第 43 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 43, No. 5
2017 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 2017

# 非均匀采样数据系统的新型模型描述方法

谢 莉 [1,2]　杨慧中 [1,2]　丁 锋 [1,2]

**摘　要**　提升技术是处理非均匀采样数据 (Non-uniformly sampled-data, NUSD) 系统的标准工具. 然而, 提升状态空间模型存在因果约束问题, 相应的提升传递函数模型结构复杂, 且参数数目过多. 因此, 它们不便于非均匀采样数据系统的辨识与控制. 通过引入时变后移算子, 本文提出了一种输入输出表达的新型模型描述方法. 该模型能够克服提升系统模型的缺点, 使得传统单率系统的辨识和控制方法能够推广到非均匀采样数据系统中. 仿真结果表明了新模型的优越性和有效性.

**关键词**　非均匀采样, 多率系统, 系统模型, 传递函数模型

**引用格式**　谢莉, 杨慧中, 丁锋. 非均匀采样数据系统的新型模型描述方法. 自动化学报, 2017, **43**(5): 806−813

**DOI**　10.16383/j.aas.2017.c150787

## Novel Input-output Representation of Non-uniformly Sampled-data Systems

XIE Li[1,2]　YANG Hui-Zhong[1,2]　DING Feng[1,2]

**Abstract**　The lifting technique is a benchmark tool to deal with non-uniformly sampled-data (NUSD) systems. However, the lifted state space model suffers from the causality constraint problem, and the corresponding lifted transfer function model is complex and involves a large number of parameters. Therefore, they are inconvenient for the identification and control purposes. By introducing a time-varying backward shift operator, this paper proposes a novel input-output representation of NUSD systems. The proposed model can overcome the limitation of the lifted models, and make traditional identification methods and control strategies of single-rate systems applicable to NUSD systems. The simulation results illustrate the advantages and effectiveness of the novel model.

**Key words**　Non-uniform sampling, multirate system, system model, transfer function model

**Citation**　Xie Li, Yang Hui-Zhong, Ding Feng. Novel input-output representation of non-uniformly sampled-data systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(5): 806−813

非均匀采样数据 (Non-uniformly sampled-data, NUSD) 系统是一类更为一般的多率系统, 其输入刷新和 (或) 输出采样呈现不等时间间隔[1−2]. 受到硬件设备的限制、经济条件的制约或环境因素的影响, 非均匀采样数据系统在石油、化工、电力、冶金、食品、医药等过程工业中广泛存在[3−5]. 在网络控制系统中, 受到传输距离的影响以及网络承载能力和通讯带宽的限制, 数据在传输过程中不可避免地存在时延甚至丢包现象, 使得其实际采样间隔呈现非均匀性[6−7]. 在集散控制系统中, 为了节约存储空间, 原始数据通常会经过压缩处理, 压缩之后的数据也可看作非均匀采样数据[8].

另一方面, 相对于均匀采样方式, 非均匀采样方式能够获得更多的有用信号, 有助于降低平均采样频率和提高处理器的利用效率[9−10]. 因此, 非均匀采样数据系统在雷达目标识别、信号检测与处理、通信等领域的应用十分广泛. 同时, 非均匀采样比均匀采样更能保证离散化后系统的能控性和能观性, 由非均匀采样数据系统的提升状态空间模型能够唯一重构原连续系统; 且非均匀采样数据控制系统能够提高传统单率控制系统的性能. 因此, 可以尝试对控制变量或被控变量进行非均匀刷新或采样, 以达到某种特殊的设计要求[4, 11−12].

近年来, 非均匀采样数据系统在辨识领域受到了国内外专家和学者的广泛关注. 基于快速均匀刷新的输入数据和慢速非均匀采样的输出数据, Zhu 等利用高斯 – 牛顿迭代方法求解最小化问题, 提出了辨识快速单率输出误差模型的预测误差方法[13]; Ding 等提出了辅助模型随机梯度辨识方法, 从而对非均匀损失输出数据和快速单率输出误差模型的参数进行交互估计[14]; Raghavan 等将最大期望算法

收稿日期 2015-11-23　录用日期 2016-03-02
Manuscript received November 23, 2015; accepted March 2, 2016
国家自然科学基金 (61403166), 江苏省自然科学基金 (BK20140164), 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP11561, JUSRP51510) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61403166), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20140164), and Fundamental Research Funds for the Central Universities (JUSRP11561, JUSRP51510)
本文责任编委 方海涛
Recommended by Associate Editor FANG Hai-Tao
1. 江南大学轻工过程先进控制教育部重点实验室 无锡 214122　2. 江南大学物联网工程学院 无锡 214122
1. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122　2. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122

和卡尔曼滤波算法相结合, 提出了快速单率状态空间模型的辨识方法[15]. 针对存在非均匀损失输出数据的非线性系统, Gopaluni 将最大期望算法和粒子滤波算法相结合, 提出了快速单率非线性状态空间模型的辨识方法[16]; Tulsyan 等将未知参数向量增广为状态向量, 提出了系统状态和参数联合在线估计的贝叶斯方法[17]. 此外, 针对输出采样点不在快速输入刷新点上的非均匀采样数据系统, 文献 [18] 提出了可变迭代间隔的递推辨识算法, 对连续时间状态空间模型的参数矩阵进行估计. 针对输出在输入刷新周期内非均匀采样的非线性系统, 文献 [19] 基于提升技术推导了各个非均匀采样点上子系统的输入输出表达形式, 采用支持向量回归方法对模型进行在线估计, 并提出了这类非均匀采样数据系统的模型预测控制方法.

