

一种多幂次滑模趋近律设计与分析

张瑶¹ 马广富¹ 郭延宁¹ 曾添一²

摘要 针对传统滑模趋近律使系统存在抖振现象、收敛速度较慢及动态响应不平滑等问题,提出一种多幂次滑模趋近律.该趋近律通过三个幂次项系数在系统趋近过程不同阶段进行针对性地调节,使系统动态响应过程的收敛速度大幅度提高,且无抖振现象.理论验证了其存在性、可达性及稳定性,并详细推导了趋近速率及干扰稳定界.以航天器姿态机动控制系统为例,对比仿真结果表明该趋近律下,系统的动态过程有较大改善并消除了抖振,且在存在模型不确定性及外加干扰作用下,系统仍可较快地收敛到平衡点附近的邻域内.

关键词 多幂次趋近律,滑模控制,趋近速率,干扰稳定界

引用格式 张瑶,马广富,郭延宁,曾添一.一种多幂次滑模趋近律设计与分析.自动化学报,2016,42(3):466-472

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150377

A Multi Power Reaching Law of Sliding Mode Control Design and Analysis

ZHANG Yao¹ MA Guang-Fu¹ GUO Yan-Ning¹
ZENG Tian-Yi²

Abstract A multi power reaching law of sliding mode control is proposed in this paper, which aims at reducing chattering phenomenon, fastening convergence speed and making dynamic process smoothly. The proposed reaching law has three exponential terms to adjust the convergence process, so that the system has a faster convergence speed obviously and no chattering phenomenon. It is indicated through theoretical analysis that the system under the proposed reaching law has existence, accessibility and stability. The convergence speed and interference stability boundary are deduced in detail. Simulation results show that the dynamic process is improved and the chattering is reduced, as compared with the exponential reaching law, single power reaching law and double power reaching law. Furthermore, when there exists interference or uncertainty, the system can converge to a neighborhood of the origin quickly.

Key words Multi power reaching law, sliding-mode control, convergence speed, interference stability boundary

Citation Zhang Yao, Ma Guang-Fu, Guo Yan-Ning, Zeng Tian-Yi. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(3): 466-472

收稿日期 2015-06-16 录用日期 2015-11-06
Manuscript received June 16, 2015; accepted November 6, 2015
国家重点基础研究发展计划(973计划)(2012CB720000),国家自然科学基金(61174200, 61403103),中国博士后科学基金(2014M550195),中央高校基本科研业务费专项基金(HIT.NSRIF.2014035)资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB720000), National Natural Science Foundation of China (61174200, 61403103), China Postdoctoral Science Foundation (2014M550195), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (HIT.NSRIF.2014035)

本文责任编辑 刘允刚
Recommended by Associate Editor LIU Yun-Gang
1. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系 哈尔滨 150006 2. 北京理工大学自动化学院 北京 100081
1. Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150006 2. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081

滑模变结构控制因其强鲁棒性、模型依赖性低及参数灵活等特点被广泛应用于航天器姿态控制等工程问题中^[1-2].该方法存在的较大缺陷是控制过程中的抖振现象^[3-4].鉴于此,国内外学者采用边界层法^[5]、与智能控制相结合的方法^[6]及基于趋近律的控制方法^[7]等来削弱抖振.基于趋近律的滑模变结构控制方法由于可改善系统趋近过程动态品质,因此自提出以来国内外学者纷纷对其进行研究并取得一定成果.1996年高为炳^[8]提出了经典的指数趋近律,并通过调整趋近律参数改善了趋近过程的动态品质且一定程度地削弱了抖振,但仍具备改善空间.Yu等^[9]将指数趋近律与单幂次趋近律线性组合,既缩短了趋近时间又使趋近过程更加平滑,但到达滑模面后系统仍存在抖振现象.Bandyopadhyay等^[10]提出了一种改进的单幂次趋近律及一种积分滑模面,结合非线性反馈思想,将其应用于执行机构输出饱和情况下的控制问题中,其抗干扰能力较强,但趋近时间较长.

由于指数趋近律及单幂次滑模趋近律可调节的参数较少,为使系统具备更优越的性能,往往需要与神经网络、自适应及反馈控制等其他算法相结合,尽管这些方法可以在一定程度上改善系统品质,但仍然无法摆脱指数趋近律或单幂次趋近律固有的抖振及响应慢等问题.因此,国内外学者致力于通过提高趋近律阶次来使系统具备强鲁棒性及响应快速性等性能^[10-11].梅红等^[11]首次提出了双幂次滑模趋近律并应用于机器人跟踪问题中,使系统状态量快速收敛,提高了趋近速率,但并没有给出趋近速率的表达式或定性分析.张合新等^[12]提出了一种改进的双幂次趋近律方法,在双幂次趋近律后面加一指数项,并将其运用于非线性单入单出系统仿真,进一步加快了系统的趋近速率,将其两个幂次项参数分别选为 $\alpha > 1$ 及 $0 < \beta < 1$,即将系统状态分为大于1及小于1两部分分别进行速率调节,但是,当系统初始状态远大于1或远小于-1时,根据指数函数性质,趋近速率仍具备改善空间.

