

# 两个异构复杂网络的广义同步与参数识别

韦相<sup>1,2</sup> 赵军产<sup>3,4</sup> 胡春华<sup>4</sup>

**摘要** 本文实现复杂网络未知系统参数的识别。针对系统未知参数，提出基于广义同步 (Generalized synchronization, GS) 的参数识别方法。该方法基于 Babalat 引理，利用 Lyapunov 稳定性理论，构造另一个具有不同拓扑结构和动力学方程的网络，并设计有效的自适应控制器，实现具有耦合时滞两个不同网络的广义同步，同时准确识别未知参数。与基于完全同步的参数识别方法相比，该方法能够构造低维的系统去识别高维系统的参数。数值实验验证了算法的有效性。

**关键词** 复杂网络，广义同步，参数识别，自适应控制

**引用格式** 韦相, 赵军产, 胡春华. 两个异构复杂网络的广义同步与参数识别. 自动化学报, 2017, 43(4): 595–603

**DOI** 10.16383/j.aas.2017.c160449

## Generalized Synchronization and System Parameters Identification Between Two Different Complex Networks

WEI Xiang<sup>1,2</sup> ZHAO Jun-Chan<sup>3,4</sup> HU Chun-Hua<sup>4</sup>

**Abstract** This paper proposes a method to identify system unknown parameters of complex network. Aimed at system unknown parameters, a method using generalized synchronization (GS) is proposed. This method bases on Barbalat lemma and Lyapunov stability scheme and constructs an auxiliary complex network with different topologies and dynamics. Some adaptive controllers are also designed to identify system parameters upon GS with delay coupling. Compared to the method based on complete outer synchronization, the proposed method can construct simple and low dimensional dynamics to identify the parameters of high dimensional dynamics. Numerical simulations are provided to show the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Complex networks, generalized synchronization (GS), parameters identification, adaptive controller

**Citation** Wei Xiang, Zhao Jun-Chan, Hu Chun-Hua. Generalized synchronization and system parameters identification between two different complex networks. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(4): 595–603

复杂网络在自然界中普遍存在、包括因特网、社会网络、生态网络、食物链网络等。自从 Watts 等<sup>[1]</sup> 提出小世界模型和 Barabási 等<sup>[2]</sup> 提出无标度网络

收稿日期 2016-06-03 录用日期 2016-08-23

Manuscript received June 3, 2016; accepted August 23, 2016  
国家自然科学基金 (41301442, 61174028, 61273232), 新世纪优秀人才基金 (NCET-13-0785), 湖南省教育厅优秀青年基金项目 (16B141) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (41301442, 61174028, 61273232), The Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-13-0785), and The Excellent Youth Foundation of Hunan Provincial Department of Education (16B141)

本文责任编辑 吕金虎

Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu

1. 红河学院工学院 红河 661100 2. 武汉大学数学与统计学院 武汉 430072 3. 湖南商学院数学与统计学院 长沙 410205 4. 湖南商学院移动商务智能湖南省重点实验室 长沙 410205

1. Department of Engineering, Honghe University, Honghe 661100 2. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072 3. School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Commerce, Changsha 410205 4. Key Laboratory of Hunan Province for Mobile Business Intelligence, Hunan University of Commerce, Changsha 410205

模型后，有关复杂网络的结构、同步以及应用成为各个领域的研究热点。

复杂网络的同步是指网络中各个相互作用节点的一种一致行为，最近 20 年，它在生物、化学、金融、生态学、社会学等领域获得广泛的研究和应用<sup>[3–8]</sup>。陈翼等<sup>[9]</sup> 针对银行系统结构网络的研究，从具有同质性的随机网络，扩展到具有异质性的无标度网络，并从仿真中获得很多启示。

然而，很多复杂网络的研究，都是假设节点动力系统参数是已知的。当系统参数未知时，无法开展对复杂网络的同步或者控制等方面的研究。因此，复杂网络的系统参数识别具有重要的理论和现实意义，得到了广泛关注。系统参数或者拓扑结构的识别方法主要有基于压缩感知的方法和基于同步的方法等。基于压缩感知的方法是使用高阶幂级数展开序列来表示系统的参数和拓扑结构，使未知参数在所有系

数中是稀疏的, 再使用压缩感知技术计算出非零系数, 而非零系数就是未知的参数和拓扑结构<sup>[10-11]</sup>. 基于同步的方法是在驱动—响应网络模型的基础上, 设驱动网络的动力学方程的参数是未知的, 通过构造一个响应网络并施加自适应控制器, 使驱动网络和响应网络达到同步状态, 同时, 识别了未知参数或拓扑结构<sup>[12-16]</sup>. Wu<sup>[12]</sup> 提出基于完全同步的识别方法, 构造自适应控制技术, 准确识别出拓扑结构. Zhou 等<sup>[13]</sup> 采用自适应反馈控制方法, 能够识别包含不同动力学节点的加权网络. Liu 等<sup>[14]</sup> 提出基于完全同步同时识别参数和拓扑结构的方法. Zhao 等<sup>[15]</sup> 研究了具有时变节点动力学加权网络的拓扑识别问题, Mei 等<sup>[16]</sup> 提出基于有限时间同步的识别方法, 实现有限时间的拓扑结构识别. 以上文献都是使用基于完全同步的识别方法.