针对输入数据与输出数据同步非均匀采样的系统, 丁锋等利用提升技术推导了系统的提升状态空间模型, 基于递阶辨识原理提出了模型参数和状态的交互估计方法[20]. 在此基础上, 文献 [21−23] 分别考虑了提升状态空间模型的因果约束问题, 提出了基于子空间的辨识方法. 为了避免求解因果约束问题, 文献 [24−25] 将提升状态空间模型转化为等价的提升传递函数模型进行辨识. 然而, 提升传递函数模型包含的参数比提升状态空间模型更多, 因此, 相应辨识算法的计算量较大. 文献 [26] 进一步将提升传递函数模型分解为多个辨识子模型, 以避免重复求解各子模型中存在的耦合参数变量, 从而减小算法的计算量, 提高参数估计精度. 文献 [27] 借助于递阶辨识原理, 提出了计算量较小的递阶最小二乘辨识算法. 针对有色噪声干扰的非均匀采样数据系统, 文献 [28] 利用噪声分布的先验知识, 提出了一种带方差重置的递推贝叶斯辨识方法. 文献 [29−30] 分别针对非均匀采样的 Wiener 非线性系统和 Hammerstein-Wiener 非线性系统, 提出了梯度迭代辨识算法和递阶随机梯度辨识算法. 此外, 文献 [31−32] 研究了异步非均匀采样数据系统的辨识问题.

如上所述, 提升状态空间模型存在因果约束问题, 相应的提升传递函数模型结构复杂、参数数目过多, 给非均匀采样数据系统的辨识和控制带来极大挑战. 为此, 本文通过引入时变后移算子, 提出一种与提升系统模型等价, 但是更加简洁的新型模型. 论文剩余部分的框架结构如下: 第 1 节为问题描述; 第 2 节推导非均匀采样数据系统的离散时间模型, 包括传统的提升状态空间模型和提升传递函数模型, 以及本文首次提出的基于时变后移算子的传递函数模型; 第 3 节利用仿真例子对新模型的有效性进行验证; 第 4 节为结论.

## 1　问题描述

考虑图 1 所示的非均匀采样数据系统, 其中连续时间过程 $P$ 为一个线性时不变单输入单输出系统, 且可以描述为如下状态空间模型:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}u(t)\\ y(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+Du(t)\end{cases}\tag{1}$$

系统的输入信号 $u(t)$ 由离散时间输入序列 $u(kT+t_i)$ 经过非均匀零阶保持器 $H_\tau$ 产生; 输出信号 $y(t)$ 经过非均匀采样器 $S_\tau$ 获得离散时间输出序列 $y(kT+t_i)$; $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量, $A\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{1\times n},D\in\mathbf{R}$ 为连续系统状态空间模型的参数矩阵.

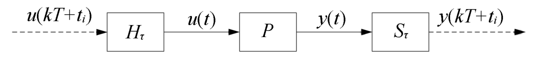


图 1　非均匀采样数据系统的结构图

Fig. 1　The schematic of the non-uniformly sampled-data systems

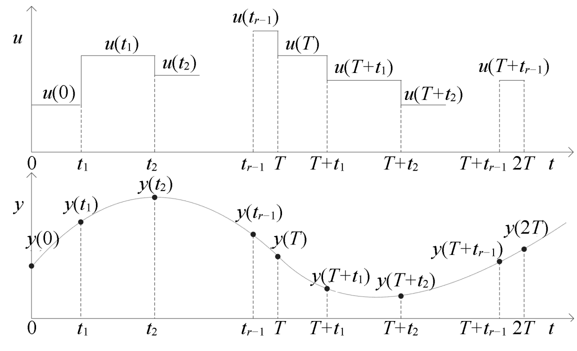


图 2　非均匀刷新与采样方式

Fig. 2　The non-uniform updating and sampling pattern

非均匀零阶保持器 $H_\tau$ 和采样器 $S_\tau$ 的刷新与采样方式如图 2 所示, 离散时间输入序列 $\{u(kT+t_i)\}$ 与输出序列 $\{y(kT+t_i)\}$ 在每个框架周期 $T$ 内非均匀刷新和采样 $r$ 次, 各采样时刻 $t=kT+t_i$, $i=0,1,2,\cdots,r$ 之间的非均匀采样间隔依次为 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r\}$, 且 $t_0=0$, $t_i=t_{i-1}+\tau_i\ (i=1,2,\cdots,r)$, $T=t_r=\sum_{i=1}^{r}\tau_i$.

## 2　模型推导

本节通过引入时变后移算子, 提出非均匀采样数据系统的新型传递函数模型. 为了对比研究, 以表明新模型的优越性, 下文将首先推导出非均匀采样数据系统的提升状态空间模型和提升传递函数模型.