综上,已有的趋近律在控制过程中仍然存在抖振^[8,13-14]及收敛速度有待加强^[11-12,15]的问题.本文提出一种多幂次滑模趋近律,增加的第三个幂次项将系统的趋近过程在双幂次趋近律^[12]的基础上进一步细分并根据细分后的趋近阶段进行有针对性的速率调节,提高系统趋近过程全程速率.尤其当系统初始状态远大于1或远小于-1时,第三个幂次项将使系统状态迅速收敛.此外,在系统具备不确定性及受到外加干扰情况下,给出了干扰稳定界.

1 多幂次滑模趋近律

1.1 多幂次滑模趋近律设计

对于连续时间系统,设计多幂次滑模趋近律如下:

$$\dot{s} = -k_1 |s|^\alpha \text{sgn}(s) - k_2 |s|^\beta \text{sgn}(s) - k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s) - k_4 s \quad (1)$$

其中, $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_4 > 0, \alpha > 1, 0 < \beta < 1, \gamma$ 的取值情况为

$$\gamma = \begin{cases} \max\{\alpha, |s|\}, & |s| \geq 1 \\ \min\{\beta, |s|\}, & |s| < 1 \end{cases} \quad (2)$$

由指数函数性质可知,当系统状态满足条件 $|s| < 1$ 时,趋近律(1)主要受 $-k_2 |s|^\beta \text{sgn}(s) - k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 影响;当系统状态满足条件 $|s| \geq 1$ 时,趋近律(1)主要受 $-k_1 |s|^\alpha \text{sgn}(s) - k_3 |s|^\gamma \text{sgn}(s)$ 影响. γ 的取值(2)可保证系统在状态满足 $|s|$

$> \alpha$ 或 $|s| < \beta$ 时自适应地改变趋近律中的指数参数, 从而获得较快的收敛速率.

1.2 存在性及可达性证明

定理 1. 对于滑模趋近律 (1), 系统状态 s 在其作用下可达到平衡点 $s = 0$.

证明. 根据式 (1) 可得到关系式

$$s\dot{s} = -k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} - k_4s^2 \leq 0 \quad (3)$$

当且仅当 $s = 0$ 时, 有 $s\dot{s} = 0$.

根据连续系统滑模趋近律存在且可达性条件^[16], 若满足 $s\dot{s} \leq 0$, 则所设计的滑模趋近律为存在且可达的, 即系统状态 s 在趋近律 (1) 作用下可达到平衡点 $s = 0$. $\square$

2 多幂次滑模趋近律特性分析

2.1 稳态抖振分析

对于传统指数趋近律^[4], 其表达式为

$$\dot{s}_\alpha = -k_\alpha s - \varepsilon_\alpha \operatorname{sgn}(s) \quad (4)$$

其中, $k_\alpha > 0, \varepsilon_\alpha > 0$. 当 $s = 0^+$ 时, 式 (4) 可写为 $\dot{s}_\alpha = -\varepsilon_\alpha$, 即临近稳态时, 在正方向趋近稳态的系统状态以 $\dot{s}_\alpha = -\varepsilon_\alpha$ 的速率运动. 当 $s = 0^-$ 时, 式 (4) 可写为 $\dot{s}_\alpha = \varepsilon_\alpha$, 即临近稳态时, 在负方向趋近稳态的系统状态以 $\dot{s}_\alpha = \varepsilon_\alpha$ 的速率运动. 因此, 系统不会稳定在平衡点处, 而是在平衡点处进行幅值为 ε_α 的抖振.

对于多幂次趋近律 (1), 当 $s = 0^+$ 及 $s = 0^-$ 时, 式 (1) 均可写为 $\dot{s} = 0$, 即系统在临近稳态时不会产生抖振现象.

2.2 多幂次滑模趋近律趋近速率

定理 2. 设 s 初始状态为 s_0 , 则采用滑模趋近律 (1) 对应的系统到达滑模面的时间小于 $[T_1 + T_3 + T_3 + T_4]$, 其中, T_1, T_2, T_3, T_4 为

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \\ T_2 &= \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_1 + k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1 + k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \\ T_3 &= \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \\ T_4 &= \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_2 + k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2 + k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

证明. 不妨设 $s_0 > \alpha > 1$, 将系统的趋近过程分为四个阶段, 分别为

1) 系统从 s_0 到达 $s(t_1) = \alpha$

由于 $\alpha > 1, 0 < \beta < 1, \gamma = \max\{\alpha, |\beta|\}$, 则 $k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) + k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) > k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$, 尤其当参数满足 $k_1|s|^{\alpha-\beta} + k_3|s|^{\gamma-\beta} > 10k_2$ 时, 有

$$k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) + k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) \gg k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$$

