定裕度的分数阶

收稿日期 2015-12-29 录用日期 2016-06-30
Manuscript received December 29, 2015; accepted June 30, 2016
国家自然科学基金 (61304094), 辽宁省教育厅科学研究一般项目 (L2015194, L2015198) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61304094), Scientific Research Fund of Liaoning Provincial Education Department (L2015194, L2015198)
本文责任编委 董海荣
Recommended by Associate Editor DONG Hai-Rong
1. 辽宁大学轻型产业学院 沈阳 110036
1. College of Light Industry, Liaoning University Shenyang 110036

PI$^\lambda$ 控制器和分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器的鲁棒可镇定域的绘制方法. 包括分数阶系统在内, 由于受到实际工业现场的各种不确定因素的干扰, 实际的被控对象都含有不确定因素. 在复频域上, 对于系数含有区间不确定性的分数阶系统, 文献 [16] 提出了基于值集的计算方法来判定区间分数阶系统的稳定性, 但是文献 [16] 方法可能会引入大量的冗余顶点和棱边的计算. 为了避免冗余顶点和棱边的计算, 文献 [17] 提出了构造值集顶点的方法, 并且给出了当同元阶次在 1 和 2 之间时, 系统鲁棒稳定性判定方法. 对于同元阶次在 0 和 1 之间的情况, 文献 [18] 给出了相应的系统鲁棒稳定性的判定准则. 对于含有时滞的区间分数阶系统, 文献 [19−20] 研究了中立型和滞后型两种系数含有区间不确定性的分数阶系统鲁棒稳定性, 但是都存在冗余顶点的计算问题, 没有给出值集形状的变化过程. 针对这个问题, 文献 [21] 给出了一类时滞区间分数阶系统值集的计算方法, 以避免冗余顶点和棱边的计算, 并且提出了相应的鲁棒稳定性判定准则. 针对区间分数阶被控对象的分数阶 PI$^\lambda$ 控制器设计研究, 文献 [22] 提出了相应的控制器可镇定条件, 但是文献 [22] 提出的控制器设计方法包含了冗余值集顶点对应函数的可镇定性分析, 增加了算法的复杂性. 为了解决这个问题, 文献 [23] 给出了基于分数阶控制器的区间分数阶系统闭环传递函数值集顶点的计算方法, 避免了冗余顶点和棱边的计算, 并且提出了相应的控制器可镇区间分数阶被控对象的图像判定方法.

频率从零增加到正无穷大的过程中, 闭环系统特征函数的值集的形状可能会发生变化, 也就是会存在切换频率. 在每个切换频率之间的频率段内, 文献 [23] 给出了值集顶点的计算方法. 但是文献 [23] 没有给出切换频率的计算公式, 而是用作图的形式判定控制的可镇定性. 因此本文针对含有一个分数阶项的区间分数阶被控对象, 研究切换频率存在性和计算方法. 在每个频率段内, 给出相应的值集顶点的函数表达式. 提出测试频率区间的计算公式, 以实现在有限频率段内测试值集与原点的位置关系. 根据除零原理, 研究判定分数阶 PI$^\lambda$ 控制器可镇定区间分数阶被控对象的解析方法.

符号说明: $\cot(x)$ 表示返回变量 x 的余切值, $\operatorname{arccot}(x)$ 表示返回变量 x 的反余切值, $\arg(x)$ 表示复数 x 的相角, $\max\{x,y\}$, $\min\{x,y\}$ 分别表示返回变量 x 和 y 的最大值和最小值, $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集, $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\emptyset$ 表示空集.

1 问题描述

考虑如下含有一个分数阶项的区间分数阶被控对象:

$$P(s)=\frac{K}{Ts^\alpha+C} \tag{1}$$

其中, 系数满足 $T\in[T^-,T^+]$, $K\in[K^-,K^+]$, $C\in[C^-,C^+]$ 并且 $T^-<T^+$, $K^-<K^+$, $C^-<C^+$, $\alpha\in\mathbf{R}^+$ 为被控对象的分数阶阶次. 不失一般性, 本文主要研究 $\alpha\notin\mathbf{Z}^+$ 的情况.

选择分数阶 PI$^\lambda$ 控制器作为分数阶被控对象的控制器, 传递函数如下:

$$C(s)=k_\mathrm{p}+k_\mathrm{i}s^{-\lambda}=\frac{k_\mathrm{p}s^\lambda+k_\mathrm{i}}{s^\lambda} \tag{2}$$

其中, $k_\mathrm{p}\in\mathbf{R}^+$ 和 $k_\mathrm{i}\in\mathbf{R}^+$ 分别是比例系数和积分系数. $\lambda\in(0,2)$ 为积分阶次, 并且 λ 满足下面假设条件.

假设 1. 存在最大的 $\gamma\in\mathbf{R}^+$, 使得 $\lambda/\gamma=P\in\mathbf{Z}^+$ 和 $\alpha/\gamma=Q\in\mathbf{Z}^+$ 成立.

注 1. 当分数阶系统 (1) 的阶次 α 已知时, 可以选择合适的控制器参数 λ 使得假设 1 成立.

根据控制器 $C(s)$ 和被控对象 $P(s)$ 的传递函数表达式, 闭环系统对应的特征函数为

$$F(s)=s^\lambda(Ts^\alpha+C)+(k_\mathrm{p}s^\lambda+k_\mathrm{i})K \tag{3}$$

令 $T=\overline{T}+w_T\delta_T$, $K=\overline{K}+w_K\delta_K$, $C=\overline{C}+w_C\delta_C$, 其中 $\overline{T}=(T^-+T^+)/2$, $\overline{K}=(K^-+K^+)/2$, $\overline{C}=(C^-+C^+)/2$, $w_T=(T^+-T^-)/2$, $w_K=(K^+-K^-)/2$, $w_C=(C^+-C^-)/2$, $|\delta_T|\le1$, $|\delta_K|\le1$, $|\delta_C|\le1$, 为了获得闭环系统特征函数的值集顶点, 特征函数 $F(s)$ 可以分解为 $F(s)=\overline{F}(s)+F_\Delta(s)$, 其中

$$\begin{aligned}\overline{F}(s)&=s^\lambda(\overline{T}s^\alpha+\overline{C})+(k_\mathrm{p}s^\lambda+k_\mathrm{i})\overline{K}\\F_\Delta(s)&=s^\lambda(w_T\delta_Ts^\alpha+w_C\delta_C)+(k_\mathrm{p}s^\lambda+k_\mathrm{i})w_K\delta_K\end{aligned}$$

2 主要结论

2.1 值集形状计算方法

定义 $\overline{F}(s)$ 为标称函数, $F_\Delta(s)$ 为扰动函数, 那么将 $s=\mathrm{j}\omega$ 分别代入 $\overline{F}(s)$ 和 $F_\Delta(s)$ 中, 可得:

$$\overline{F}(\mathrm{j}\omega)=\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}(\overline{T}\omega^\alpha\mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{j}}+\overline{C})+(k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}+k_\mathrm{i})\overline{K} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}F_\Delta(\mathrm{j}\omega)=&\,\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}(w_T\delta_T\omega^\alpha\mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{j}}+w_C\delta_C)+\\&(k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}+k_\mathrm{i})w_K\delta_K\end{aligned} \tag{5}$$

定义 $\hat{D}=w_T\delta_T\omega^\alpha\mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{j}}+w_C\delta_C$ 和 $\hat{N}=w_K\delta_K$, 那么对于某一个频率点 ω, $\hat{D}$ 的值集为一个平行四边形. 将 α 分解为 $\alpha=\alpha'+2k$, 其中 k 为非负整数, $\alpha'\in[0,2)$. 按照逆时针的顺序, 平行四边形的