为记作简便, 将 $kT$ 时刻之后的第 $i$ ($i=0,1,2,\cdots,r$) 个采样数据 $s(kT+t_i)$ 记作 $s_i(k)$, 即 $s_i(k):=s(kT+t_i)$. 而 $kT$ 时刻之前的第 $i$ ($i=0,1,2,\cdots,r$) 个采样数据 $s(kT-T+t_{r-i})$

记作 $s_{-i}(k)$, 即

$$s_{-i}(k) := s(kT - T + t_{r-i}) = s_{r-i}(k-1) \tag{2}$$

### 2.1 提升状态空间模型

根据非均匀零阶保持器 $H_\tau$ 的特性, 连续输入信号 $u(t)$ 可表示为

$$u(t) = u_i(k),\ t \in [kT + t_i,\ kT + t_{i+1})$$

设 $t_\alpha$ 时刻的初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_\alpha)$, 则状态空间模型 (1) 状态方程的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = &\exp[A(t-t_\alpha)]\boldsymbol{x}(t_\alpha) + \\ &\int_{t_\alpha}^{t} \exp[A(t-\tau)]\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{3}$$

取 $t_\alpha = kT + t_{i-1}$, $t = kT + t_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$, 得到

$$\boldsymbol{x}_i(k) = Q_i \boldsymbol{x}_{i-1}(k) + \boldsymbol{H}_i u_{i-1}(k) \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}&Q_i := \exp(A\tau_i) \in \mathbf{R}^{n\times n}\\ &\boldsymbol{H}_i := \int_0^{\tau_i} \exp(At)\mathrm{d}t\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^n\end{aligned}$$

递推应用式 (4) 可得:

$$\boldsymbol{x}_i(k) = G_i \boldsymbol{x}_0(k) + \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{F}_{i,j} u_{j-1}(k) \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&G_i := Q_i Q_{i-1} \cdots Q_1\\ &\boldsymbol{F}_{i,j} := \begin{cases}\boldsymbol{H}_j,\ j = i\\ Q_i Q_{i-1}\cdots Q_{j+1}\boldsymbol{H}_j,\ j = 1, 2, \cdots, i-1\end{cases}\end{aligned}$$

由系统 (1), 利用式 (5), 输出信号 $y(t)$ 在非均匀采样时刻 $kT + t_i$ $(i = 0, 1, \cdots, r-1)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}y_i(k) = &\boldsymbol{C}G_i\boldsymbol{x}_0(k) + [\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{i,1}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{i,2}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{i,i}, D] \times\\ &[u_0(k), u_1(k), \cdots, u_{i-1}(k), u_i(k)]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

分别定义非均匀采样提升输入向量 $\underline{\boldsymbol{u}}(k)$ 和提升输出向量 $\underline{\boldsymbol{y}}(k)$ 如下,

$$\begin{aligned}&\underline{\boldsymbol{u}}(k) := [u_0(k), u_1(k), u_2(k), \cdots, u_{r-1}(k)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^r\\ &\underline{\boldsymbol{y}}(k) := [y_0(k), y_1(k), y_2(k), \cdots, y_{r-1}(k)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^r\end{aligned}$$

非均匀采样数据系统 (1) 的提升状态空间模型可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_0(k+1) = \underline{G}\boldsymbol{x}_0(k) + \underline{F}\,\underline{\boldsymbol{u}}(k)\\ \underline{\boldsymbol{y}}(k) = \underline{C}\boldsymbol{x}_0(k) + \underline{D}\,\underline{\boldsymbol{u}}(k)\end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\underline{G} := G_r \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

$$\underline{F} := [\boldsymbol{F}_{r,1}, \boldsymbol{F}_{r,2}, \cdots, \boldsymbol{F}_{r,r}] \in \mathbf{R}^{n\times r}$$

$$\underline{C} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}G_1\\ \boldsymbol{C}G_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}G_{r-1}\end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r\times n}$$

$$\underline{D} := \begin{bmatrix}D & & & & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{1,1} & D & & \mathbf{0} & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{2,1} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{2,2} & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{r-1,1} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{r-1,2} & \cdots & \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{r-1,r-1} & D\end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{r\times r}$$

值得注意的是, $\underline{D}$ 为一个下三角矩阵, 其对角线以上的所有元素均为 0. 这就是所谓的因果约束问题, 在非均匀采样数据系统的辨识与控制中必须得到有效处理. 为了避免求解这个问题, 可将提升状态空间模型转化为输入输出表达的提升传递函数模型.

### 2.2 提升传递函数模型

引入单位后移算子 $z^{-1}$: $\boldsymbol{x}_0(k-1) =: z^{-1}\boldsymbol{x}_0(k)$, 或单位前移算子 $z$: $\boldsymbol{x}_0(k+1) =: z\boldsymbol{x}_0(k)$, 提升状态空间模型 (6) 的提升传递函数模型为

$$\underline{\boldsymbol{y}}(k) = \underline{C}(zI - \underline{G})^{-1}\underline{F}\,\underline{\boldsymbol{u}}(k) + \underline{D}\,\underline{\boldsymbol{u}}(k) \tag{7}$$

上式共包含 $r$ 个子系统, 拆分以后第 $i$ $(i = 0, 1, \cdots, r-1)$ 个子系统可表示为

$$y_i(k) = \frac{1}{\alpha(z)}\sum_{j=1}^{r} \beta_{i,j}(z) u_{j-1}(k) \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}&\alpha(z) := z^{-n}\det[zI - \underline{G}] =\\ &\quad 1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots + \alpha_n z^{-n}\\ &\beta_{i,j}(z) :=\\ &\quad\begin{cases} z^{-n}\boldsymbol{C}G_i\mathrm{adj}[zI - \underline{G}]\boldsymbol{F}_{r,j} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_{i,j}\alpha(z),\\ \qquad j = 1, 2, \cdots, i\\ z^{-n}\boldsymbol{C}G_i\mathrm{adj}[zI - \underline{G}]\boldsymbol{F}_{r,j} + D\alpha(z),\\ \qquad j = i+1\\ z^{-n}\boldsymbol{C}G_i\mathrm{adj}[zI - \underline{G}]\boldsymbol{F}_{r,j},\\ \qquad j = i+2, i+3, \cdots, r\end{cases} =\\ &\quad \beta_{i,j}^0 + \beta_{i,j}^1 z^{-1} + \beta_{i,j}^2 z^{-2} + \cdots + \beta_{i,j}^n z^{-n}\end{aligned}$$

且

$$\beta_{i,j}^0=\begin{cases}\boldsymbol{CF}_{ij}, & j=1,2,\cdots,i\\ D, & j=i+1\\ 0, & j=i+2,i+3,\cdots,r\end{cases}$$

$$\beta_{i,j}^n=0,\ j=1,2,\cdots,i$$

与非均匀采样数据系统的提升状态空间模型 (6) 相比较, 提升传递函数模型 (8) 能够自然满足提升系统的因果约束条件, 但是却包含更多的参数.