成立, 此阶段趋近速率主要受 $-k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) - k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s)$ 影响, 则趋近律 (1) 可写为

$$\dot{s} = -k_1s^\alpha - k_3s^\gamma - k_4s \quad (6)$$

下面将求解式 (6), 含有两个幂次项的方程求解具有一定难度, 故将其考虑为 $\dot{s} + k_4s = -k_1s^\alpha$ 及 $\dot{s} + k_4s = -k_3s^\gamma$ 两个方程分别求解, 由于 $\dot{s} + k_4s = -k_1s^\alpha$ 及 $\dot{s} + k_4s = -k_3s^\gamma$ 的解分别表示系统仅受 $-k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s)$ 及仅受 $-k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s)$ 的影响情况下所需要的趋近时间, 因此, 趋近时间一定小于两方程解中的任一值. 求解 $\dot{s} + k_4s = -k_1s^\alpha$ 的具体过程如下:

$$s^{-\alpha} \frac{ds}{dt} + k_4s^{1-\alpha} = -k_1 \quad (7)$$

设中间变量 $y = s^{1-\alpha}$, 则式 (6) 可写为

$$\frac{dy}{dt} + (1-\alpha)k_4y = -(1-\alpha)k_1 \quad (8)$$

对于一阶线性非齐次方程 (8), 采用常数变易法来求解^[17], 令 $y = u(t)e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt}$, 其中, $u = u(t)$ 为 t 的连续函数, 代入式 (8) 中得到

$$\frac{du}{dt} = -(1-\alpha)k_1e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} \quad (9)$$

对式 (9) 两边积分可得

$$u = -\int (1-\alpha)k_1e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} dt + c_1 \quad (10)$$

其中, c 为常数. 则可求得式 (8) 的解为

$$\begin{aligned} y &= \left[-\int (1-\alpha)k_1e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} dt + c_1 \right] e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} = \\ &= c_1e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} - \frac{k_1e^{\int(1-\alpha)k_4 dt}}{k_4}e^{-\int(1-\alpha)k_4 dt} = \\ &= c_1e^{-(1-\alpha)k_4 t} - \frac{k_1}{k_4} \end{aligned} \quad (11)$$

由于 $y = s^{1-\alpha}$, 则有

$$s^{1-\alpha} = c_1e^{-(1-\alpha)k_4 t} - \frac{k_1}{k_4} \quad (12)$$

由于 $t = 0$ 时, $s = s_0$, 则可求得常数 c_1 为

$$c_1 = s_0^{1-\alpha} \frac{k_1}{k_4} \quad (13)$$

结合式 (12) 及式 (13), 可求出式 (7) 的解为

$$t = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left\{ \ln \left(s^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \right) - \ln \left(s_0^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \right) \right\} \quad (14)$$

则由 s_0 到达 $s(t_1)$ 所需时间为

$$t_1 = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left\{ \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \right) - \ln \left(s_0^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \right) \right\} \quad (15)$$

因此, 系统由 s_0 到达 $s(t_1)$ 所需时间小于 t_1 .

2) 系统从 $s(t_1) = \alpha$ 到达 $s(t_2) = 1$
趋近律 (1) 可写为

$$\dot{s} = -k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) - k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_4s \quad (16)$$

这一阶段由于 $|s| < \alpha$, 因此, 有 $\gamma = \alpha$, 则式 (16) 可写为

$$\dot{s} + k_4s = -(k_1 + k_3)|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s) \quad (17)$$

对应的趋近时间可由上一阶段推导过程得出, 所需时间为

$$t = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(s^{1-\alpha} + \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (18)$$

可以得出, 系统由 $s(t_1) = \alpha$ 到达 $s(t_2) = 1$ 所需时间为

$$t = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (19)$$

因此, 系统由 $s(t_1)$ 到达 $s(t_2) = 1$ 所需时间小于 t_2 .

3) 系统从 $s(t_2) = 1$ 到达 $s(t_3) = \beta$

由于 $\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma = \min\{\beta, |s|\}$, 则 $k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) + k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s) > k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s)$, 尤其当参数满足 $k_3|s|^{\gamma-\alpha} + k_2|s|^{\beta-\alpha} > 10k_1$ 时, 有

$$k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) + k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s) \gg k_1|s|^\alpha \operatorname{sgn}(s)$$

成立, 此阶段趋近速率主要受 $-k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$ 影响, 则趋近律 (1) 可写为

$$\dot{s} = -k_2|s|^\beta - k_3|s|^\gamma - k_4s \quad (20)$$

下面求解式 (20), 同样将其考虑为 $\dot{s} + k_4s = -k_2s^\beta$ 及 $\dot{s} + k_4s = -k_3s^\gamma$ 两个方程分别求解, 由于 $\dot{s} + k_4s = -k_2s^\beta$ 及 $\dot{s} + k_4s = -k_3s^\gamma$ 的解分别表示系统仅受 $-k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s)$ 及仅受 $-k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s)$ 的影响情况下所需要的趋近时间, 因此, 趋近时间一定小于两方程解中的任一值. 求解 $\dot{s} + k_4s = -k_2s^\beta$ 的具体过程如下.

$$s^{1-\beta} = c_2 e^{-(1-\beta)k_4t} - \frac{k_2}{k_4} \quad (21)$$

其中, $t = 0$ 时, $s = 1$, 则可求得常数 c_2 为

$$c_2 = 1 + \frac{k_2}{k_4} \quad (22)$$

结合式 (21) 及式 (22), 可求得趋近时间为

$$t = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(s^{1-\beta} + \frac{k_2}{k_4} \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_4} \right) \right] \quad (23)$$

则系统由 $s(t_2) = 1$ 到达 $s(t_3) = \beta$ 所需时间为

$$t_3 = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2}{k_4} \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_4} \right) \right] \quad (24)$$

因此, 系统由 $s(t_2) = 1$ 到达 $s(t_3) = \beta$ 所需时间小于 t_3 .