基于完全同步的方法要求驱动网络和响应网络的节点动力学是相同的. 然而, 在现实世界中, 不同的网络节点具有不同的动力学. 例如生态网络的捕食者和被捕食者模型中, 捕食者之间组成一个网络, 被捕食者之间组成另一个网络, 捕食者和被捕食者的动力学行为是不同的, 它们之间要达到一种动态的平衡. 这类同步被称为广义同步<sup>[17-19]</sup>, 它代表着另一层次的一致性. 与基于完全同步的识别方法相比, 使用基于广义同步的识别方法, 可以任意构造一个简单的, 维数更低的响应网络从而达到识别的目的, 使得这种方法更简单更实用. Zhang 等<sup>[20]</sup> 研究基于广义同步的拓扑识别方法, 但该文献未考虑系统参数识别和耦合时滞的影响. 而在复杂网络中信息传输速度是有限的, 因此, 时滞是不可避免的. 时滞广泛存在于现实世界, 如通信网络、基因调控网络、电力网络等. 因此, 考虑到时滞具有现实意义, 很多学者在研究复杂网络的同步和控制中都考虑了时滞<sup>[21-24]</sup>. 罗毅平等<sup>[25]</sup> 针对节点扩张的时滞复杂网络系统, 结合自适应控制方法和计脉冲控制器, 实现了同步保性能控制.

基于上述的讨论, 本文针对具有系统未知参数的复杂网络, 把它作为驱动网络, 构造另一个具有不同拓扑结构和动力学方程的响应网络, 实现具有耦合时滞两个网络的广义同步, 同时准确识别未知参数. 基于 Babalat 引理, 并利用 Lyapunov 稳定性方法, 设计有效的自适应控制器, 同时实现异构网络的广义同步和参数识别. 因广义同步是指驱动网络的某个节点和相应网络的对应节点满足一定的函数关系, 因此, 它包含了完全同步和投影同步, 因而本文

的模型和方法更具有普遍意义. 本文首先设计了两个网络的关系模型; 其次, 设计相应的控制器并实现基于广义同步的参数识别; 最后, 用两个数值仿真验证算法的有效性.

## 1 驱动和响应网络模型

考虑的复杂网络模型包含驱动网络和响应网络, 且驱动网络节点动力学的参数是未知的, 待识别的. 每个网络分别由  $N$  个节点构成, 网络内的节点动力学方程相同, 但不同网络的节点动力学方程不同, 且拓扑结构不同, 如图 1 所示, 上层为驱动网络, 下层为响应网络.

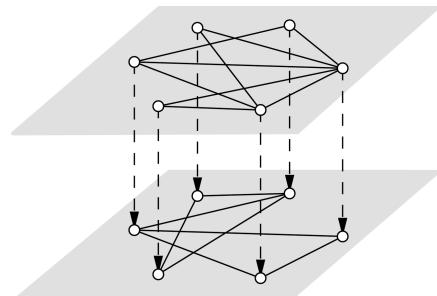


图 1 驱动和响应网络模型 (虚线表示网络之间的连边)

Fig. 1 Model of drive network and response network  
(dashed links as interlayer links between networks)

具体模型如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + w_1 \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 \mathbf{x}_j(t - \tau), \\ i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) + w_2 \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \mathbf{y}_j(t - \tau) + \mathbf{u}_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})^T \in \mathbf{R}^m$  分别是驱动网络和响应网络的动力学状态变量,  $\tau$  表示耦合时滞,  $\mathbf{u}_i(t)$  表示响应网络节点  $i$  的控制器.  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  表示驱动网络的节点动力学, 且驱动网络节点动力学参数是未知的. 为了区分驱动系统的未知参数, 把驱动系统分成无未知参数部分和有未知参数部分, 则  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) = \bar{\mathbf{f}}(x_i(t)) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t))\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^h$  表示系统未知参数向量,  $h$  表示未知参数的个数.  $\mathbf{g} : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  表示响应网络的节点动力学.  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  分别表示驱动网络和响应网络的内耦合矩阵.  $w_1$

和  $w_2$  分别表示驱动网络和响应网络的耦合强度.  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{N \times N}$  和  $\mathbf{D} = (d_{ij})_{N \times N}$  分别是驱动网络和响应网络的外耦合矩阵,  $c_{ij}$  和  $d_{ij}$  定义如下: 如果节点  $j$  到节点  $i$  ( $i \neq j$ ) 有连接, 则  $c_{ij} > 0$ ,  $d_{ij} > 0$ ; 否则,  $c_{ij} = 0$ ,  $d_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}$ ,  $d_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N d_{ij}$ .