### 2.3 基于时变后移算子的传递函数模型

不失一般性, 以周期 $T$ 均匀采样的线性时不变系统 (1) 可以描述为一个 $n$ 阶差分方程,

$$\begin{aligned}y(k)=&-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)-\cdots-\\&a_ny(k-n)+b_0u(k)+b_1u(k-1)+\\&b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n)\end{aligned}$$

或等价的 $n$ 阶传递函数模型,

$$y(k)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}u(k)$$

它表明 $kT$ 时刻的采样输出 $y(k)$ 可以表示为 $n+1$ 个输入 $\{u(k),u(k-1),u(k-2),\cdots,u(k-n)\}$ 和 $n$ 个输出 $\{y(k-1),y(k-2),\cdots,y(k-n)\}$ 的线性组合.

同理, 当系统 (1) 以图 2 所示的非均匀方式采样时, 也可证明 $kT+t_i$ 时刻的采样输出 $y_i(k)$ 能够由 $n+1$ 个非均匀刷新的输入数据 $\{u_i(k),u_{i-1}(k),u_{i-2}(k),\cdots,u_{i-n}(k)\}$ 和 $n$ 个非均匀采样的输出数据 $\{y_{i-1}(k),y_{i-2}(k),\cdots,y_{i-n}(k)\}$ 线性表示, 即 $y_i(k)$ 可以表示为如下差分方程:

$$\begin{aligned}y_i(k)=&-a_{i,1}y_{i-1}(k)-a_{i,2}y_{i-2}(k)-\cdots-\\&a_{i,n}y_{i-n}(k)+b_{i,0}u_i(k)+b_{i,1}u_{i-1}(k)+\\&b_{i,2}u_{i-2}(k)+\cdots+b_{i,n}u_{i-n}(k)\end{aligned}\tag{9}$$

**定理 1.** 定义提升系统第 $i$ ($i=0,1,\cdots,r-1$) 个子系统的可观测矩阵为

$$\mathcal{O}_i:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_{i-n+1}\\ \boldsymbol{C}Q_{i-n+2}Q_{i-n+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+1}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n}\tag{10}$$

如果 $\mathrm{rank}[\mathcal{O}_i]=n$, 即 $\mathcal{O}_i$ 可逆, 则连续时间系统 (1) 在非均匀采样时刻 $kT+t_i$ ($i=0,1,\cdots,r-1$) 的输出可以表示为式 (9) 所示的差分方程形式.

**证明.** 设 $m$ 为大于等于 0 的任意正整数, 利用式 (2), 由式 (4) 可得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{i-mr}(k+m)=&Q_i\boldsymbol{x}_{i-1-mr}(k+m)+\\&\boldsymbol{H}_iu_{i-1-mr}(k+m)\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{x}_{i-mr}(k)=Q_i\boldsymbol{x}_{i-1-mr}(k)+\boldsymbol{H}_iu_{i-1-mr}(k)$$

令 $l=i-mr$, 上式可写为

$$\boldsymbol{x}_l(k)=Q_l\boldsymbol{x}_{l-1}(k)+\boldsymbol{H}_lu_{l-1}(k)\tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}Q_l&:=Q_{l+mr}=Q_i\\ \boldsymbol{H}_l&:=\boldsymbol{H}_{l+mr}=\boldsymbol{H}_i\end{aligned}$$

式 (11) 适用于所有 $l\le r$ 的情形. 对于确定的 $l$, 只要找到满足 $l+mr>0$ 的最小 $m$ 值, 就能够求得相应的 $Q_l$ 和 $\boldsymbol{H}_l$.

因此, 分别取 $l=i-n+1,\ i-n+2,\ \cdots,\ i-1,\ i$, 递推应用式 (11) 可得:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{i-n+1}(k)=Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)\\&\boldsymbol{x}_{i-n+2}(k)=Q_{i-n+2}Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\&\quad Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)\\&\qquad\vdots\\&\boldsymbol{x}_{i-1}(k)=Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\&\quad Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\\&\quad Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)+\cdots+\\&\quad Q_{i-1}\boldsymbol{H}_{i-2}u_{i-3}(k)+\boldsymbol{H}_{i-1}u_{i-2}(k)\\&\boldsymbol{x}_i(k)=Q_i\cdots Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\&\quad Q_i\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\\&\quad Q_i\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)+\cdots+\\&\quad Q_i\boldsymbol{H}_{i-1}u_{i-2}(k)+\boldsymbol{H}_iu_{i-1}(k)\end{aligned}$$