4) 系统从 $s(t_3) = \beta$ 到达 $s(t_4) = 0$

趋近律 (1) 可写为

$$\dot{s} = -k_2|s|^\beta \operatorname{sgn}(s) - k_3|s|^\gamma \operatorname{sgn}(s) - k_4s \quad (25)$$

这一阶段由于 $|s| > \beta$, 因此, 有 $\gamma = \beta$, 则式 (16) 可写为

$$\dot{s} + k_4s = -(k_2 + k_3)|s|^\beta \operatorname{sgn}(s) \quad (26)$$

对应的趋近时间可由上一阶段推导过程得出, 所需时间为

$$t = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(s^{1-\beta} + \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (27)$$

则系统由 $s(t_3) = \beta$ 到达 $s(t_4) = 0$ 所需时间为

$$t_4 = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (28)$$

因此, 系统由 $s(t_3) = \beta$ 到达 $s(t_4) = 0$ 所需时间小于 t_4 .

此外, 若 $s_0 < -\alpha < -1$, 则系统由 s_0 到达 $s(t_4^*) = 0$ 所需时间小于 $[t_1^* + t_2^* + t_3^* + t_4^*]$, 其中,

$$t_1^* = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(\alpha^{1-\alpha} - \frac{k_1}{k_4} \right) - \ln \left(s_0^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \right) \right] \quad (29)$$

$$t_2^* = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(1 - \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} - \frac{k_1+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (30)$$

$$t_3^* = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2}{k_4} \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_4} \right) \right] \quad (31)$$

$$t_4^* = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(1 - \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) - \ln \left(\beta^{1-\beta} - \frac{k_2+k_3}{k_4} \right) \right] \quad (32)$$

因此, 将式 (15) 与式 (29)、式 (19) 与式 (30)、式 (24) 与式 (31)、式 (28) 与式 (32) 整理合并, 写为如下等式:

$$T_1 = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(s_0^{1-\alpha} + \frac{k_1}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (33)$$

$$T_2 = \frac{1}{(1-\alpha)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_1+k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(\alpha^{1-\alpha} + \frac{k_1+k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (34)$$

$$T_3 = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(1 + \frac{k_2}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (35)$$

$$T_4 = \frac{1}{(\beta-1)k_4} \left[\ln \left(1 + \frac{k_2+k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) - \ln \left(\beta^{1-\beta} + \frac{k_2+k_3}{k_4} \operatorname{sgn}(s_0) \right) \right] \quad (36)$$

综上所述, 对于滑模趋近律 (1), 系统状态的收敛时间小于 $[T_1 + T_2 + T_3 + T_4]$. $\square$

上文给出了趋近速率的具体求解过程, 亦可利用 Matlab 的 dsolve 语句求解.

2.3 趋近速率分析

现阶段幂次趋近律中趋近速率较快的为张合新等提出的改进的双幂次趋近律^[12], 如式 (37) 所示. 此处将多幂次趋近律与其对比, 以分析趋近速率的快速性.

$$\dot{s}_c = -k_{c1}|s|^{\alpha_c}\text{sgn}(s) - k_{c2}|s|^{\beta_c}\text{sgn}(s) \quad (37)$$

其中, $k_{c1} > 0$, $k_{c2} > 0$, $0 < \beta_c < 1$, $\alpha_c > 1$.

双幂次趋近律设计的主要思想为利用指数函数的性质来对趋近过程的不同阶段针对性地加快趋近速率. 多幂次趋近律 (1) 在此基础上进一步加快了趋近速率. 双幂次趋近律^[12]在 $|s| > 1$ 和 $|s| < 1$ 范围内用常值幂次项系数 α_c 和 β_c 进行调节, 趋近速率随这两个系数的选取而变化. 针对系统状态与平衡点的情况, 多幂次趋近律引入的第三个幂次项系数 γ 进一步提升了趋近速率. 根据式 (2) 可知, 当系统状态满足 $|s| > \alpha$ 时, $\gamma = |s|$, 即趋近律的指数项大于双幂次趋近律的指数项, 从而实现了在 $s > \alpha$ 阶段加快趋近速率的目的. 同样地, 在 $|s| < \beta$ 阶段趋近速率也高于双幂次趋近律.

值得说明的是, 如果增大双幂次趋近律^[12]的参数 k_{c1} 及 k_{c2} 也可以在一定程度上加快系统趋近速率, 但由于其在 $|s| > \alpha$ 及 $|s| < \beta$ 阶段并没有进行针对性的速率调节, 而是将其分别与 $1 < |s| \leq \alpha$ 及 $\beta \leq |s| < 1$ 阶段组成一个整体, 即 $|s| > 1$ 及 $|s| < 1$ 阶段, 进行统一的速率调节, 因此, 在改善趋近速率方面具备局限性. 然而, 多幂次趋近律 (1) 将系统趋近过程分为四个阶段, 即 $|s| < \beta$, $\beta \leq |s| < 1$, $1 < |s| \leq \alpha$ 及 $|s| > \alpha$ (此处说明的是系统所能经历最多的阶段, 即初始状态满足 $|s_0| > \alpha > 1$, 若系统初始状态不满足该条件, 则所经历的阶段为上述四阶段的子集), 并针对四个阶段分别设计了趋近幂次项的系数, 保证了系统在各个趋近阶段均具备保持较快趋近速率的自适应能力, 并且幂次项系数 γ 在 $|s| > \alpha$ 取为 $|s|$, 导致控制量随系统收敛而逐渐减小, 在提高趋近速率的同时也满足了实际系统对控制量幅值的限制要求.