4 个顶点分别对应着函数 $\hat{D}_1 = w_T\omega^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha'\pi}{2}\mathrm{j}} + w_C$, $\hat{D}_2 = w_T\omega^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha'\pi}{2}\mathrm{j}} - w_C$, $\hat{D}_3 = -w_T\omega^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha'\pi}{2}\mathrm{j}} - w_C$ 和 $\hat{D}_4 = -w_T\omega^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{\alpha'\pi}{2}\mathrm{j}} + w_C$. 规定 $\hat{D}_5 = \hat{D}_1$, 用 $\hat{D}_i - \hat{D}_{i+1}$, $i = 1,2,3,4$ 表示以 $\hat{D}_i$ 和 $\hat{D}_{i+1}$ 为端点的平行四边形的棱边 $L_i^{\hat{D}}$, 赋予棱边 $L_i^{\hat{D}}$ 的方向为由 $\hat{D}_{i+1}$ 指向 $\hat{D}_i$. 函数 $\hat{N}$ 的值集为位于实轴上一条线段 $L_{\hat{N}}$, 端点对应着函数 $\hat{N}_1 = w_K$ 和 $\hat{N}_2 = -w_K$, 并且端点函数与频率值 ω 无关. 规定 $\hat{N}_1 - \hat{N}_2$ 表示线段 $L_{\hat{N}}$, 赋予线段 $L_{\hat{N}}$ 的方向为由 $\hat{N}_2$ 指向 $\hat{N}_1$.

将扰动函数分解为 $F_\Delta(\mathrm{j}\omega) = D(\omega) + N(\omega)$, 其中函数 $D(\omega) = \omega^\lambda \mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}\hat{D}$, 函数 $N(\omega) = (k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}} + k_\mathrm{i})\hat{N}$, 那么函数 $D(\omega)$ 的值集是以 $D_1 = \omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}\hat{D}_1$, $D_2 = \omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}\hat{D}_2$, $D_3 = \omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}\hat{D}_3$ 和 $D_4 = \omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}}\hat{D}_4$ 为顶点的平行四边形. 定义 $D_i - D_{i+1}$, $i = 1,2,3,4$, 表示以 D_i 和 D_{i+1} 为端点的平行四边形棱边 L_i^D. 也就是说, 下面等式成立.

$$
\begin{aligned}
&|D_1 - D_2| = |D_3 - D_4| = 2\omega^\lambda w_C\\
&|D_2 - D_3| = |D_4 - D_1| = 2\omega^{\alpha+\lambda} w_T\\
&\arg(D_1 - D_2) = \frac{\lambda\pi}{2}\\
&\arg(D_3 - D_4) = \frac{\lambda\pi}{2} - \pi\\
&\arg(D_2 - D_3) = \frac{(\lambda+\alpha')\pi}{2} + 2z\pi\\
&\arg(D_4 - D_1) = \frac{(\lambda+\alpha')\pi}{2} - \pi
\end{aligned}
$$

其中, $z \in \mathbf{Z}$ 使得 $\arg(D_2 - D_3) \in (-\pi, \pi]$.

函数 $N(\omega)$ 的值集是以 $N_1 = (k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}} + k_\mathrm{i})\hat{N}_1$ 和 $N_2 = (k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}} + k_\mathrm{i})\hat{N}_2$ 为端点的线段 L^N, $N_1 - N_2$ 表示线段 L^N. 同理可计算,

$$
\begin{aligned}
&|N_1 - N_2| = \\
&\quad 2\left(k_\mathrm{i}^2 + 2k_\mathrm{i}k_\mathrm{p}\omega^\lambda\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) + k_\mathrm{p}^2\omega^{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} w_K\\
&\quad \arg(N_1 - N_2) = \mathrm{arccot}\left(\frac{k_\mathrm{i} + k_\mathrm{p}\omega^\lambda\cos(\frac{\lambda\pi}{2})}{k_\mathrm{p}\omega^\lambda\sin(\frac{\lambda\pi}{2})}\right)
\end{aligned}
$$

考虑到扰动函数 $F_\Delta(\mathrm{j}\omega)$ 的值集是由函数 $D(\omega)$ 和 $N(\omega)$ 的 Minkowski 和所构成的, 值集的端点由 D_i $(i = 1,2,3,4)$, N_1, N_2 决定. 那么当 L_i^D 不平行于 L^N 时, 扰动函数的值集为平行六边形, 当存在 L_i^D 平行于 L^N 的情况, 扰动函数的值集为平行四边形. 下面分别讨论值集端点的计算问题.

因为 $\arg(k_\mathrm{p}\omega^\lambda\mathrm{e}^{\frac{\lambda\pi}{2}\mathrm{j}} + k_\mathrm{i}) \in (0, (\lambda\pi)/2)$ 随着 ω 增加从 0 逐渐趋向于 $(\lambda\pi)/2$, 那么线段 L^N 的角度也是随着 ω 增加从 0 逐渐趋向于 $(\lambda\pi)/2$. 考虑到当 $\lambda \in (0,2)$ 为固定值时, 平行四边形的各个棱边的角度是固定的. 棱边 L_1^D 对应的角度为 $(\lambda\pi)/2 \in (0,\pi)$, 那么不可能存在某一个频率值 ω_0 使得 L^N 平行于 L_1^D 且它们具有相同的方向. 考虑到 L_1^D 平行于 L_3^D, 那么 L^N 也不会平行于 L_3^D.

考虑到 4 个顶点要构成平行四边形, 因此不存在 ω_0 使得 L^N 平行于 L_2^D 且具有相同方向. 当棱边 L_4^D 对应的角度 $[(\lambda+\alpha')\pi]/2 - \pi \in (0,\pi)$ 时, 可能存在 $[(\lambda+\alpha')\pi]/2 - \pi \in (0, (\lambda\pi)/2)$. 因此可能存在 ω_0 使得 L^N 平行于 L_4^D 且具有相同方向, 也就是

$$
\cot\left(\frac{(\lambda+\alpha')\pi}{2} - \pi\right) = \frac{k_\mathrm{i} + k_\mathrm{p}\omega_0^\lambda\cos(\frac{\lambda\pi}{2})}{k_\mathrm{p}\omega_0^\lambda\sin(\frac{\lambda\pi}{2})} \tag{6}
$$

解方程 (6) 可得

$$
\omega_0 = \left[\frac{k_\mathrm{i}}{k_\mathrm{p}(\sin(\frac{\lambda\pi}{2})\cot(\frac{(\lambda+\alpha')\pi}{2}) - \cos(\frac{\lambda\pi}{2}))}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \tag{7}
$$

根据以上分析可知, 如果 ω_0 存在, 那么当 $\omega \in (0,\omega_0)$ 时, 有 $\arg(N_1 - N_2) \in (0, \arg(D_4 - D_1))$ 成立, 当 $\omega \in (\omega_0, +\infty)$ 时, $\arg(N_1 - N_2) \in (\arg(D_4 - D_1), (\lambda\pi)/2)$ 成立. 因此, ω_0 把频率区间分成了两段, 并且在 $\omega = \omega_0$ 处平行六边形变为平行四边形.