驱动网络(1) 和响应网络(2) 实现广义同步本文这样描述<sup>[21]</sup>: 对驱动网络节点  $i$  进行映射, 连续可微的向量映射为  $\Phi_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 如果存在控制器  $\mathbf{u}_i(t)$ , 使得映射结果  $\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))$  与响应网络的对应节点误差趋于 0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i(t) - \Phi_i(\mathbf{x}_i(t))\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

那么驱动网络(1) 和响应网络(2) 实现广义同步. 向量  $\mathbf{x}$  的范数  $\|\cdot\|$  定义为  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^\top \mathbf{x})^{1/2}$ .

**假设 1.** 对任意的  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ , 存在正常量  $L$ , 满足:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\| \leq L \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \quad (4)$$

**假设 2.** 对任意给定  $i = 1, 2, \dots, N$ , 函数组  $\{\mathbf{F}^{(j)}(\mathbf{x}_i)\}_{j=1}^m$  在同步流形  $\{\Phi_i(\mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{y}_i(t)\}_{i=1}^N$  上线性无关.

## 2 自适应控制方法

首先定义广义同步误差如下:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i(t) - \Phi_i(\mathbf{x}_i(t)) \quad (5)$$

为了实现广义同步和参数识别, 需要设计有效的控制器和更新规则. 本文设计如下的控制器并给出广义同步和参数识别的证明.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{J}_{\Phi_i} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{J}_{\Phi_i} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \\ &\quad \mathbf{J}_{\Phi_i} w_1 \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 \mathbf{x}_j(t - \tau) - \mathbf{g}(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) - \\ &\quad w_2 \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \phi_j(\mathbf{x}_j(t - \tau)) - k_i \mathbf{e}_i(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = - \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^\top(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{J}_{\Phi_i}^\top(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) \quad (7)$$

$$\dot{k}_i = \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{J}_{\Phi_i}$  是映射  $\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))$  的雅可比矩阵.  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}^h$  是未知参数向量  $\boldsymbol{\alpha}$  的估计,  $k_i$  是反馈控制参数, 且

是不断增大的, 当网络达到同步之后, 因为同步误差为零, 这时  $k_i$  将达到恒定的值, 不再增加.

使用  $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \Phi_i(\mathbf{x}_i(t))$ , 设参数误差向量  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha}$ , 获得以下的同步误差动态方程:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \dot{\mathbf{y}}_i(t) - \mathbf{J}_{\Phi_i} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \\ &\quad \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) + w_2 \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau) + \\ &\quad \mathbf{u}_i(t) - \mathbf{J}_{\Phi_i} [\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t)) + \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \\ &\quad w_1 \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 \mathbf{x}_j(t - \tau)] = \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) - \\ &\quad \mathbf{g}(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) + w_2 \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \mathbf{e}_j(t - \tau) + \\ &\quad \mathbf{J}_{\Phi_i} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t)) \tilde{\boldsymbol{\alpha}} - k_i \mathbf{e}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

**定理 1.** 当假设 1 和假设 2 成立时, 在控制器(6) 和更新规则(7) 和(8) 的作用下, 驱动网络(1) 和响应网络(2) 同时达到广义同步和参数识别.

**证明.** 考虑如下的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) \mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^h \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t \mathbf{e}_i^\top(\theta) \mathbf{e}_i(\theta) d\theta \end{aligned}$$

对  $V(t)$  沿着误差系统(5) 的轨迹求导, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) \dot{\mathbf{e}}_i(t) + \sum_{i=1}^h \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^\top \dot{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i + \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k}) \dot{k}_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) \mathbf{e}_i(t) - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t - \tau) \mathbf{e}_i(t - \tau) \right) = \\ &\quad \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) [\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{g}(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) - k_i \mathbf{e}_i(t)] + \\ &\quad w_2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) d_{ij} \Gamma_2 \mathbf{e}_j(t - \tau) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k}) \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t) \mathbf{e}_i(t) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top(t - \tau) \mathbf{e}_i(t - \tau) \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{A} \mathbf{e}_j(t - \tau) &\leq \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i(t) + \\ &\quad \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^T(t - \tau) \mathbf{e}_i(t - \tau) \end{aligned} \quad (9)$$

$\mathbf{A} = \mathbf{D} \otimes \Gamma_2$ , 设  $\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}_1(t)^T, \mathbf{e}_2(t)^T, \dots, \mathbf{e}_N(t)^T)^T \in \mathbf{R}^{n \times N}$ , 由假设 1 得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (L - k + \frac{1}{2}) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{e}(t) \leq \\ &\quad - \left( k - L - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \right) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_{\max}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)$  表示矩阵  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  的最大特征值.