3 多幂次滑模趋近律干扰稳定界分析

上文证明了多幂次滑模趋近律可使系统在有限时间内到达平衡点, 且给出了趋近时间, 但当系统存在不确定性及外加干扰时, 该趋近律仅可使系统收敛到平衡点的一个邻域内, 称为干扰稳定界.

引理 1. 令 $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, $\dot{x} = f(x)$, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为定义在平衡点邻域 D 内的连续函数, 假设存在连续函数 V 满足以下条件, 则函数 $\dot{x} = f(x)$ 关于平衡点有限时间收敛^[18]:

- 1) V 是正定的;
- 2) $\dot{V}$ 除平衡点外是负定的;
- 3) 存在实数 $\varepsilon > 0$, $0 < \lambda < 1$ 和一邻域 $N \subset D$ 使得 $\dot{V} + \varepsilon V^\lambda \leq 0$.

定理 3. 考虑如下存在不确定性及外加干扰的系统

$$\begin{aligned} \dot{s} = & -k_1|s|^\alpha\text{sgn}(s) - k_2|s|^\beta\text{sgn}(s) - \\ & k_3|s|^\gamma\text{sgn}(s) - k_4s + d(t) \end{aligned} \quad (38)$$

若满足 $|d(t)| \leq \delta$, $\delta > 0$ 为常数, 则系统 (38) 的状态在有限时间内收敛到以下区域

$$|s| \leq \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} |s| \leq & \min \left\{ \delta, \left(k_1 \frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \left(k_1 \frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\} + \\ & \min \left\{ \delta, \left(k_2 \frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \left(k_2 \frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \right\} + \\ & \min \left\{ \delta, \left(k_3 \frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}, \left(k_3 \frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} \right\} + \\ & k_4 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} + \delta \end{aligned} \quad (40)$$

证明. 选取 Lyapunov 函数为式 (40) 形式, 则有

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (41)$$

对其求导,

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} = & -k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} - k_4s^2 + s \times d(t) \leq \\ & -k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} - k_4s^2 + |s| \times |d(t)| \leq \\ & -k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} - k_4s^2 + |s| \times \delta \end{aligned} \quad (42)$$

上式可变形为

$$\dot{V} + k_4s^2 \leq -k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} + |s| \times \delta \quad (43)$$

若 $k_1|s|^{\alpha+1} - k_2|s|^{\beta+1} - k_3|s|^{\gamma+1} \geq \delta$ 成立, 则

$$\dot{V} + 2k_4V \leq 0 \quad (44)$$

进一步地, 若满足 $k_1|s|^\alpha \geq \delta$, $k_2|s|^\beta \geq \delta$ 或 $k_3|s|^\gamma \geq \delta$ 其中之一, 亦有式 (37) 成立, 而对应的区域分别为

$$|s| \leq \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (45)$$

$$|s| \leq \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (46)$$

$$|s| \leq \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (47)$$

因此, 由引理 1 可得, 系统状态 S 在有限时间内收敛到区域 (39) 内. 将式 (39) 代入式 (38) 中, 可得

$$\begin{aligned} |\dot{s}| = & k_1|s|^\alpha\text{sgn}(s) + k_2|s|^\beta\text{sgn}(s) + k_3|s|^\gamma\text{sgn}(s) + \\ & k_4s + d(t) \leq k_1|s|^\alpha + k_2|s|^\beta + k_3|s|^\gamma + k_4|s| + |d(t)| \leq \\ & k_1 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^\alpha + \\ & k_2 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^\beta + \\ & k_3 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\}^\gamma + \\ & k_4 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} + \delta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \min \left\{ \delta, \left(k_1 \frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \left(k_1 \frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\} + \\
& \min \left\{ \delta, \left(k_2 \frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \left(k_2 \frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{\beta}{\gamma}} \right\} + \\
& \min \left\{ \delta, \left(k_3 \frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}, \left(k_3 \frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} \right\} + \\
& k_4 \min \left\{ \left(\frac{\delta}{k_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\delta}{k_2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{\delta}{k_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right\} + \delta
\end{aligned} \quad (48)$$

□

4 数值仿真

由于航天器姿态机动控制问题中动态响应的快速性及平滑性是主要考虑的性能指标, 因此数值仿真以航天器姿态机动控制系统为例^[19], 选取俯仰轴单轴机动情况进行仿真. 将其考虑为非线性系统

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\cos \gamma}{J_z} u + f(t) \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
f(t) = & \dot{\omega}_y \sin \gamma + \omega_y \dot{\gamma} \cos \gamma + \omega_z \dot{\gamma} \sin \gamma - \\
& \frac{\cos \gamma}{J_z} (J_y - J_x) \omega_x \omega_y
\end{aligned} \quad (50)$$