当 $\omega \in \Omega_1 = (0,\omega_0)$ 时, 扰动函数的值集为平行六边形 S_1^Δ, 对应的顶点按照逆时针的顺序, 分别对应函数 $G_1^1 = N_1 + D_2$, $G_2^1 = N_1 + D_3$, $G_3^1 = N_1 + D_4$, $G_4^1 = N_2 + D_4$, $G_5^1 = N_2 + D_1$ 和 $G_6^1 = N_2 + D_2$. 当 $\omega \in \Omega_2 = (\omega_0, +\infty)$ 时, 扰动函数的值集仍然为平行六边形 S_2^Δ, 对应的顶点按照逆时针的顺序, 分别对应函数 $G_1^2 = N_1 + D_3$, $G_2^2 = N_1 + D_4$, $G_3^2 = N_1 + D_1$, $G_4^2 = N_2 + D_1$, $G_5^2 = N_2 + D_2$ 和 $G_6^2 = N_3 + D_3$. 虽然两个系统的值集都是平行六边形, 但是顶点函数的表达式不一样. 当 $\omega = \omega_0$ 时, 值集变为平行四边形 S_3^Δ, 对应顶点函数为 $G_1^3 = N_1 + D_3$, $G_2^3 = N_1 + D_4$, $G_3^3 = N_2 + D_1$ 和 $G_4^3 = N_2 + D_2$.

如果 ω_0 不存在, 那么定义 $\Omega_1 = \emptyset$, $\Omega_2 = (0, +\infty)$, $\Omega_3 = \emptyset$. 当 $\omega \in \Omega_2$ 时, 有 $\arg(N_1 - N_2) \in (0, (\lambda\pi)/2)$ 成立. 也就是, 扰动函数的值集一直为平行六边形 S_2^Δ, 且顶点函数分别对应函数 $G_1^2 = N_1 + D_3$, $G_2^2 = N_1 + D_4$, $G_3^2 = N_1 + D_1$, $G_4^2 = N_2 + D_1$, $G_5^2 = N_2 + D_2$ 和 $G_6^2 = N_3 + D_3$.

考虑到 $F(\mathrm{j}\omega) = \overline{F}(\mathrm{j}\omega) + F_\Delta(\mathrm{j}\omega)$, 那么特征函数对应值集 S_j 的顶点函数为 $F_i^j = \overline{F}(\mathrm{j}\omega) + G_i^j$, $i = 1,2,\cdots,L_j$, $j = 1,2,3$, $L_1 = L_2 = 6$, $L_3 = 4$, 值集 S_j 可以认为是将 S_j^Δ 从原点平移到 $\overline{F}(\mathrm{j}\omega)$, 并且形状保持不变.

2.2　测试频率区间

频率区间 $\omega \in (0, +\infty)$ 是一个无穷大的区间,

下面的定理给出了特征函数的值集在 $\omega \in (0, R_{\min})$ 和 $\omega \in (R_{\max}, +\infty)$ 范围内不会包含原点.

定理 1. 在 $\omega \in (0, R_{\min})$ 和 $\omega \in (R_{\max}, +\infty)$ 范围内, 特征函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集不会包含原点, 其中

$$R_{\max} = \max\{1, \eta_1^{\frac{1}{\alpha}}\} \tag{8}$$

$$R_{\min} = \min\{1, \eta_2^{\frac{1}{\lambda}}\} \tag{9}$$

$$\eta_1 = \frac{\max\{|C^-|, |C^+|\} + (k_\mathrm{p} + k_\mathrm{i}) \max\{|K^-|, |K^+|\}}{\min\{|T^-|, |T^+|\}}$$

$$\eta_2 = \frac{\min\{|K^-|, |K^+|\} k_\mathrm{i}}{\max\{|T^-|, |T^+|\} + \max\{|C^-|, |C^+|\} + \max\{|K^-|, |K^+|\} k_\mathrm{p}}$$

证明. 如果原点位于特征函数的值集的棱边或者内部, 那么存在 $|F(\mathrm{j}\omega)| = 0$ 的情况. 因此原点不在特征函数的值集棱边或者内部, 则要求 $|F(\mathrm{j}\omega)| > 0$.

当 $\omega > 1$ 时, $\omega^{\lambda+\alpha} > \omega^\lambda > 1$ 成立, 那么有:

$$\begin{aligned}|F(\mathrm{j}\omega)| \geq & |T|\omega^{\lambda+\alpha} - [(|C| + |K|k_\mathrm{p})\omega^\lambda + |K|k_\mathrm{i}] \geq \\ & \omega^\lambda[|T|\omega^\alpha - (|C| + |K|k_\mathrm{p} + |K|k_\mathrm{i})]\end{aligned} \tag{10}$$

如果 $|T|\omega^\alpha - (|C| + |K|k_\mathrm{p} + |K|k_\mathrm{i}) > 0$, 那么 $|F(\mathrm{j}\omega)| > 0$ 成立. 因此可以获得 $\omega > 1$ 时, 式 (8) 中的 $R_{\max}$.

当 $0 < \omega < 1$ 时, $1 > \omega^\lambda > \omega^{\lambda+\alpha}$ 成立, 那么有:

$$\begin{aligned}|F(\mathrm{j}\omega)| \geq & k_\mathrm{i}|K| - [|T|\omega^{\lambda+\alpha} + (|C| + |K|k_\mathrm{p})\omega^\lambda] \geq \\ & k_\mathrm{i}|K| - \omega^\lambda(|T| + |C| + |K|k_\mathrm{p})\end{aligned} \tag{11}$$

如果 $k_\mathrm{i}|K| - \omega^\lambda(|T| + |C| + |K|k_\mathrm{p}) > 0$, 那么 $|F(\mathrm{j}\omega)| > 0$ 成立. 因此可以获得 $0 < \omega < 1$ 时, 式 (9) 中的 $R_{\min}$. □

根据定理 1 可知, 只要在区间 $[R_{\min}, R_{\max}]$ 内检测特征函数的值集与原点之间的关系即可, 不需要在无穷大的频率区间 $(0, +\infty)$ 内进行检测. 如果 ω_0 存在, 定义集合 $\Omega'_1 = \Omega_1 \cap [R_{\min}, R_{\max}]$, $\Omega'_2 = \Omega_2 \cap [R_{\min}, R_{\max}]$, $\Omega'_3 = \{\omega_0\} \cap [R_{\min}, R_{\max}]$. 如果 ω_0 不存在, 那么定义 $\Omega'_1 = \emptyset$, $\Omega'_2 = \Omega_2 \cap [R_{\min}, R_{\max}]$, $\Omega'_3 = \emptyset$.

注 2. 如果 $\Omega'_1 = \emptyset$, $\Omega'_2 = \emptyset$, 或者 $\Omega'_3 = \emptyset$, 那么对应的值集 S_1, S_2 或者 S_3 与原点的位置关系不需要测试.

2.3 闭环系统可镇定性解析判定

当控制器参数 λ 满足假设 1 的情况下, 特征函数值集顶点函数可以表示为

$$F_i^j = \sum_{k=0}^{P+Q} f_{i,k}^j \omega^{k\gamma} \mathrm{e}^{\frac{k\gamma\pi\mathrm{j}}{2}} \tag{12}$$

其中, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $L_1 = L_2 = 6$, $L_3 = 4$.

当 $k = 0$, $k = P$ 和 $k = P + Q$ 时, 系数 $f_{i,k}^j$ 可以根据第 2.1 节的值集端点的计算方法获得, 其他情况下 $f_{i,k}^j = 0$.