则 $kT+t_l$ ($l=i-n,\ i-n+1,\ i-n+2,\ \cdots,\ i-1,\ i$) 时刻系统的采样输出可以表示为

$$\begin{aligned}&y_{i-n}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+Du_{i-n}(k)\\&y_{i-n+1}(k)=\boldsymbol{C}Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\&\quad\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+Du_{i-n+1}(k)\\&y_{i-n+2}(k)=\boldsymbol{C}Q_{i-n+2}Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\&\quad\boldsymbol{C}Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\\&\quad\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)+Du_{i-n+2}(k)\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{i-1}(k) = &\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)+\cdots+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i-1}\boldsymbol{H}_{i-2}u_{i-3}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-1}u_{i-2}(k)+\\
&Du_{i-1}(k)\\
y_{i}(k) = &\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+1}\boldsymbol{x}_{i-n}(k)+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}u_{i-n}(k)+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}u_{i-n+1}(k)+\cdots+\\
&\boldsymbol{C}Q_{i}\boldsymbol{H}_{i-1}u_{i-2}(k)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i}u_{i-1}(k)+Du_{i}(k)
\end{aligned}
$$

将 $y_i(k)$, $y_{i-1}(k)$, $\cdots$, $y_{i-n}(k)$ 的表达式代入式 (9), 比较等号两边同项前的系数可得:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{i-n}(k):\ \ -a_{i,n}\boldsymbol{C}-a_{i,n-1}\boldsymbol{C}Q_{i-n+1}-\\
&\quad a_{i,n-2}\boldsymbol{C}Q_{i-n+2}Q_{i-n+1}-\cdots-\\
&\quad a_{i,1}\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+1}=\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+1}\\
&u_{i-n}(k):\ \ b_{i,n}-a_{i,n}D-a_{i,n-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+1}-\\
&\quad a_{i,n-2}\boldsymbol{C}Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}-\cdots-\\
&\quad a_{i,1}\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}=\\
&\quad \boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}\\
&u_{i-n+1}(k):\ \ b_{i,n-1}-a_{i,n-1}D-a_{i,n-2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+2}-\\
&\quad a_{i,n-3}\boldsymbol{C}Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}-\cdots-\\
&\quad a_{i,1}\boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}=\\
&\quad \boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&u_{i-1}(k): b_{i,1}-a_{i,1}D=\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i}\\
&u_{i}(k): b_{i,0}=D
\end{aligned}
$$

上述等式可以写为如下矩阵形式:

$$-\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\mathcal{O}_i=\boldsymbol{M}_i \tag{12}$$

$$\boldsymbol{b}_i-\Pi_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{\Gamma}_i \tag{13}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_i:=[a_{i,n},\ a_{i,n-1},\ a_{i,n-2},\ \cdots,\ a_{i,1}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n}\\
&\boldsymbol{b}_i:=[b_{i,n},\ b_{i,n-1},\ b_{i,n-2},\ \cdots,\ b_{i,1},\ b_{i,0}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+1}\\
&\boldsymbol{M}_i:=\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+1}\in\mathbf{R}^{1\times n}
\end{aligned}
$$

$$
\Pi_i:=\begin{bmatrix}
D & \boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+1} & \boldsymbol{C}Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1} & \cdots & \boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}\\
0 & D & \boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i-n+2} & \cdots & \boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}\\
0 & 0 & D & \cdots & \boldsymbol{C}Q_{i-1}\cdots Q_{i-n+4}\boldsymbol{H}_{i-n+3}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & D\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{(n+1)\times n}
$$

$$
\boldsymbol{\Gamma}_i:=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+2}\boldsymbol{H}_{i-n+1}\\
\boldsymbol{C}Q_{i}\cdots Q_{i-n+3}\boldsymbol{H}_{i-n+2}\\
\vdots\\
\boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_{i}\\
D
\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n+1}
$$

根据定理中的假设条件, 即 $\mathcal{O}_i$ 满秩, 则式 (12) 中的参数向量 $\boldsymbol{a}_i$ 有唯一解,

$$\boldsymbol{a}_i=-[\boldsymbol{M}_i\mathcal{O}_i{}^{-1}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

将式 (14) 代入式 (13), 可求得参数向量 $\boldsymbol{b}_i$ 的唯一解,

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{\Gamma}_i-\Pi_i[\boldsymbol{M}_i\mathcal{O}_i{}^{-1}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

式 (9) 中的各个参数有唯一解, 因此 $y_i(k)$ $(i=0,1,\cdots,r-1)$ 可以表示为式 (9) 所示的差分方程形式. □

与单位后移算子 $z^{-1}$ 和单位前移算子 $z$ 相对应, 分别定义时变后移算子 $\delta^{-1}$ 和时变前移算子 $\delta$ 为

$$s_{i-1}(k)=:\delta^{-1}s_i(k),\quad s_{i+1}(k)=:\delta s_i(k)$$

它们分别使得 $kT+t_i$ 时刻的采样数据 $s_i(k)$ 后移采样间隔 $\tau_i$ 和前移采样间隔 $\tau_{i+1}$.

利用时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的定义, 式 (9) 所示的差分方程形式可以表示为如下传递函数模型:

$$y_i(k)=\frac{B_i(\delta)}{A_i(\delta)}u_i(k) \tag{16}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&A_i(\delta):=1+a_{i,1}\delta^{-1}+a_{i,2}\delta^{-2}+\cdots+a_{i,n}\delta^{-n}\\
&B_i(\delta):=b_{i,0}+b_{i,1}\delta^{-1}+b_{i,2}\delta^{-2}+\cdots+b_{i,n}\delta^{-n}
\end{aligned}
$$

对于辨识而言, 得到系统的模型结构形式是非常重要的, 而模型参数可以利用输入输出数据, 通过辨识算法进行估计. 基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型 (16) 与提升传递函数模型 (8) 完全等价. 但是显然提出的新型传递函数模型 (16) 更加简洁, 它与传统单率系统的传递函数模型具有类似结构. 因此, 基于提出的新型传递函数模型, 传统单率系统

的辨识和控制方法能够直接推广到非均匀采样数据系统中. 另外, 与提升状态空间模型和提升传递函数模型相比, 用模型 (16) 来描述非均匀采样数据系统所需的参数数目大大减少 (如表 1 所示), 因此将极大程度降低相关辨识和控制算法的复杂度和计算量.