其中, $f(t)$ 表示除机动轴外其余两轴带来的耦合影响, ϑ , ψ , γ 分别为飞行器俯仰角, 偏航角及滚转角, ω_x , ω_y , ω_z 分别为飞行器本体坐标系相对地面坐标系旋转角速度在本体坐标系 Ox , Oy 及 Oz 轴的分量, J_x , J_y , J_z 分别为飞行器绕本体坐标系 Ox , Oy 及 Oz 轴的转动惯量, u 为航天器本体坐标系下机动轴的外加力矩. 将耦合项 $f(t)$, 系统不确定性及外加干扰统一考虑为系统的干扰 $d(t)$, 则航天器单轴姿态机动的模型为

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\cos \gamma}{J_z} u + d(t) \quad (51)$$

数值仿真主要分为两部分: 1) 在无干扰情况下, 验证本文多幂次趋近律的有效性及优越性; 2) 在干扰作用下, 验证定理 3 给出干扰稳定界的正确性. 在数值仿真中, 滑模面统一选择较为简单的形式^[8]: $\sigma = \lambda e$, 其中, $\lambda > 0$, $e = \vartheta_d - \vartheta$ 为航天器俯仰角跟踪误差, ϑ_d 为俯仰角控制指令.

4.1 各趋近律对比仿真

当 $d(t) = 0$ 时, 分别采用指数趋近律、单幂次趋近律、双幂次趋近律以及本文提出的多幂次趋近律设计控制律 u , 并进行对比仿真, 结果如图 1、图 2 及图 3 所示.

a) 指数趋近律

$$\dot{s}_a = -k_a s - \varepsilon_a \operatorname{sgn}(s) \quad (52)$$

b) 单幂次趋近律

$$\dot{s}_b = -k_b |s|^{\alpha_b} - \operatorname{sgn}(s) \quad (53)$$

c) 双幂次趋近律

$$\dot{s}_c = -k_{c1} |s|^{\alpha_c} \operatorname{sgn}(s) - k_{c2} |s|^{\beta_c} \operatorname{sgn}(s) \quad (54)$$

d) 多幂次趋近律

$$\dot{s} = -k_1 |s|^{\alpha} \operatorname{sgn}(s) - k_2 |s|^{\beta} \operatorname{sgn}(s) - k_3 |s|^{\gamma} \operatorname{sgn}(s) - k_4 s \quad (55)$$

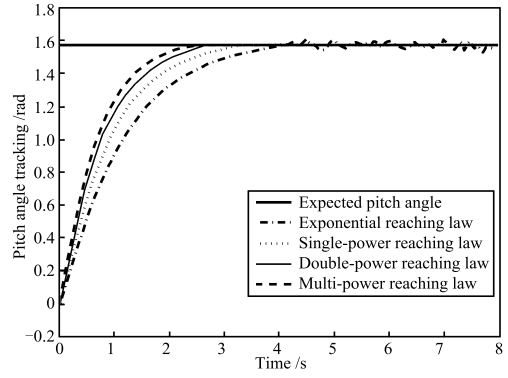


图 1 不同趋近律下航天器姿态跟踪情况

Fig. 1 Attitude tracking under reaching laws

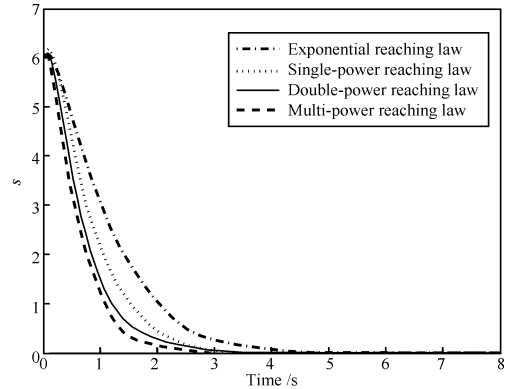


图 2 不同趋近律下 s 随时间变化情况

Fig. 2 Condition of s under reaching laws

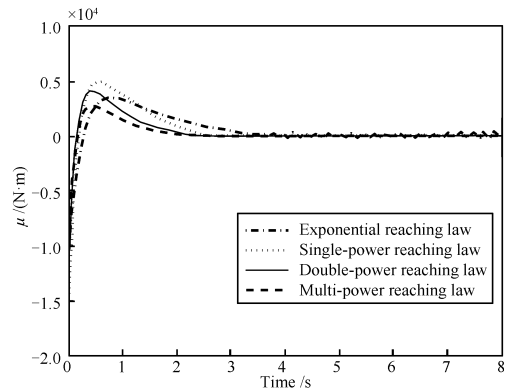


图 3 不同趋近律下控制器输出 u 随时间变化情况

Fig. 3 Controller output u under reaching laws

趋近律参数选择如表 1 所示.