当取  $k = 1 + L + 1/2 + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)/2$  时,  $\dot{V}(t) \leq -\mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)$ , 所以,  $\dot{V}(t)$  是半负定的. 同时,  $V(0)$  有界, 因此  $V(t)$  有界, 根据 Barbalat 引理可知,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

因此, 驱动网络 (1) 和响应网 (2) 达到广义同步, 同时因为参数向量误差  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \rightarrow 0$ , 即参数估计  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  有效地逼近实际的参数向量  $\boldsymbol{\alpha}$ , 实现了未知参数的识别.  $\square$

**推论 1.** 两个网络都没有耦合时滞时, 设计如下的控制器可同时达到广义同步和参数识别.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= J_{\Phi_i} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t)) + J_{\Phi_i} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \\ &\quad J_{\Phi_i} \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma_1 \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{g}(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) - \\ &\quad \sum_{j=1}^N d_{ij} \Gamma_2 \boldsymbol{\phi}_j(\mathbf{x}_j(t)) - k_i(t) \mathbf{e}_i(t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = - \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^T(\mathbf{x}_i(t)) J_{\Phi_i}^T(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) \quad (12)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 \quad (13)$$

**推论 2.** 网络没有耦合时滞时, 且外部耦合矩阵都相同, 设计如下的控制器可同时实现网络的广义同步和参数识别.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= J_{\Phi_i} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i(t)) + J_{\Phi_i} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_i(t)) \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \\ &\quad \mathbf{g}(\Phi_i(\mathbf{x}_i(t))) - k_i \mathbf{e}_i(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = - \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{F}}_i^T(\mathbf{x}_i(t)) J_{\Phi_i}^T(\mathbf{x}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) \quad (15)$$

$$\dot{k}_i(t) = \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 \quad (16)$$

对于推论 1 和推论 2, 可利用如下的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^h \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \boldsymbol{\alpha}_i + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2 \end{aligned} \quad (17)$$

证明可同时达到广义同步和参数识别.

### 3 数值仿真

驱动网络的节点是超混沌 Lü 系统, 节点动力学方程如下:

$$f(x_i) = \begin{pmatrix} \hat{a}(x_{i2} - x_{i1}) + x_{i4} \\ -x_{i1}x_{i3} + \hat{c}x_{i2} \\ x_{i1}x_{i2} - \hat{b}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i3} + \hat{d}x_{i4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i4} \\ -x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \\ x_{i1}x_{i3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{i2} & 0 \\ 0 & -x_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{i4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix}$$

把动力系统方程写成无未知参数和有未知参数两部分, 参数向量  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})^T$  是未知的. 参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的真值为  $a = 36, b = 3, c = 20, d = -0.8$ . 响应网络的节点是蔡氏电路, 节点动力学方程如下:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} \varsigma(-x_{i1} + x_{i2} - l(x_{i1})) \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} \\ -\varrho x_{i3} \end{pmatrix}$$

其中,  $l(x_{i1}) = bx_{i1} + 0.5(a-b)(|x_{i1}+1|-|x_{i1}-1|)$ , 当  $\varsigma = 10, \varrho = 18, a = -4/3$ , 且  $b = -3/4$ , 蔡氏电路进入混沌状态.

**说明 1.** 对任意的状态向量  $\mathbf{x}_i$ , 因为混沌吸引子是有界的<sup>[26]</sup>, 所以必存在正的常数  $M$  满足  $\|\mathbf{x}_{ik}\| \leq M, k = 1, 2, 3$ . 同时, 蔡氏电路是线性系统, 所以它满足假设 1 成立的条件.

**说明 2.** 当驱动网络的耦合强度较小, 使得驱动网络不达到内同步时<sup>[27]</sup>, 函数组  $\{\mathbf{F}^{(j)}(\mathbf{x}_i)\}_{j=1}^m$  在同步流形  $\{\Phi_i(\mathbf{x}_i(t)) = \mathbf{y}_i(t)\}_{i=1}^N$  上线性无关的条件是容易满足的, 达到假设 2 成立的条件.

驱动网络和响应网络各有 5 个节点。驱动网络的耦合矩阵  $C$  为

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

响应网络的耦合矩阵  $D$  为

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

定义的广义映射为  $\Phi_i(\mathbf{x}_i) = (2x_{i1}, x_{i2} + x_{i3}, x_{i4})^T$ , 因此, 得到雅可比矩阵

$$\mathbf{J}_{\Phi_i}(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

仿真中, 耦合时滞  $\tau = 0.2$ ,  $\Gamma_1 = I_4$ ,  $\Gamma_2 = I_3$ . 耦合强度  $w_1 = 0.5$ ,  $w_2 = 1$ . 驱动网络节点的初始状态为  $(x_{i1}(t), x_{i2}(t), x_{i3}(t), x_{i4}(t)) = (0.5i + 1, 0.5i + 3, 0.5i + 5, 0.5i + 7)$ , 响应网络的初始状态为  $(y_{i1}(t), y_{i2}(t), y_{i3}(t)) = (1 - \sin(i), 2 - 0.2\cos(i), -0.1i)$ , 初始的未知参数  $\hat{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  和反馈控制参数  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  是  $[0, 1]$  中的随机数. 图 2~图 4 表示没有耦合时滞的演化效果, 图 2 展示算法得到的参数估计值为  $\hat{\alpha} = (36, 3, 20, -0.8)^T$ . 图 5~图 7 表示存在耦合时滞的演化效果, 图 5 展示算法得到的参数估计值  $\hat{\alpha} = (36.0001, 3, 20.0001, -0.8)^T$ , 与实际的参数值  $\alpha = (36, 3, 20, -0.8)^T$  相比, 误差非常小. 如总体误差图 4 和图 7 所示, 经过一定的时间演化后, 两个网络实现了广义同步, 并准确地实现了参数识别. 图 3 和图 6 表示反馈控制参数  $k_i$  随时间的演化过程, 当两个网络实现同步后, 因为同步误差为 0, 因而  $k_i$  达到恒定值.