表 1 模型参数数目比较

Table 1 The parameter number comparison of different models

| 模型 | 参数数目 | $(n=2,\ r=10)$ |
|---|---|---|
| 提升状态空间模型 | $n^2+2nr+r^2$ | 144 |
| 提升传递函数模型 | $nr^2+n+r$ | 212 |
| 基于时变后移算子的传递函数模型 | $2nr+r$ | 50 |

## 3 仿真验证

设非均匀采样数据系统 (图 1) 中连续时间过程 $P$ 的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-0.083333 & -0.0083333\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\\ \qquad [1\ \ 0]^{\rm T}u(t)\\ y(t)=[0\ \ 0.0083333]\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{17}$$

取框架周期 $T=15\,\text{s}$, 非均匀采样次数 $r=5$, 非均匀采样间隔依次为 $\tau_1=2\,\text{s}$, $\tau_2=2.5\,\text{s}$, $\tau_3=3\,\text{s}$, $\tau_4=3.5\,\text{s}$, $\tau_5=4\,\text{s}$. 离散化后可得系统的提升状态空间模型 (6), 其中各矩阵分别计算为

$$\underline{G}=\begin{bmatrix}-0.072935 & -0.051541\\ 6.1849 & 0.44247\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}=\begin{bmatrix}-0.049101 & 0.24715 & 0.83288 & 1.8273 & 3.3267\\ 12.452 & 15.353 & 16.869 & 15.126 & 7.1029\end{bmatrix}$$

$$\underline{C}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.015267 & 0.0082022\\ 0.030401 & 0.0077189\\ 0.042910 & 0.0067897\\ 0.050554 & 0.0054089\end{bmatrix}$$

$$\underline{D}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.015735 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.049509 & 0.02422 & 0 & 0 & 0\\ 0.078629 & 0.07226 & 0.034349 & 0 & 0\\ 0.098000 & 0.10893 & 0.097963 & 0.046035 & 0\end{bmatrix}$$

上述提升状态空间模型可转换为等价的提升传递函数模型 (8), 其中各多项式如表 2 所示.

表 2 提升传递函数模型

Table 2 The lifted transfer function model

| $j$ | $\alpha(z)$ | $\beta_{0,j}$ |
|---|---|---|
| 1 | | $0.1038z^{-1}+0.005038z^{-2}$ |
| 2 | | $0.1279z^{-1}+0.02207z^{-2}$ |
| 3 | $1-0.3695z^{-1}+0.2865z^{-2}$ | $0.1406z^{-1}+0.05318z^{-2}$ |
| 4 | | $0.126z^{-1}+0.1034z^{-2}$ |
| 5 | | $0.05919z^{-1}+0.1758z^{-2}$ |
| $j$ | $\beta_{1,j}$ | $\beta_{2,j}(z)$ |
| 1 | $0.01573+0.09557z^{-1}$ | $0.04951+0.07633z^{-1}$ |
| 2 | $0.1297z^{-1}+0.007972z^{-2}$ | $0.02422+0.1171z^{-1}$ |
| 3 | $0.1511z^{-1}+0.03344z^{-2}$ | $0.1555z^{-1}+0.01162z^{-2}$ |
| 4 | $0.152z^{-1}+0.0775z^{-2}$ | $0.1723z^{-1}+0.04747z^{-2}$ |
| 5 | $0.109z^{-1}+0.145z^{-2}$ | $0.156z^{-1}+0.1069z^{-2}$ |
| $j$ | $\beta_{3,j}$ | $\beta_{4,j}(z)$ |
| 1 | $0.07863+0.05338z^{-1}$ | $0.098+0.02866^{-1}$ |
| 2 | $0.07226+0.08816z^{-1}$ | $0.1089+0.05529z^{-1}$ |
| 3 | $0.03435+0.1376z^{-1}$ | $0.09796+0.09715z^{-1}$ |
| 4 | $0.1812z^{-1}+0.01602z^{-2}$ | $0.04604+0.1572z^{-1}$ |
| 5 | $0.1911z^{-1}+0.06427z^{-2}$ | $0.2066z^{-1}+0.02117z^{-2}$ |

为了将非均匀采样数据系统描述为基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型 (16), 首先需要判定式 (10) 所定义的可观测矩阵 $\mathcal{O}_i$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$ 是否满秩. 根据定义, 5 个子系统的可观测矩阵分别计算为

$$\mathcal{O}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.024871 & 0.0079497\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.027722 & 0.0078401\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.015267 & 0.0082022\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.018644 & 0.0081315\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}Q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.0083333\\ 0.021845 & 0.0080471\end{bmatrix}$$

可见, 各个可观测矩阵均满秩, 由式 (14) 和 (15) 可以唯一确定参数向量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{b}_i$. 非均匀采样数据系统能够描述为基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型 (16), 其中各多项式如表 3 所示.