根据欧拉公式, 顶点函数 F_i^j 可以表示为

$$\begin{aligned}F_i^j = & \left[\sum_{k=0}^{P+Q} f_{i,k}^j \cos\left(\frac{k\gamma\pi}{2}\right)\omega^{k\gamma}\right] + \\ & \left[\sum_{k=0}^{P+Q} f_{i,k}^j \sin\left(\frac{k\gamma\pi}{2}\right)\omega^{k\gamma}\right]\mathrm{j}\end{aligned} \tag{13}$$

定义函数

$$h_{i,k}^j = f_{i,k}^j \cos\left(\frac{k\gamma\pi}{2}\right)$$

$$g_{i,k}^j = f_{i,k}^j \sin\left(\frac{k\gamma\pi}{2}\right)$$

那么顶点函数 F_i^j 的实部 R_i^j 和虚部 I_i^j 可以表示为

$$R_i^j = \sum_{k=0}^{P+Q} h_{i,k}^j \omega^{k\gamma} \tag{14}$$

$$I_i^j = \sum_{k=0}^{P+Q} g_{i,k}^j \omega^{k\gamma} \tag{15}$$

定理 2. 定义 $F_{L_j+1}^j = F_1^j$, 假设矩阵 M_i^j 可逆, 对于 $\omega \in \Omega'_j$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $L_1 = L_2 = 6$, $L_3 = 4$, 有 $F_i^j \neq 0$ 和 $F_{i+1}^j \neq 0$ 成立. 如果 $(M_i^j)^{-1} M_{i+1}^j$ 在负实轴有 T_i^j 个特征值 $W_{i,t}^j$, $t = 1, 2, \cdots, T_i^j$, 且 T_i^j 个负特征值对应的特征向量 $v_{i,t}^j = [v_{i,t,1}^j, v_{i,t,2}^j, \cdots, v_{i,t,2(P+Q)}^j]^\mathrm{T}$ 满足 $v_{i,t,k}^j / v_{i,t,k-1}^j = (\omega_{i,t}^j)^\gamma$, $k = 2, 3, \cdots, 2(P+Q)$, 并且 $\omega_{i,t}^j \in \Omega'_j$, 那么连接函数 F_i^j 和 F_{i+1}^j 对应顶点的棱边 (不包含函数 F_i^j 和 F_{i+1}^j 对应的顶点), 在 $\omega_{i,t}^j$ 处所对应的函数 $E_{i,i+1}^j$ 满足 $E_{i,i+1}^j = 0$, 其中矩阵

M_i^j 定义如下:

$$M_i^j=\left[\begin{array}{cccc} h_{i,0}^j & h_{i,1}^j & \cdots & h_{i,P+Q-1}^j \\ g_{i,0}^j & g_{i,1}^j & \cdots & g_{i,P+Q-1}^j \\ 0 & h_{i,0}^j & h_{i,1}^j & \cdots \\ 0 & g_{i,0}^j & g_{i,1}^j & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ldots & 0 & h_{i,0}^j \\ 0 & \ldots & 0 & g_{i,0}^j \end{array}\right. \longrightarrow$$

$$\longleftarrow \left.\begin{array}{cccc} h_{i,P+Q}^j & 0 & \cdots & 0 \\ g_{i,P+Q}^j & 0 & \cdots & 0 \\ h_{i,P+Q-1}^j & h_{i,P+Q}^j & \cdots & 0 \\ g_{i,P+Q-1}^j & g_{i,P+Q}^j & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{i,1}^j & \cdots & h_{i,P+Q-1}^j & h_{i,P+Q}^j \\ g_{i,1}^j & \cdots & g_{i,P+Q-1}^j & g_{i,P+Q}^j \end{array}\right] \tag{16}$$

证明. 如果 $E_{i,i+1}^j=0$, 也就是 $E_{i,i+1}^j=\epsilon_i^jF_i^j+(1-\epsilon_i^j)F_{i+1}^j=0$ 成立, 其中 $\epsilon_i^j\in[0,1]$. 根据定理 2 的假设条件可知 $F_i^j\neq 0$ 和 $F_{i+1}^j\neq 0$ 成立, 那么只需要判断 $\epsilon_i^j\in(0,1)$ 时, $E_{i,i+1}^j=0$ 是否成立. 因为 $1-\epsilon_i^j\neq 0$, 那么当 $E_{i,i+1}^j=0$ 时, 有:

$$\frac{F_{i+1}^j}{F_i^j}=-\frac{\epsilon_i^j}{1-\epsilon_i^j} \tag{17}$$

设 $W_i^j=-\epsilon_i^j/(1-\epsilon_i^j)$, 当 ϵ_i^j 从 0 变化到 1 时, W_i^j 从 0 变化到 $-\infty$. 令 F_{i+1}^j/F_i^j 在 $\omega=\omega_{i,t}^j$ 处满足 $F_{i+1}^j/F_i^j=W_{i,t}^j$ 条件, 那么有:

$$\frac{R_{i+1}^j+I_{i+1}^j\mathrm{j}}{R_i^j+I_i^j\mathrm{j}}=W_{i,t}^j \tag{18}$$

即

$$R_{i+1}^j=W_{i,t}^jR_i^j \tag{19}$$

$$I_{i+1}^j=W_{i,t}^jI_i^j \tag{20}$$

定义

$$v_{i,t}^j=[v_{i,t,1}^j,v_{i,t,2}^j,\cdots,v_{i,t,2(P+Q)}^j]^{\mathrm{T}}= [1,(\omega_{i,t}^j)^{\gamma},\cdots,(\omega_{i,t}^j)^{(P+Q)\gamma},\cdots,(\omega_{i,t}^j)^{[2(P+Q)-1]\gamma}]^{\mathrm{T}}$$

那么式 (19) 和式 (20) 等价于

$$[h_{i,0},h_{i,1},\cdots,h_{i,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-1}]v_{i,t}^jW_{i,t}^j= [h_{i+1,0},h_{i+1,1},\cdots,h_{i+1,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-1}]v_{i,t}^j \tag{21}$$

$$[g_{i,0},g_{i,1},\cdots,g_{i,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-1}]v_{i,t}^jW_{i,t}^j= [g_{i+1,0},g_{i+1,1},\cdots,g_{i+1,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-1}]v_{i,t}^j \tag{22}$$

将式 (21) 和式 (22) 两边同时乘以 $(\omega_{i,t}^j)^{\gamma}$, 那么有:

$$[0,h_{i,0},h_{i,1},\cdots,h_{i,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-2}]v_{i,t}^jW_{i,t}^j= [0,h_{i+1,0},h_{i+1,1},\cdots,h_{i+1,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-2}]v_{i,t}^j \tag{23}$$

$$[0,g_{i,0},g_{i,1},\cdots,g_{i,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-2}]v_{i,t}^jW_{i,t}^j= [0,g_{i+1,0},g_{i+1,1},\cdots,g_{i+1,P+Q},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{P+Q-2}]v_{i,t}^j \tag{24}$$

按照以上方法, 式 (21) 和式 (22) 两边同时乘以 $(\omega_{i,t}^j)^{2\gamma},(\omega_{i,t}^j)^{3\gamma},\cdots,(\omega_{i,t}^j)^{(P+Q-1)\gamma}$, 那么有:

$$M_i^jv_{i,t}^jW_i^j=M_{i+1}^jv_{i,t}^j \tag{25}$$

假设 M_i^j 可逆, 那么根据式 (25) 有 $W_i^jv_{i,t}^j=(M_i^j)^{-1}M_{i+1}^jv_{i,t}^j$. 因此 $W_{i,t}^j$ 为矩阵 $(M_i^j)^{-1}M_{i+1}^j$ 的特征值, $v_{i,t}^j$ 为对应的特征向量. 根据 $v_{i,t}^j$ 的定义可知 $v_{i,t,k}^j/v_{i,t,k-1}^j=(\omega_{i,t}^j)^{\gamma}\in\mathbf{R}^+$, 其中 $k=2,3,\cdots,2(P+Q)$.