驱动网络和响应网络都是节点数为 200 的无标度网络, 使用无标度网络做了仿真实验, 定义的

广义映射和例 1 相同, 仿真中, 耦合时滞  $\tau = 0.2$ ,  $\Gamma_1 = I_4$ ,  $\Gamma_2 = I_3$ . 耦合强度  $w_1 = 0.2$ ,  $w_2 = 1$ .

驱动网络节点的初始状态和响应网络的初始状态与例 1 相同, 初始的未知参数  $\hat{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  和反馈控制参数  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  是  $[0, 1]$  中的随机数. 图 8~图 10 表示没有耦合时滞的演化效果, 图 8 展示算法得到的参数估计值为  $\hat{\alpha} = (36, 3, 20, -0.8)^T$ , 图 11~图 13 表示存在耦合时滞的演化效果, 图 11 展示算法得到的参数估计值为  $\hat{\alpha} = (36.0001, 3, 20, -0.8)^T$ , 与实际的参数值  $\alpha = (36, 3, 20, -0.8)^T$  相比, 误差非常小. 如总体误差图 10 和图 13 所示, 经过一定的时间演化后, 两个网络实现了广义同步, 并实现了参数识别. 图 9 和图 12 表示反馈控制参数  $k_i$  随时间的演化过程, 当两个网络实现同步后, 因为同步误差为 0, 因而  $k_i$  达到恒定值.