表 1 各趋近律仿真参数

Table 1 Simulation parameters of every reaching law

a	b	c	d
$k_a = 0.9$	$k_b = 0.7$	$k_{c1} = 0.7$	$k_1 = 0.7$
$\varepsilon_a = 0.5$	$\alpha_b = 1.1$	$k_{c2} = 0.9$	$k_2 = 0.9$
		$\alpha_c = 1.1$	$k_3 = 1.1$
		$\beta_c = 0.8$	$k_4 = 1.4$
			$\alpha = 1.7$
			$\beta = 0.5$

控制目标为令俯仰角单轴大角度机动至 90° 即 $\pi/2 \text{ rad}$, 即指令为 $\vartheta_d = \pi/2 \text{ rad}$, 滚转角及偏航角在此过程中保持为 0 rad . 航天器姿态跟踪系统参数为 $J_z = 324 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 初始状态 $s(0) = 6$, $\dot{s}(0) = 6$, $\vartheta_d(0) = 0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_d(0) = 0 \text{ rad/s}$.

由图 1 可见, 指数趋近律下的姿态跟踪在到达期望角度后, 姿态角在期望值附近往返跳动, 形成抖振. 单幂次趋近律及双幂次趋近律在趋近速率方面有所提升, 且双幂次趋近律下的跟踪速率较快. 多幂次趋近律下的航天器单轴姿态跟踪速度较其他三种趋近律快, 且跟踪上期望信号后可稳定在期望角度, 不发生抖振.

由图 2 可见, 指数趋近律 (52) 在趋近阶段动态响应平滑, 但从初值到达滑模面过程时间较长, 可通过不断修正参数 k_a 及 ε_a 改善趋近过程动态品质, 因常数项 $-\varepsilon_a \text{sgn}(s)$ 的存在系统不会稳定在平衡零点处, 而是在平衡零点附近产生幅值大小为 ε_a 的抖振, 而其余三个趋近律均不含此项, 故可稳定在平衡零点处, 不产生抖振现象, 图 3 可验证此结论. 由图 2 和图 3 可见, 单幂次趋近律 (53) 在系统状态远离滑模面时收敛速度较小, 双幂次趋近律 (54) 在一定程度上增大了收敛速度, 这是由于双幂次趋近律具备两个可调节的幂次项系数, 使系统在接近滑模面及远离滑模面时均具备较快的收敛速度. 本文提出的多幂次趋近律具备最快的收敛速度, 且系统可收敛于平衡零点, 无抖振现象. 这是由于多幂次趋近律增加了可调节的幂次项系数个数, 且增加了一阶项 $k_4 s$, 加快了系统在远离滑模面时的收敛速度. 此外, 由图 2 可见, 在航天器做单轴机动运动时, 基于多幂次滑模趋近律的控制律输出最大幅值较其他三种趋近律小, 对控制器的最大输出值要求较低.

4.2 干扰稳定界仿真

假设系统的不确定性及所受外界干扰可统一写为

$$d(t) = 0.5 \cos t + \sin 2t \quad (56)$$

由定理 3 可得 $\delta \geq |d(t)| = \sqrt{1.25}$, 取 $\delta = \sqrt{1.25}$. 趋近律参数选为 $\alpha = 2$, $\beta = 0.5$, $\gamma = -2$, $k_1 = 0.7$, $k_2 = 0.57$, $k_3 = 0.52$, $k_4 = 0.81$. 代入式 (38) 及式 (39), 可得 $|s| \leq 0.682$, $|\dot{s}| \leq 2.559$. 仿真结果如图 4 及图 5 所示.

由图 4 和图 5 可见, 在系统存在不确定性或受到外加干扰作用时, 系统稳态过程中无法收敛至平衡零点, 而是在平衡零点附近波动, 造成稳态误差, 且稳态误差最大幅值分别满足 $|s| \leq 0.682$, $|\dot{s}| \leq 2.559$. 与本文定理 3 给出的干扰误差

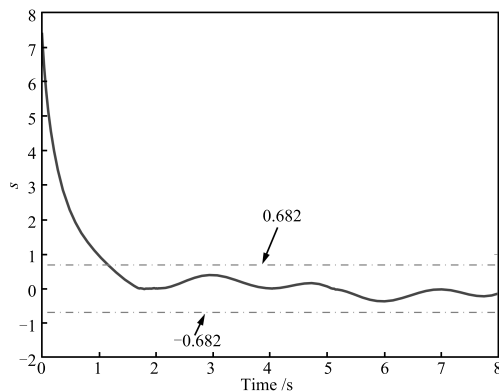


图 4 外加干扰下 s 的收敛情况

Fig. 4 Convergence condition of s with interference

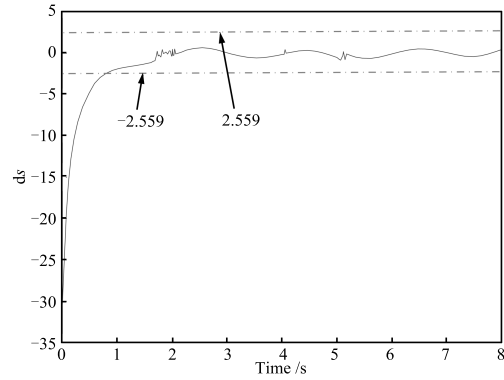


图 5 外加干扰下 ds 的收敛情况

Fig. 5 Convergence condition of ds with interference

界一致. 因此, 在系统存在不确定性或外加干扰时, 在多幂次趋近律作用下系统的稳态误差一定在本文给出的干扰误差界内.