表 3 基于时变后移算子的传递函数模型

Table 3 The time-varying backward shift operator based transfer function model

| $i$ | $A_i(\delta)$ | $B_i(\delta)$ |
|---|---|---|
| 0 | $1-1.7269\delta^{-1}+0.83267\delta^{-2}$ | $0.059191\delta^{-1}+0.046547\delta^{-2}$ |
| 1 | $1-1.3497\delta^{-1}+0.3946\delta^{-2}$ | $0.015735\delta^{-1}+0.029157\delta^{-2}$ |
| 2 | $1-1.9913\delta^{-1}+1.0337\delta^{-2}$ | $0.02422\delta^{-1}+0.018176\delta^{-2}$ |
| 3 | $1-1.8905\delta^{-1}+0.95134\delta^{-2}$ | $0.034349\delta^{-1}+0.026472\delta^{-2}$ |
| 4 | $1-1.8047\delta^{-1}+0.88668\delta^{-2}$ | $0.046035\delta^{-1}+0.035974\delta^{-2}$ |

通过对比发现, 表 3 中基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型仅包含 20 个参数, 数目远远少于表 2 中提升传递函数模型所包含的 52 个参数. 而且对于单个子系统, 基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型的结构也更加简单, 不包含子子模型, 而提升传递函数模型却包含 5 个子子模型. 因此, 利用本文提出的基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型, 更容易实现非均匀采样数据系统的辨识和控制.

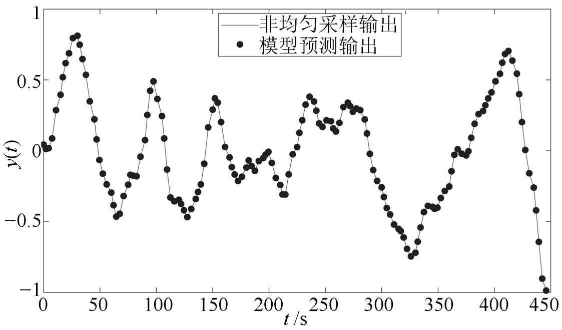


图 3 模型预测输出与非均匀采样输出

Fig. 3 The predicted output and the non-uniformly sampled output

将表 3 中基于时变后移算子 $\delta^{-1}$ 的传递函数模型用于非均匀采样数据系统的单步预测, 结果如图 3 所示, 其中实线表示实际的非均匀采样输出数据, 点表示模型预测输出. 图 3 中的对比结果表明模型预测输出与系统的实际输出完全重合, 从而验证了提出新模型的有效性.

## 4 结论

为了克服非均匀采样数据系统提升状态空间模型和提升传递函数模型的缺陷, 本文通过引入时变后移算子 $\delta^{-1}$, 提出了一种新型传递函数模型. 该模型的结构类似于传统单率系统的传递函数模型, 参数少且不包含子子模型, 因此更容易实现非均匀采样数据系统的辨识和控制.

## References


1 Albertos P, Crespo A. Real-time control of non-uniformly sampled systems. *Control Engineering Practice*, 1999, **7**(4): 445−458

2 Cuenca A, Salt J. RST controller design for a non-uniform multi-rate control system. *Journal of Process Control*, 2012, **22**(10): 1865−1877

3 Liu Qiang, Qin S J. Perspectives on big data modeling of process industries. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(2): 161−171
(刘强, 秦泗钊. 过程工业大数据建模研究展望. 自动化学报, 2016, **42**(2): 161−171)

4 Ding F, Qiu L, Chen T W. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems. *Automatica*, 2009, **45**(2): 324−332

5 Wang H W, Liu T. Recursive state-space model identification of non-uniformly sampled systems using singular value decomposition. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, 2014, **22**(11−12): 1268−1273

6 Qiu Ai-Bing, Ji Hong-Gang, Gu Ju-Ping. Optimal integrated design of time-varying fault estimation and accommodation for nonuniformly sampled data systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1493−1504
(邱爱兵, 吉虹钢, 顾菊平. 非均匀采样数据系统时变故障估计与调节最优集成设计. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1493−1504)

7 Du Da-Jun, Shang Li-Li, Qi Bo, Fei Min-Rui. Convergence analysis of an online recursive identification method with uncomplete communication constraints. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(8): 1502−1515
(杜大军, 商立立, 漆波, 费敏锐. 一种不完全信息下递推辨识方法及收敛性分析. 自动化学报, 2015, **41**(8): 1502−1515)

8 Ni B, Xiao D. Identification of non-uniformly sampled multirate systems with application to process data compression. *IET Control Theory & Applications*, 2010, **4**(6): 970−984

9 Guo Dong-Liang, Zhang Tie-Jun, Dai Xian-Hua. Methods of signal frequency, amplitude and phase measurement based on non-uniform sampling. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, **34**(4): 662−665
(郭东亮, 张铁军, 戴宪华. 基于非均匀采样的信号频率、幅值和相位检测. 系统工程与电子技术, 2012, **34**(4): 662−665)

10 Pillai A K M, Johansson H. Efficient recovery of sub-Nyquist sampled sparse multi-band signals using reconfigurable multi-channel analysis and modulated synthesis filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **63**(19): 5238−5249

11 Cuenca Á, Salt J, Albertos P. Implementation of algebraic controllers for non-conventional sampled-data systems. *Real-Time Systems*, 2007, **35**(1): 59−89

12 Khan S, Goodall R M, Dixon R. Non-uniform sampling strategies for digital control. *International Journal of Systems Science*, 2013, **44**(12): 2234−2254

13 Zhu Y C, Telkamp H, Wang J H, Fu Q L. System identification using slow and irregular output samples. *Journal of Process Control*, 2009, **19**(1): 58−67

14 Ding F, Liu G J, Liu X P. Parameter estimation with scarce measurements. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1646−1655

15 Raghavan H, Tangirala A K, Gopaluni R B, Shah S L. Identification of chemical processes with irregular output sampling. *Control Engineering Practice*, 2006, **14**(5): 467−480