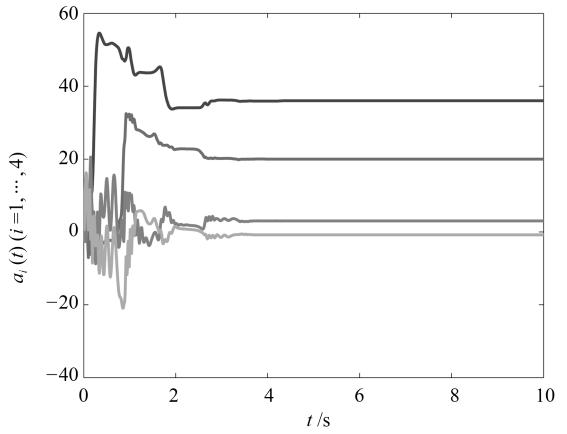


图 2 参数识别

Fig. 2 Parameters identification

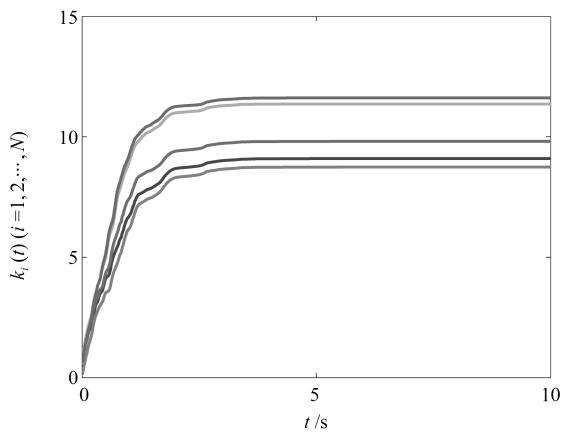


图 3 反馈参数时间演化

Fig. 3 Feedback parameters time evolution

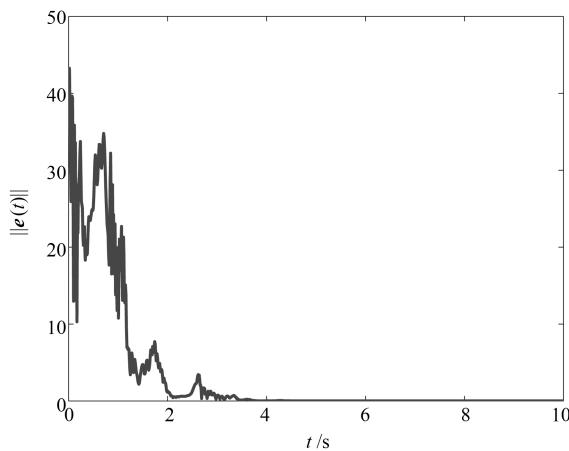


图4 广义同步总误差

Fig. 4 Total error of GS

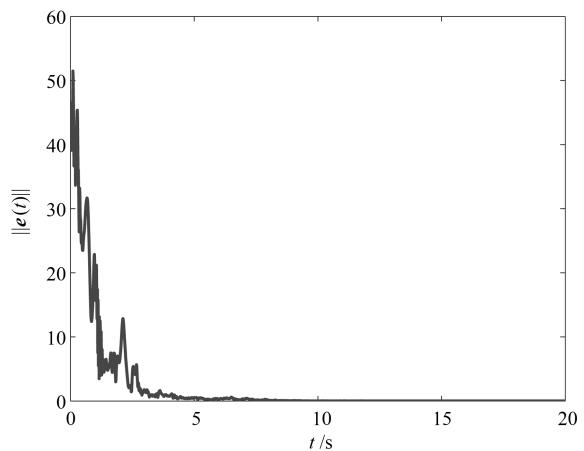


图7 植合时滞的广义同步总误差

Fig. 7 Total error of GS with delay coupling

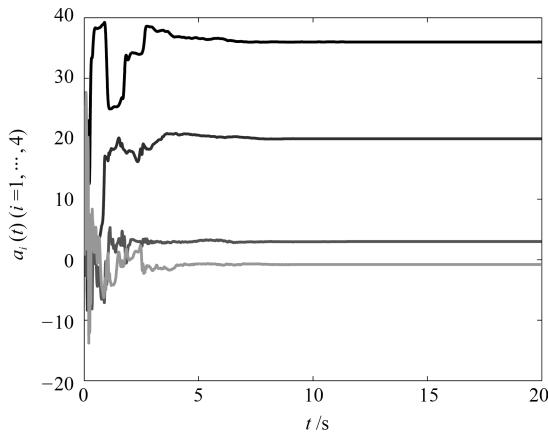


图5 植合时滞的参数识别

Fig. 5 Parameters identification with delay coupling

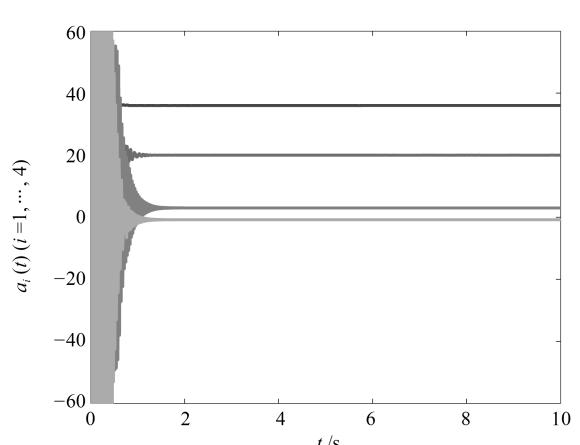


图8 参数识别

Fig. 8 Parameters identification

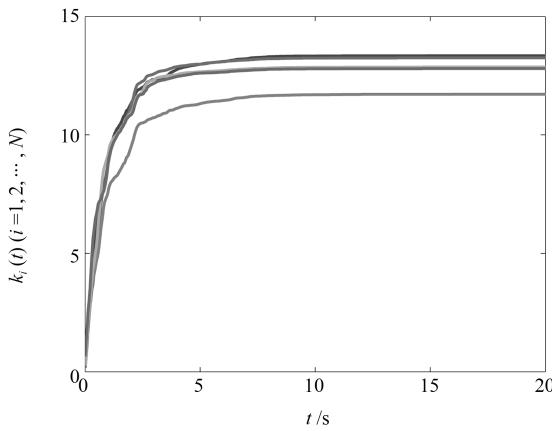


图6 植合时滞的反馈参数时间演化

Fig. 6 Feedback parameters time evolution with delay coupling

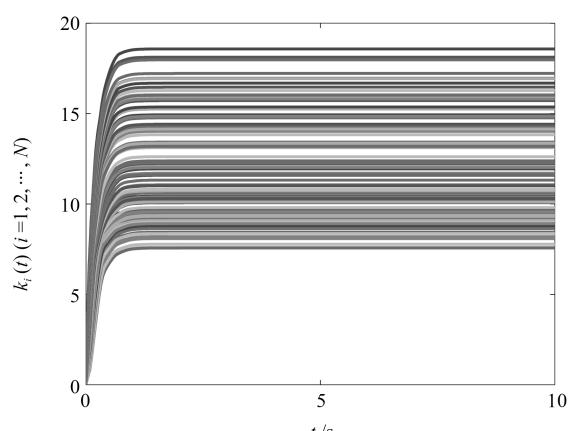


图9 反馈参数时间演化

Fig. 9 Feedback parameters time evolution

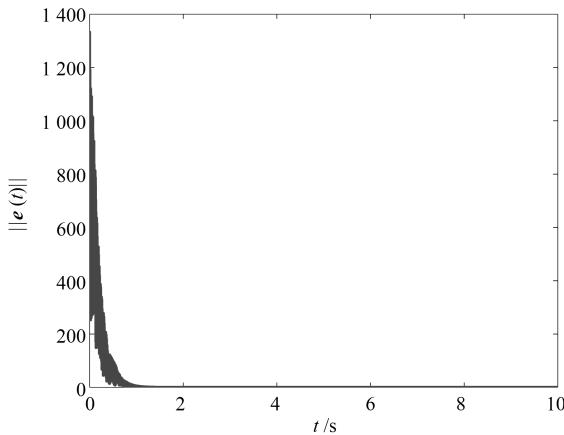


图 10 广义同步误差

Fig. 10 Total error of GS

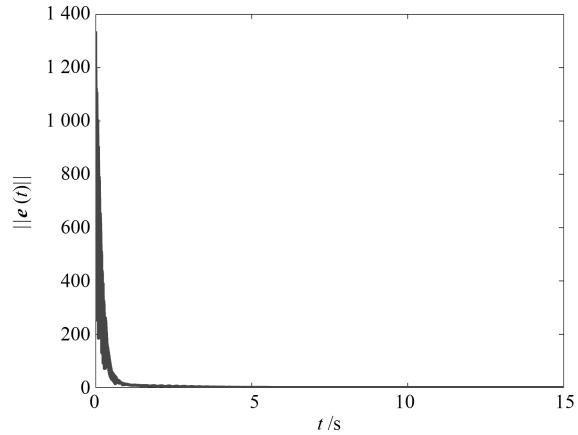


图 13 桥接延迟的广义同步总误差

Fig. 13 Total error of GS with delay coupling