如果矩阵 $(M_i^j)^{-1}M_{i+1}^j$ 的特征值在负实轴上有 T_i^j 个特征值 $W_{i,t}^j$, $t=1,2,\cdots,T_i^j$, 并且 T_i^j 个特征值对应的特征向量 $v_{i,t}^j=[v_{i,t,1}^j,v_{i,t,2}^j,\cdots,v_{i,t,2(P+Q)}^j]^{\mathrm{T}}$ 满足 $v_{i,t,k}^j/v_{i,t,k-1}^j=(\omega_{i,t}^j)^{\gamma}$, $k=2,3,\cdots,2(P+Q)$, 并且 $\omega_{i,t}^j\in\Omega_j'$, $j=1,2,3$ 成立, 那么在 $\omega_{i,t}^j$ 处所对应的函数 $E_{i,i+1}^j$ 满足 $E_{i,i+1}^j=0$. □

定理 3. 假设闭环系统的标称函数 $\overline{F}(s)$ 稳定, 当 $\omega\in\Omega_j'$, $j=1,2,3$ 时, 对应的闭环系统的特征函数对应的值集 S_j 的顶点函数满足条件 $F_i^j\neq 0$, $i=1,2,\cdots,L_j$, $L_1=L_2=6$, $L_3=4$. 分数阶 PI$^\lambda$ 控制器 $C(s)$ 可以镇定区间不确定系统 $P(s)$ 当且仅当如下三个条件成立.

1) $|\overline{K}/w_K|>1$.

2) $|\overline{T}/w_T|>1$.

3) 对应所有的 $i=1,2,\cdots,L_j$, $j=1,2,3$, $L_1=L_2=6$, $L_3=4$, 都有 $T_i^j=0$ 成立.

证明. 充分性.

1) 当 $\omega = 0$ 时, $F(\mathrm{j}\omega) = k_{\mathrm{i}}K = k_{\mathrm{i}}(\overline{K} + w_K\delta_K)$. 如果 $F(\mathrm{j}\omega) = 0$, 也就是 $\overline{K} + w_K\delta_K = 0$, 那么 $\delta_K = -\overline{K}/w_K$, 因此 $|\delta_K| = |\overline{K}/w_K| \le 1$. 如果要求当 $\omega = 0$ 时, $F(\mathrm{j}\omega) \ne 0$ 成立, 也就是要求条件 1 成立.

2) 如果 $\omega \ne 0$ 时, $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集不包含原点, 也就是 $F(\mathrm{j}\omega)/(\mathrm{j}\omega)^{\lambda+\alpha} = T + [(Kk_{\mathrm{p}} + C)(\mathrm{j}\omega)^{\lambda} + Kk_{\mathrm{i}}]/(\mathrm{j}\omega)^{\lambda+\alpha}$ 的值集也不包含原点. 如果 $\omega \to +\infty$ 时, 值集包含原点那么有 $T = \overline{T} + w_T\delta_T = 0$, 即 $|\overline{T}/w_T| \le 1$ 成立. 因此, 如果要求当 $\omega \to +\infty$ 时, $F(\mathrm{j}\omega) \ne 0$, 那么要求条件 2 成立.

3) 对于 $\omega \in (0, \infty)$ 时, 根据定理 1, 只需检验 $\omega \in \Omega'_j$ 时, $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集与原点的位置关系. 根据定理 2 可知, 如果对应所有的 $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $j = 1, 2, 3$, $L_1 = L_2 = 6$, $L_3 = 4$, 都有 $T_i^j = 0$ 成立, 那么对于所有的棱边都有 $E_{i,i+1}^j \ne 0$ 成立. 原点也不会从任何棱边 (不包含顶点) 进入值集内部.

假设 $F_i^j \ne 0$ 成立的情况下, 原点不会从顶点进入值集内部. 当闭环系统的标称函数 $\overline{F}(s)$ 稳定时, 如果满足定理 3 的条件 1) ~ 3), 那么原点会一直在 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集外部. 根据除零原理, 分数阶 PI$^{\lambda}$ 控制器可以镇定含有一个分数阶项的区间分数阶被控对象 $P(s)$.

必要性.

如果 $F(s)$ 稳定, 那么对于 $s = \mathrm{j}\omega$, 有 $F(s) \ne 0$, 也就是 $F(\mathrm{j}\omega) \ne 0$. 根据除零原理, 原点在值集外部, 因此条件 1) ~ 3) 成立.

3 数值算例

例 1. 考虑如下的分数阶被控对象

$$P(s) = \frac{K}{Ts^{1.8} + C} \tag{26}$$

其中, $K \in [9, 11]$, $T \in [3.5, 4.5]$, $C \in [0.5, 1.5]$.

分数阶 PI$^{\lambda}$ 控制器选择为

$$C(s) = k_{\mathrm{p}} + k_{\mathrm{i}}s^{-1.2} \tag{27}$$

其中, $k_{\mathrm{p}} = 2$, $k_{\mathrm{i}} = 1$.

根据式 (7), 计算 ω_0 为 $\omega_0 = 1.4933$. 根据定理 1, 计算 $R_{\min} = 0.3884$ 和 $R_{\max} = 3.5652$, 那么测试频率区间为 $[0.3884, 3.5652]$, 频率 ω_0 在测试频率区间内, 因此 ω_0 存在, 也就是 $\Omega'_1 = [0.3884, 1.4933)$, $\Omega'_2 = (1.4933, 3.5652]$, $\Omega'_3 = \{1.4933\}$. 在 Ω'_1 内取 $\omega = 0.4, 0.8, 1.2$, 在 Ω'_2 内取 $\omega = 2, 3$, 取 $\omega = \omega_0$, 那么特征函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集如图 1 所示.

根据图 1 描述的特征函数在不同频率点的值集形状可知, 根据 ω_0 是值集形状 S_1 和 S_2 切换的频率点. 值集形状在切换点为平行四边形, 在 Ω'_1 和 Ω'_2 的频率区间的频率点处是平行六边形. 可知, 在这几个频率点处原点在闭环特征函数值集的外部, 根据第 2.1 节的方法可以获得特征函数的值集并且避免了冗余顶点的计算.

根据文献 [24], 可以判定标称函数 $\overline{F}(s)$ 稳定. 图 2 是当 $j = 1, 2, 3$ 时, 各个值集顶点函数对应的 $|F_i^j|$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$ 在 $\omega \in \Omega'_j$ 的变化曲线, 其中图 2 的符号 "×" 表示 $\omega = \omega_0$ 时对应值集顶点的图像.

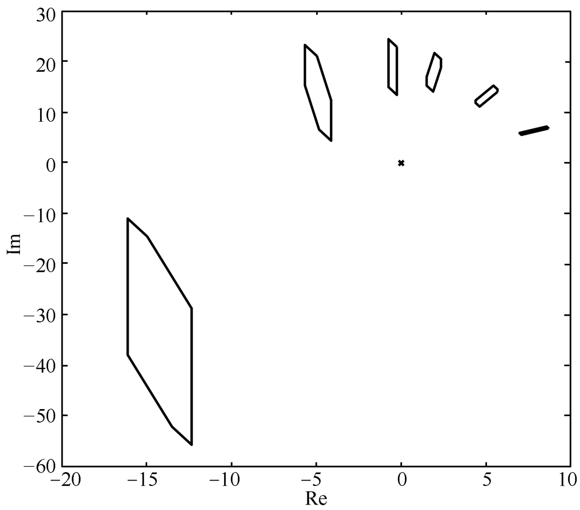


图 1 当 $\omega = 0.4, 0.8, 1.2, \omega_0, 2, 3$ 时, 特征函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集

Fig. 1 Value sets of characteristic function $F(\mathrm{j}\omega)$ for $\omega = 0.4, 0.8, 1.2, \omega_0, 2, 3$