5 结论

本文针对航天器姿态机动等对响应快速性具备较高要求的系统提出了一种多幂次趋近律, 理论证明了其存在性、可达性及稳定性, 并详细推导了趋近速率及干扰稳定界, 仿真验证了该趋近律的有效性及其优越性, 且检验了干扰稳定界的推导结果. 虽然在受到扰动时, 系统状态可收敛在干扰稳定界内, 但其仍然不能稳定在平衡零点, 可以考虑神经网络或干扰观测器来克服系统的受扰影响, 此外, 多幂次趋近律中参数之间满足某种关系时将会使系统的干扰稳定界缩小, 从而使得系统具备更好的抗干扰性, 以上内容有待进一步研究.

References

- 1 Shtessel Y B, Shkolnikov I A, Levant A. Smooth second-order sliding modes: missile guidance application. *Automatica*, 2007, **43**(8): 1470–1476
- 2 Gao W B, Hung J C. Variable structure control of nonlinear systems: a new approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, **40**(1): 45–55
- 3 Li Xue-Bing, Ma Li, Ding Shi-Hong. A new second-order sliding mode control and its application to inverted pendulum. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 193–202 (李雪冰, 马莉, 丁世宏. 一类新的二阶滑模控制方法及其在倒立摆控制中的应用. *自动化学报*, 2015, **41**(1): 193–202)
- 4 Moulay E, Perruquetti W. Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems. *International Journal of Control*, 2008, **81**(5): 797–803
- 5 Lian R J. Adaptive self-organizing fuzzy sliding-mode radial basis-function neural-network controller for robotic systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, **61**(3): 1493–1503
- 6 Tsai C H, Chung H Y, Yu F M. Neuro-sliding mode control with its applications to seesaw systems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2004, **15**(1): 124–134
- 7 Wu J C, Liu T S. A sliding-mode approach to fuzzy control design. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1996, **4**(2): 141–151
- 8 Gao Wei-Bing. *Theory and Design Method for Variable Sliding Mode Control*. Beijing: Science Press, 1996. 241–254 (高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996. 241–254)
- 9 Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, Man Z H. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 2005, **41**(11): 1957–1964

- 10 Bandyopadhyay B, Fulwani D, Park Y J. A robust algorithm against actuator saturation using integral sliding mode and composite nonlinear feedback. In: Proceedings of the 17th IFAC World Congress. COEX, Korea, South: IFAC, 2008. 14174–14179
- 11 Mei Hong, Wang Yong. Fast convergent sliding mode variable structure control of robot. *Information and Control*, 2009, **38**(5): 552–557
(梅红, 王勇. 快速收敛的机器人滑模变结构控制. 信息与控制, 2009, **38**(5): 552–557)
- 12 Zhang He-Xin, Fan Jin-Suo, Meng Fei, Huang Jin-Feng. A new double power reaching law for sliding mode control. *Control and Decision*, 2013, **28**(2): 289–293
(张合新, 范金锁, 孟飞, 黄金峰. 一种新型滑模控制双幂次趋近律. 控制与决策, 2009, **38**(5): 289–293)
- 13 Fallaha C J, Saad M, Kanaan H Y, Al-Haddad K. Sliding-mode robot control with exponential reaching law. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, **58**(2): 600–610
- 14 Niu Y, Ho D W C, Wang Z. Improved sliding mode control for discrete-time systems via reaching law. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(11): 2245–2251
- 15 Jerouane M, Sepehri N, Lammabhi-Lagarrigue F. Dynamic analysis of variable structure force control of hydraulic actuators via the reaching law approach. *International Journal of Control*, 2004, **77**(14): 1260–1268
- 16 Utkin V I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(2): 212–222
- 17 Liu Lian-Fu. Application and ordinary solution of a kind of first order differential equation. *Journal of Huangshi Institute of Technology*, 2011, **27**(4): 41–42
(刘连福. 一类一阶微分方程的通解及应用. 黄石理工学院学报, 2011, **27**(4): 41–42)
- 18 Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(5): 678–682
- 19 Zhao Y X, Wu T, Li G. A second-order sliding mode controller design for spacecraft tracking control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, **2013**: Article ID 429101

张 瑶 哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士研究生. 主要研究方向为航天器姿态控制及滑模控制理论.

E-mail: yaozhanghit@outlook.com

(ZHANG Yao Ph.D. candidate in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. Her research interest covers attitude control of spacecraft and sliding mode control.)

马广富 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授. 主要研究方向为航天器姿态控制, 卫星编队控制. E-mail: magf@hit.edu.cn

(MA Guang-Fu Professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interest covers attitude control of spacecraft and satellite formation control.)

郭延宁 哈尔滨工业大学控制科学与工程系副教授. 主要研究方向为航天器姿态控制. 本文通信作者. E-mail: guoyn@hit.edu.cn

(GUO Yan-Ning Associate professor in the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology. His research interest covers attitude control of spacecraft. Corresponding author of this paper.)

曾添一 北京理工大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为多电机驱动控制及机构参数与控制器一体化设计. E-mail: blessno@163.com

(ZENG Tian-Yi Ph.D. candidate at the School of Automation, Beijing Institute of Technology. His research interest covers motor drive control and integration of mechanism parameters and controller design.)