#### 4 结论

针对具有系统未知参数的复杂网络, 通过构造另一个具有不同拓扑结构和动力学方程的网络, 从而实现具有耦合时滞两个不同复杂网络的广义同步, 同时准确识别未知参数。仿真结果显示, 通过设计有效的自适应控制器, 可以同时实现两个网络的广义同步和参数识别。如何设计更简单的控制器以及基于广义同步并具有随机扰动的拓扑结构识别问题及其应用, 有待后续研究。

#### 致谢

感谢武汉大学陆君安教授的悉心指导!

#### References

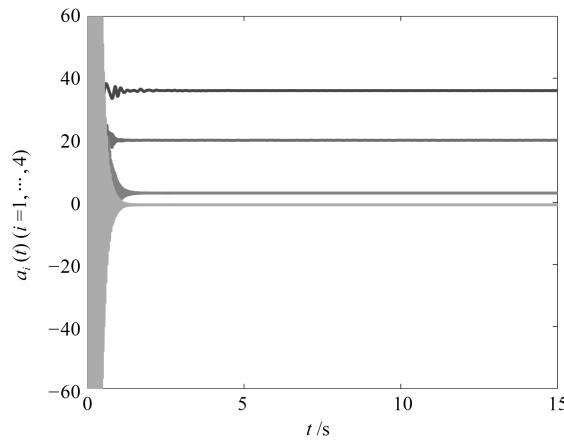


图 11 桥接延迟的参数识别

Fig. 11 Parameters identification with delay coupling

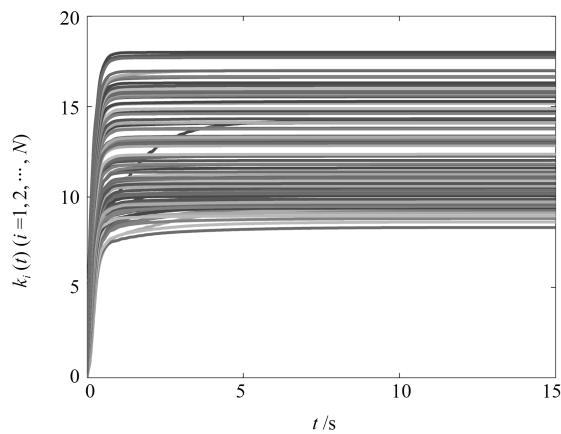


图 12 桥接时滞的反馈参数时间演化

Fig. 12 Feedback parameters time evolution with delay coupling

- 1 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, **393**(6684): 440–442
- 2 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, **286**(5439): 509–512
- 3 Wang X F, Chen G R. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2002, **12**(1): 187–192
- 4 Nishikawa T, Motter A E, Lai Y C, Hoppensteadt F C. Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize? *Physical Review Letters*, 2003, **91**(1): 014101
- 5 Motter A E, Zhou C S, Kurths J. Enhancing complex-network synchronization. *Europhysics Letters*, 2005, **69**(3): 334–340
- 6 Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C S. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 2008, **469**(3): 93–153