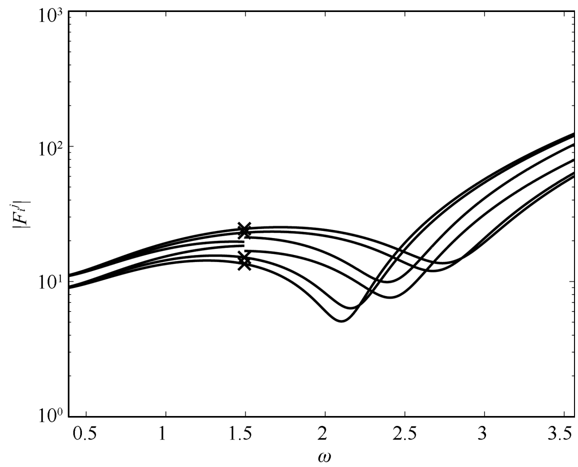


图 2 顶点函数 $|F_i^j|$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $j = 1, 2, 3$, 在 $\omega \in \Omega'_j$ 的变化曲线

Fig. 2 Curves of vertex functions $|F_i^j|$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $j = 1, 2, 3$, within $\omega \in \Omega'_j$

由图 2 的变化曲线可知, 在 $\omega \in \Omega'_j$ 内, 都有 $|F_i^j| \ne 0$ 成立, 这样意味着例 1 的控制器参数的选择可以满足定理 3 的假设条件 $F_i^j \ne 0$.

根据定理 2 可知, 在每个频率区间 Ω'_j, $j=1,2,3$ 内都有 $T_i^j=0$, $i=1,2,\cdots,L_j$. 考虑到 $|\overline{K}/w_K|=10>1$, $|\overline{T}/w_T|=8>1$, 那么定理 3 的三个条件都成立, 因此分数阶 PI^{λ} 控制器 $C(s)$ 可以镇定区间分数阶系统. 为了进一步验证这个结论, 在 $T\in[3.5,4.5]$, $C\in[0.5,1.5]$ 和 $K\in[9,11]$ 的三个区间内分别均匀地取 10 个数值, 并且令 $w=s^{0.6}$ 代入 $F(s)$ 中, 那么这 1 000 个变换后的函数 $F(w)$ 的特征值分布如图 3 所示.

图 3 中的 Line 1 和 Line 2 分别是以原点为起点角度为 0.3π 和 -0.3π 的射线. 由图 2 描述的特征根分布可知, 这 1 000 个分数阶闭环特征函数的特征值都分布在稳定域内, 对应的分数阶系统都是稳定的, 也进一步说明了定理 3 的有效性. 同样地, 根据文献 [23] 的方法定义函数 $D(\omega)$, 函数 $D(\omega)$ 在有限频率区间 $[0.3884,3.5652]$ 内函数变化曲线如图 4 所示.

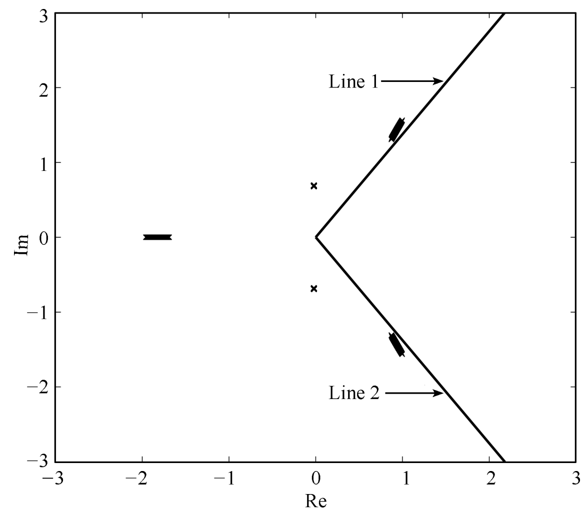


图 3　$F(w)$ 的特征值分布

Fig. 3　Distribustion of eigenvalues of $F(w)$

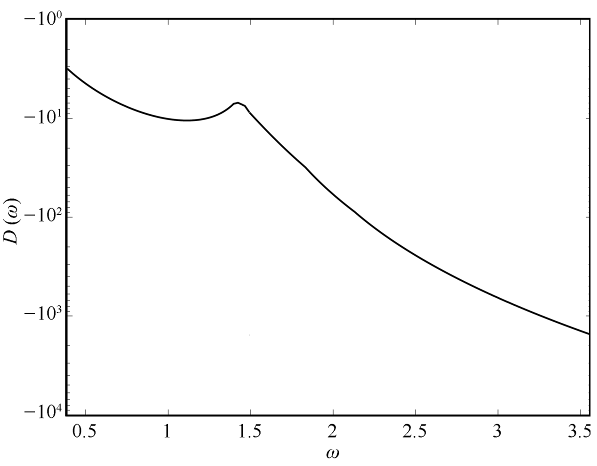


图 4　$D(\omega)$ 变化曲线

Fig. 4　Curve of $D(\omega)$

根据图 4 中的函数 $D(\omega)$ 变化曲线可知, 函数 $D(\omega)<0$ 在有限频率区间 $[0.3884,3.5652]$ 都成立, 因此根据文献 [23] 的判据可知, 原点位于值集的外侧, 分数阶 PI^{λ} 控制器可以镇定分数阶对象 (26), 也进一步验证了本文提出的算法的有效性.

例 2. 增大例 1 中分数阶系统的不确定区间为 $T\in[1,7]$, $K\in[2,18]$. 不确定区间 $C\in[0.5,1.5]$ 和分数阶阶次 $\alpha=1.8$ 不变. 控制器参数和例 1 一样.

因为例 2 的 $\overline{C}$ 和 $\overline{T}$ 和例 1 对应的参数一样, 因此可以判定标称函数 $\overline{F}(s)$ 稳定. 因为 ω_0 的计算公式与控制器 $C(s)$ 的参数与被控系统 $P(s)$ 的系数无关, 因此 ω_0 仍然是 $\omega_0=1.4933$. 根据定理 1, 计算 $R_{\min}=0.0754$ 和 $R_{\max}=9.3122$, 那么测试频率区间为 $[0.0754,9.3122]$, 频率 ω_0 在测试频率区间内, 因此 ω_0 存在, 也就是 $\Omega'_1=[0.0754,1.4933)$, $\Omega'_2=(1.4933,9.3122]$, $\Omega'_3=\{1.4933\}$. 在 Ω'_1 内取 $\omega=1,1.2,1.4$, 在 Ω'_2 内取 $\omega=1.8,2$, 取 $\omega=\omega_0$, 那么特征函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集如图 5 所示.

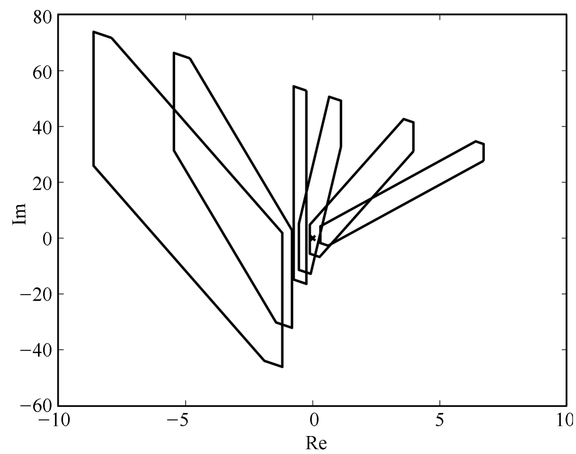


图 5　当 $\omega=1,1.2,1.4,\omega_0,1.8,2$ 时, 特征函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的值集

Fig. 5　Value sets of characteristic function $F(\mathrm{j}\omega)$ for $\omega=1,1.2,1.4,\omega_0,1.8,2$

由图 5 描述的值集与原点位置关系可知, 当 $\omega=1.2,1.4$ 时, 原点在值集内部, 因此可以断定分数阶 PI^{λ} 控制器 $C(s)$ 不能镇定不确定区间扩大后的分数阶被控对象 $P(s)$. 下面用定理 3 来加以判断这个结论.