16 Gopaluni R B. Nonlinear system identification under missing observations: the case of unknown model structure. *Journal of Process Control*, 2010, **20**(3): 314−324

17 Tulsyan A, Huang B, Gopaluni R B, Fraser F J. On simultaneous on-line state and parameter estimation in non-linear state-space models. *Journal of Process Control*, 2013, **23**(4): 516−526

18 Ni Bo-Yi, Xiao De-Yun. A recursive identification method for non-uniformly sampled systems. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(12): 1520−1527
(倪博溢, 萧德云. 非均匀采样系统的一种递推辨识方法. 自动化学报, 2009, **35**(12): 1520−1527)

19 Li Da-Hai, Li Tian-Shi. Modeling and control of non-uniformly sampled systems using support vector regression. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2011, **45**(3): 65−69
(李大海, 李天石. 非均匀采样系统的支持向量回归建模与控制. 西安交通大学学报, 2011, **45**(3): 65−69)

20 Ding Feng, Chen Tong-Wen, Xiao De-Yun. Identification of non-uniformly periodically sampled multirate systems. *Acta Electronica Sinica*, 2004, **32**(9): 1414−1420
(丁锋, 陈通文, 萧德云. 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法. 电子学报, 2004, **32**(9): 1414−1420)

21 Wang Hong-Wei, Sun Shuang. Subspace-based method for identification of non-uniformly multirate sampling systems. *Journal of Dalian University of Technology*, 2014, **54**(5): 575−580
(王宏伟, 孙爽. 基于子空间方法的非均匀多采样率系统辨识. 大连理工大学学报, 2014, **54**(5): 575−580)

22 Wang Hong-Wei, Wang Jia, Xia Hao. Identification of non-uniform period refresh and sampling system via subspace method. *Control and Decision*, 2014, **29**(5): 901−906
(王宏伟, 王佳, 夏浩. 基于子空间方法的非均匀周期刷新和采样系统辨识. 控制与决策, 2014, **29**(5): 901−906)

23 Ding J, Lin J X. Modified subspace identification for periodically non-uniformly sampled systems by using the lifting technique. *Circuits Systems & Signal Processing*, 2014, **33**(5): 1439−1449

24 Wang Tao, Lin Wei-Xing, Bao Jian-Meng. Method of non-uniformly sampled-data system identification based on co-operative PSO. *Computer Engineering and Applications*, 2013, **49**(24): 32−37
(王涛, 林卫星, 包建孟. 基于协同 PSO 算法的非均匀采样系统辨识. 计算机工程与应用, 2013, **49**(24): 32−37)

25 Xie L, Liu Y J, Yang H Z, Ding F. Modelling and identification for non-uniformly periodically sampled-data systems. *IET Control Theory & Applications*, 2010, **4**(5): 784−794

26 Ding F, Liu G, Liu X P. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1976−1981

27 Liu Y J, Ding F, Shi Y. Least squares estimation for a class of non-uniformly sampled systems based on the hierarchical identification principle. *Circuits Systems & Signal Processing*, 2012, **31**(6): 1985−2000

28 Jing S X, Pan T H, Li Z M. Recursive Bayesian algorithm with covariance resetting for identification of Box-Jenkins systems with non-uniformly sampled input data. *Circuits Systems & Signal Processing*, 2016, **35**(3): 919−932

29 Zhou L C, Li X L, Pan F. Gradient-based iterative identification for Wiener nonlinear systems with non-uniform sampling. *Nonlinear Dynamics*, 2014, **76**(1): 627−634

30 Liu Ran-Ran, Pan Tian-Hong, Li Zheng-Ming. Hierarchical stochastic gradient identification for Hammerstein-Wiener systems with non-uniformly sampling. *Control and Decision*, 2015, **30**(8): 1491−1496
(刘冉冉, 潘天红, 李正明. 非均匀 Hammerstein-Wiener 系统的递阶随机梯度辨识算法. 控制与决策, 2015, **30**(8): 1491−1496)

31 Xie L, Yang H Z, Ding F, Huang B. Novel model of non-uniformly sampled-data systems based on a time-varying backward shift operator. *Journal of Process Control*, 2016, **43**: 38−52

32 Xie L, Yang H Z, Ding F. Identification of non-uniformly sampled-data systems with asynchronous input and output data. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(4): 1974−1991



**谢　莉**　江南大学物联网工程学院讲师. 2013 年获得江南大学控制理论与控制工程专业博士学位. 主要研究方向为多率系统辨识. 本文通信作者.
E-mail: xieli@jiangnan.edu.cn
(**XIE Li**　Lecturer at the School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University. She received her Ph. D. degree in control theory and control engineering from Jiangnan University in 2013. Her research interest covers identification of multirate systems. Corresponding author of this paper.)



**杨慧中**　江南大学物联网工程学院教授. 2001 年获得华东理工大学博士学位. 主要研究方向为复杂工业过程的建模与优化. E-mail: yhz@jiangnan.edu.cn
(**YANG Hui-Zhong**　Professor at the School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University. She received her Ph. D. degree from East China University of Science and Technology in 2001. Her research interest covers modeling and optimization of complex industrial process.)



**丁　锋**　江南大学物联网工程学院教授. 1994 年获得清华大学博士学位. 主要研究方向为系统辨识与过程控制.
E-mail: fding@jiangnan.edu.cn
(**DING Feng**　Professor at the School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University. He received his Ph. D. degree from Tsinghua University in 1994. His research interest covers system identification and process control.)