- 7 Deng Li-Wei, Song Shen-Min. Synchronization of fractional order hyperchaotic systems based on output feedback sliding mode control. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2420–2427  
(邓立为, 宋申民. 基于输出反馈滑模控制的分数阶超混沌系统同步. 自动化学报, 2014, **40**(11): 2420–2427)
- 8 Du Hong-Yue, Sun Wan-Shuang, Hu Ge, Qi Li-Hua. Function projective synchronization of two fractional-order complex dynamical networks. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(2): 226–234  
(杜洪越, 孙婉双, 胡革, 齐丽华. 两个分数阶复杂动态网络的函数投影同步. 自动化学报, 2016, **42**(2): 226–234)
- 9 Chen Ji, Chen Dian-Fa, Song Min. Heterogeneous bank system stability research under complex networks structure. *Journal of Systems Engineering*, 2014, **29**(2): 171–181  
(陈冀, 陈典发, 宋敏. 复杂网络结构下异质性银行系统稳定性研究. 系统工程学报, 2014, **29**(2): 171–181)
- 10 Wang W X, Yang R, Lai Y C, Kovanis V, Grebogi C. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *Physical Review Letters*, 2011, **106**(15): 154101
- 11 Su R Q, Ni X, Wang W X, Lai Y C. Forecasting synchronizability of complex networks from data. *Physical Review E*, 2012, **85**(5): 056220
- 12 Wu X Q. Synchronization-based topology identification of weighted general complex dynamical networks with time-varying coupling delay. *Physica A*, 2008, **387**(4): 997–1008
- 13 Zhou J, Lu J A. Topology identification of weighted complex dynamical networks. *Physica A*, 2007, **386**(1): 481–491
- 14 Liu H, Lu J A, Lü J H, Hill D J. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1799–1807
- 15 Zhao J C, Li Q, Lu J A, Jiang Z P. Topology identification of complex dynamical networks. *Chaos*, 2010, **20**(2): 023119
- 16 Mei J, Jiang M H, Wang J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2013, **18**(4): 999–1015
- 17 Wu X Q, Zheng W X, Zhou J. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks. *Chaos*, 2009, **19**(1): 013109
- 18 Wu X J, Lu H T. Generalized function projective (lag, anticipated and complete) synchronization between two different complex networks with nonidentical nodes. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, **17**(7): 3005–3021
- 19 Wu Y Q, Li C P, Wu Y J, Kurths J. Generalized synchronization between two different complex networks. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, **17**(1): 349–355
- 20 Zhang S N, Wu X Q, Lu J A, Feng H, Lü J H. Recovering structures of complex dynamical networks based on generalized outer synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2014, **61**(11): 3216–3224
- 21 Wang Jian-An. Adaptive generalized synchronization between two different complex networks with time-varying delay coupling. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(2): 020509  
(王健安. 时变时滞耦合两个不同复杂网络的自适应广义同步. 物理学报, 2012, **61**(2): 020509)
- 22 Xu Jun-Qun, Zhang Jian-Xiong, Pang Ming-Bao. Generalized synchronization between two different complex delayed networks. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2014, **47**(1): 81–85  
(徐君群, 张建雄, 庞明宝. 2个时滞复杂动态网络的广义同步. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2014, **47**(1): 81–85)
- 23 Zheng S, Wang S G, Dong G G, Bi Q S. Adaptive synchronization of two nonlinearly coupled complex dynamical networks with delayed coupling. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, **17**(1): 284–291
- 24 Sun Y Z, Li W, Ruan J. Generalized outer synchronization between complex dynamical networks with time delay and noise perturbation. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulations*, 2013, **18**(4): 989–998
- 25 Luo Yi-Ping, Zhou Bi-Feng. Guaranteed cost synchronization control of diffusible complex network systems with time delay. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 147–156  
(罗毅平, 周笔锋. 时滞扩散性复杂网络同步保性能控制. 自动化学报, 2015, **41**(1): 147–156)
- 26 Li D M, Lu J A, Wu X Q, Chen G R. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2006, **323**(2): 844–853
- 27 Chen L, Lu J A, Tse C K. Synchronization: an obstacle to identification of network topology. *IEEE Transactions on Circuits and Systems — II: Express Briefs*, 2009, **56**(4): 310–314



韦相 武汉大学博士研究生。2006年获得云南大学数学与统计学院硕士学位。主要研究方向为复杂网络的同步和拓扑结构识别, 复杂网络传播动力学。

E-mail: weixiangwx2003@163.com

**(WEI Xiang)** Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Statistics, Wuhan University. He received his master degree from Yunnan University in 2006. His research interest covers complex network synchronization, reconstruction of complex network, and complex networks spread dynamics.)



赵军产 湖南商学院数学与统计学院副教授. 2009 年获得武汉大学数学学院博士学位. 主要研究方向为复杂网络与复杂系统, 多智能体, 混沌动力学, 复杂网络传播动力学. 本文通信作者.

E-mail: junchanzhao@163.com

(**ZHAO Jun-Chan** Associate pro-

fessor at the School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Commerce. He received his Ph. D. degree from Wuhan University in 2009. His research interest covers complex systems and complex networks, multiagent system, chaos dynamics, and complex networks spread dynamics. Corresponding author of this paper.)



胡春华 湖南商学院移动商务智能湖南省重点实验室教授. 2007 年于中南大学计算机科学学院获得博士学位. 主要研究方向为云计算, 服务计算和可信计算.

E-mail: huch36@gmail.com

(**HU Chun-Hua** Professor at the Key Laboratory of Hunan Province for

Mobile Business Intelligence, Hunan University of Commerce, He received his Ph. D. degree in computer science from Central South University in 2007. His research interest covers cloud computing, service computing, and dependability computing.)