图 6 是当 $j=1,2,3$ 时, 各个值集顶点函数对应的 $|F_i^j|$, $i=1,2,\cdots,L_j$ 在 $\omega\in\Omega'_j$ 的变化曲线, 其中图 5 的符号 $\times$ 表示 $\omega=\omega_0$ 时对应值集顶点的图像.

由图 6 的变化曲线可知, 和例 1 一样, 在 $\omega\in\Omega'_j$ 内, 都有 $|F_i^j|\neq0$ 成立, 例 2 的控制器参数的选择可以满足定理 3 的假设条件 $F_i^j\neq0$. 也就是在 $\omega\in$

$[0.0754, 9.3122]$ 内, 原点是从棱边进入值集内部. 经计算, $|\overline{T}/w_T| = 4/3 > 1$ 和 $|\overline{K}/w_K| = 5/4 > 1$ 都满足条件, 因此满足定理 3 的条件 1 和条件 2.

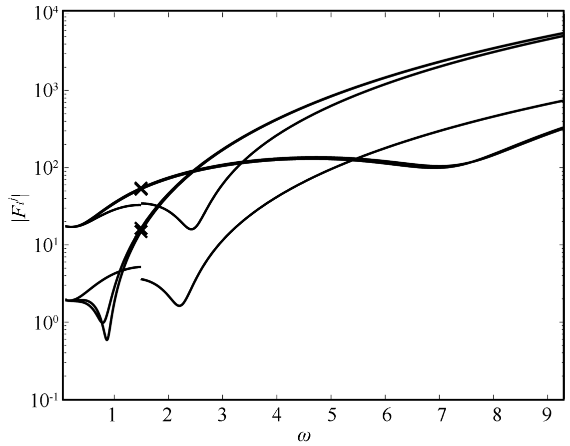


图 6　扩大不确定区间后的顶点函数 $|F_i^j|$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $j = 1, 2, 3$, 在 $\omega \in \Omega'_j$ 的变化曲线

Fig. 6　Curves of vertex functions $|F_i^j|$, $i = 1, 2, \cdots, L_j$, $j = 1, 2, 3$, within $\omega \in \Omega'_j$ for enlarged interval case

根据定理 2 可知, 矩阵 $(M_4^1)^{-1}M_5^1$ 有负特征值 -0.9369, 并且这个特征值对应的特征向量都满足 $v_{4,4,k}^1/v_{4,4,k-1}^1 = 1.0848$, $k = 2, 3, \cdots, 10$, 并且 $\omega_{4,4}^1 = 1.1453 \in \Omega'_1$ 成立. 因此, 在 $\omega_{4,4}^1$ 处, 原点位于棱边 $E_{4,5}^1$ 上. 当 $\omega = \omega_{4,4}^1$ 时, $F(\omega_{4,4}^1\mathrm{j})$ 的值集如图 7 所示.

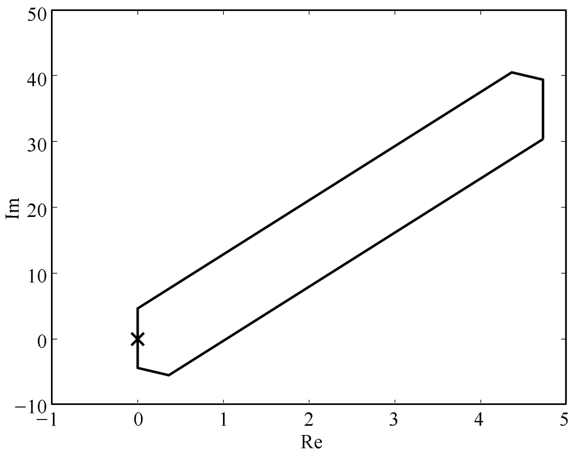


图 7　当 $\omega = \omega_{4,4}^1$ 时, 扩大不确定区间后的 $F(\omega_{4,4}^1\mathrm{j})$ 对应的值集

Fig. 7　Value set of $F(\omega_{4,4}^1\mathrm{j})$ at $\omega = \omega_{4,4}^1$ for enlarged interval case

从图 7 的值集图像可知, 在 $\omega = \omega_{4,4}^1 = 1.1453$ 处, 原点确实位于值集的棱边上, 进一步验证了定理 2 的有效性.

根据定理 3 可知, 虽然闭环系统满足定理 3 的假设条件、条件 1 和条件 2, 但是 $T_4^1 = 1$, 不满足定理 3 的条件 3, 因此分数阶 PI^λ 控制器不能镇定不确定区间扩大后的区间分数阶被控对象 $P(s)$.

为了进一步验证这个结论, 在 $T \in [1, 7]$, $C \in [0.5, 1.5]$ 和 $K \in [2, 18]$ 的三个区间内分别均匀地取 10 个数值, 并且令 $w = s^{0.6}$ 代入 $F(s)$ 中, 那么这 1 000 个变换后的函数 $F(w)$ 的特征值分布如图 8 所示.

图 8 中的 Line 1 和 Line 2 分别是以原点为起点角度为 0.3π 和 -0.3π 的射线. 由图 7 描述的特征根分布可知, 这 1 000 个分数阶闭环特征函数的特征值有部分分布在不稳定域内, 对应的分数阶系统是不稳定的, 扩大不确定区间后系统变为不稳定.

同样地, 定义函数 $D(\omega)$, 函数 $D(\omega)$ 在有限频率区间 $[0.0754, 9.3122]$ 内函数变化曲线如图 9 所示. 图 10 是图 9 的局部放大图.

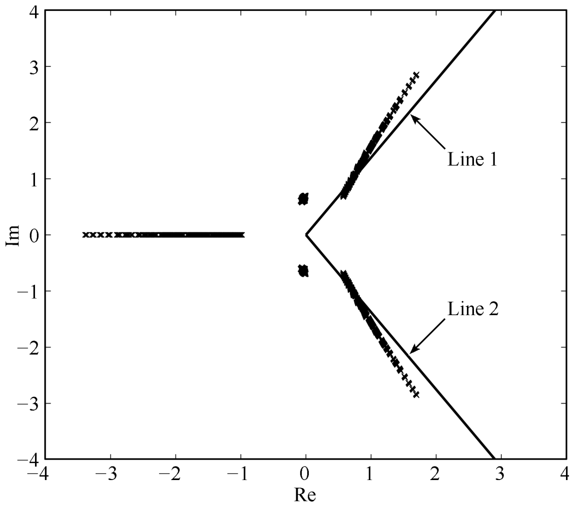


图 8　扩大不确定区间后的 $F(w)$ 的特征值分布

Fig. 8　Curve of $D(\omega)$ for enlarged interval case

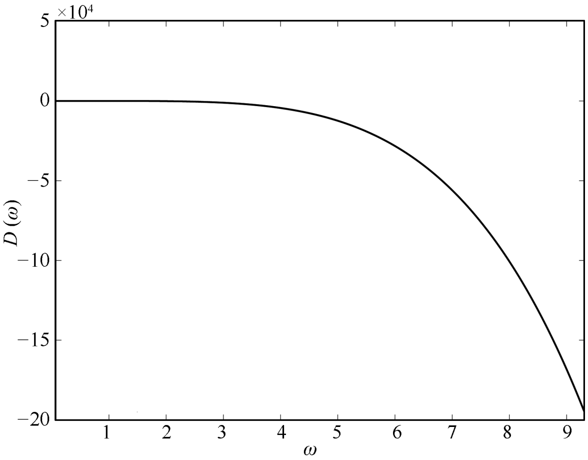


图 9　扩大不确定区间后的 $D(\omega)$ 变化曲线

Fig. 9　Curve of $D(\omega)$ for enlarged interval case

根据图 9 和图 10 中的描述函数 $D(\omega)$ 变化曲线可知, 存在 ω 使得函数 $D(\omega) = 0$ 成立的频率值.

因此根据文献 [23] 的判据可知, 原点在这些频率值处位于值集的棱边上或者值集内部, 分数阶 PI$^\lambda$ 控制器不能镇定分数阶对象 (26). 因此, 根据文献 [23] 得出的结论和根据本文提出解析判定方法得出的结论是一致的.

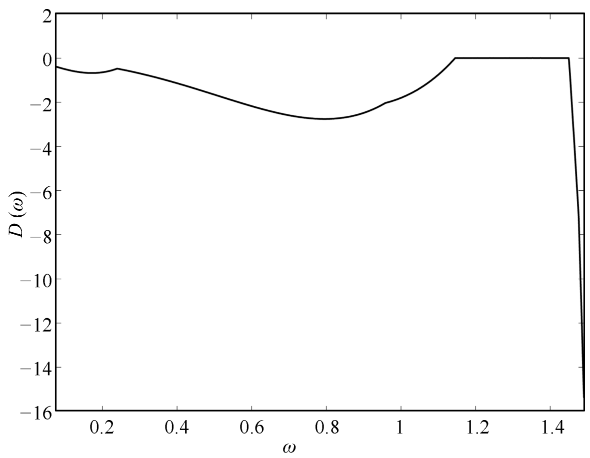


图 10 扩大不确定区间后的 $D(\omega)$ 变化曲线的局部放大图

Fig. 10 Zoom on curve of $D(\omega)$ for enlarged interval case

4 结论

本文针对含有一个分数阶项的系数为区间不确定的分数阶被控对象, 提出了采用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的闭环系统可镇定性判定准则. 首先, 将闭环系统的特征函数分成扰动函数和标称函数, 在分析扰动函数对应的值集形状、发生切换的条件及切换频率 ω_0 是否存在的基础上, 进一步获得闭环系统特征值函数值集顶点的计算方法. 为了实现能够在有限频率区间上测试值集与原点的位置关系, 提出了测试频率区间边界值的计算方法. 在假设顶点函数在测试区间内不为零, 并且闭环系统的标称函数稳定的前提下, 提出了分数阶 PI$^\lambda$ 控制器 $C(s)$ 可以镇定含有一个分数阶项的区间分数阶被控对象 $P(s)$ 的解析方法. 文献 [23] 在每个频率点处需要重新计算闭环系统值集的顶点函数, 对应顶点较多的值集计算量会变大. 和文献 [23] 相比, 在本文提出的切换区间内值集顶点函数是固定不变的, 不需要重新计算顶点函数的表达式, 可以有效地降低计算量.

References

1 Magin R, Ortigueira M D, Podlubny I, Trujillo J. On the fractional signals and systems. *Signal Processing*, 2011, **91**(3): 350−371

2 Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, Xue D Y, Feliu-Batlle V. *Fractional-order Systems and Controls*. London: Springer-Verlog, 2010.

3 Monje C A, Vinagre B M, Feliu V, Chen Y Q. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications. *Control Engineering Practice*, 2008, **16**(7): 798−812

4 Machado J T, Kiryakova V, Mainardi F. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(3): 1140−1153

5 Podlubny I. Fractional-order systems and PI$^\lambda$D$^\mu$ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(1): 208−214

6 Fabrizio P, Antonio V. Tuning rules for optimal PID and fractional-order PID controllers. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(1): 69−81

7 Padula F, Vilanova, R, Visioli A. H_∞ optimization-based fractional-order PID controllers design. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(17): 3009−3026

8 Lee C H, Chang F K. Fractional-order PID controller optimization via improved electromagnetism-like algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2010, **37**(12): 8871−8878

9 Zeng G Q, Chen J, Dai Y X, Li L M, Zheng C W, Chen M R. Design of fractional order PID controller for automatic regulator voltage system based on multi-objective extremal optimization. *Neurocomputing*, 2015, **160**: 173−184

10 Sondhi S, Hote Y V. Fractional order PID controller for load frequency control. *Energy Conversion and Management*, 2014, **85**: 343−353

11 Kumar V, Rana K P S, Mishra P. Robust speed control of hybrid electric vehicle using fractional order fuzzy PD and PI controllers in cascade control loop. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(8): 1713−1741

12 Castillo-Garcia F J, Feliu-Batlle V, Rivas-Perez R. Frequency specifications regions of fractional-order PI controllers for first order plus time delay processes. *Journal of Process Control*, 2013, **23**(4): 598−612

13 Luo Y, Chen Y Q. Stabilizing and robust fractional order PI controller synthesis for first order plus time delay systems. *Automatica*, 2012, **48**(9): 2159−2167

14 Wang D J, Gao X L. Stability margins and H_∞ co-design with fractional-order PI$^\lambda$ controller. *Asian Journal of Control*, 2013, **15**(3): 691−697

15 Zheng S Q, Tang X Q, Song B. Graphical tuning method of FOPID controllers for fractional order uncertain system achieving robust D-stability. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, **26**(5): 1112−1142

16 Tan N, Özgüven Ö F, Özyetkin M M. Robust stability analysis of fractional order interval polynomials. *ISA Transactions*, 2009, **48**(2): 166−172

17 Moornani K A, Haeri M. Robust stability testing function and Kharitonov-like theorem for fractional order interval systems. *IET Control Theory & Applications*, 2010, **4**(10): 2097−2108

18 Gao Zhe, Liao Xiao-Zhong. Robust stability criteria for interval fractional-order systems: the $0 < \alpha < 1$ case. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(2): 175−182
(高哲, 廖晓钟. 区间分数阶系统的鲁棒稳定性判别准则: $0 < \alpha < 1$ 情况. 自动化学报, 2012, **38**(2): 175−182)

19 Moornani K A, Haeri M. Necessary and sufficient conditions for BIBO-stability of some fractional delay systems of neutral type. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(1): 125−128

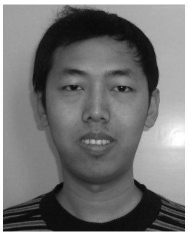
20 Moornani K A, Haeri M. On robust stability of LTI fractional-order delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 2010, **46**(2): 362−368

21 Gao Z. Robust stability criterion for fractional-order systems with interval uncertain coefficients and a time-delay. *ISA Transactions*, 2015, **58**: 76−84

22 Liang T N, Chen J J, Zhao H H. Robust stability region of fractional order PI^λ controller for fractional order interval plant. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(9): 1762−1773

23 Gao Z. Robust stabilization criterion of fractional-order controllers for interval fractional-order plants. *Automatica*, 2015, **61**: 9−17

24 Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: Proceedings of the 1996 Computational Engineering in Systems Applications. Lille, France: IEEE/SMC, 1996. 963−968



高 哲 辽宁大学轻型产业学院电气工程及其自动化系副教授. 2012 年获得北京理工大学博士学位. 主要研究方向为分数阶控制系统.
E-mail: gaozhe83@gmail.com
(**GAO Zhe** Associate professor in the Department of Electrical Engineering and Automation, College of Light Industry, Liaoning University. He received his Ph. D. degree from Beijing Institute of Technology in 2012. His research interest covers fractional-order control systems.)