

如何解决基不匹配问题: 从原子范数到无网格压缩感知

陈栩杉¹ 张雄伟¹ 杨吉斌¹ 孙蒙¹

摘要 压缩感知理论能够以远低于经典 Nyquist 速率进行采样, 采用非自适应线性投影获得了保留信号有用信息的少量观测点, 并通过求解最优化问题精确重构原始信号. 压缩感知理论大大缓解了信号采样、存储和传输的巨大压力, 在计算机科学、电子工程和信号处理等领域具有广阔的应用前景. 信号的稀疏表示是对信号进行压缩采样和重构的前提, 即假设信号在某个变换基 (傅里叶基、小波基等) 下是稀疏的, 这些基可以看作是用于描述信号参数空间的有限离散字典. 然而在如雷达、阵列信号处理、通信等领域的应用中, 信号的参数空间是连续的, 在假定的离散变换基下并不稀疏, 这种基不匹配问题会严重影响信号重构精度. 本文首先介绍了基不匹配产生的原因及其对重构精度的影响, 接着从原子范数出发, 综述了无网格压缩感知的理论框架和关键技术问题, 着重介绍了一维和多维无网格压缩感知的最新研究进展, 最后对其在信号处理等领域的应用进行了探讨.

关键词 基不匹配, 原子范数, 无网格压缩感知, 循环平稳信号处理

引用格式 陈栩杉, 张雄伟, 杨吉斌, 孙蒙. 如何解决基不匹配问题: 从原子范数到无网格压缩感知. 自动化学报, 2016, 42(3): 335–346

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150539

How to Overcome Basis Mismatch: From Atomic Norm to Gridless Compressive Sensing

CHEN Xu-Shan¹ ZHANG Xiong-Wei¹ YANG Ji-Bin¹ SUN Meng¹

Abstract Compressive sensing (CS) presents a new method to capture and represent compressible signals at a rate significantly below the Nyquist rate which employs non-adaptive linear projections to preserve the structure of the signal. The nonlinear optimization process is then able to recover the signal from very few measurements. In recent years, CS has attracted considerable attention in areas of computer science, electrical engineering and signal processing since it may be possible to reduce the cost of sampling, storage and transmission. CS builds upon the fundamental fact that we can represent many signals using only a few nonzero coefficients in finite discrete bases or dictionaries. For many problems, signals are sparse in a known basis which is usually Fourier basis or wavelet basis. However, signals encountered in applications such as radar, array processing and communication are specified by parameters in a continuous domain and consequently the mismatch between the assumed and the actual bases for sparsity results in the reconstruction inaccuracy. In this paper, we begin with an introduction of basis mismatch and its impact on reconstruction. Then, we summarize the underlying framework as well as key techniques of gridless CS and provide an up-to-date review of the researches on D -dimensional ($D \geq 2$) gridless CS. We conclude with a discussion of applying gridless CS in the field of signal processing.

Key words Basis mismatch, atomic norm, gridless compressive sensing, cyclostationary signal processing

Citation Chen Xu-Shan, Zhang Xiong-Wei, Yang Ji-Bin, Sun Meng. How to overcome basis mismatch: from atomic norm to gridless compressive sensing. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(3): 335–346

在传统的采样过程中, 为了避免信号失真, 经典的香农定理要求采样频率不得低于信号带宽的两倍.

然而在获取图像或视频时, 根据奈奎斯特速率进行采样会大大增加采样数据存储和传输的代价. 压缩感知 (Compressive sensing, CS)^[1–3] 是近年来从稀疏和冗余表示中分离出来的研究热点问题, 该理论利用信号的稀疏特性, 采用非自适应线性投影来保留信号的有效信息, 这一过程同时完成了信息的获取和压缩, 从而使得 CS 能够突破采样定理限制, 以远低于奈奎斯特速率进行采样, 且通过求解最优化问题, 只需要少量观测采样点就能精确重构原始信号. 特别是 2006 年 Candes 和 Donoho 等^[1–3] 系统提出压缩感知理论框架和关键技术以来, 研究者从信号的稀疏性^[4] 出发, 重新认识理解传统的信号和

收稿日期 2015-08-26 录用日期 2015-12-21
Manuscript received August 26, 2015; accepted December 21, 2015

国家自然科学基金 (61471394, 61402519), 江苏省自然科学基金 (BK20140071, BK20140074) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61471394, 61402519), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20140071, BK20140074)

本文责任编辑 高会军

Recommended by Associate Editor GAO Hui-Jun

1. 解放军理工大学 南京 210007

1. Chinese People's Liberation Army University of Science and Technology, Nanjing 210007

信息压缩、信号检测和估计^[5-7]问题,解决了一些传统方法难以克服的困难,在各个领域^[8-11]都得到了广泛的应用.

寻找信号的稀疏域^[12]是对信号进行压缩和重构的基础,通常假设信号在某个已知的变换基(傅里叶基、小波基等)下是稀疏的,这些基可以看作是有限离散的字典,把信号参数空间划分成均匀的网格^[13-14].由于在许多实际应用中信号参数空间是连续的^[15-16],如雷达、通信、阵列信号处理等,因此为了在这些领域应用压缩感知理论,大量的研究把连续参数空间进行离散化处理,将整个参数空间划分为有限个网格,并假设信号参数会由某些网格点来表示^[17-21].这种离散化的建模方法较为简单,易于分析处理,但不可避免的会带来一些缺陷:1)离散化处理将稀疏域(如频域、小波域等)划分成均匀的网格时,网格越精细,实际参数与网格点之间的误差就越小.但过于密集的网格会造成基字典中相邻原子之间的相关性太强,从而降低CS重构性能^[22].2)如果信号的实际参数值并不落在划分好的网格上,那么假设的变换基无法稀疏表示信号^[23].实际上,无论将网格划分的多么精细,信号的实际参数值都不会落在离散的网格上^[24].研究者把这种现象称为基不匹配(Basis mismatch),同时希望能够建立新的稀疏域表示模型更好地描述连续的信号参数空间,而无需对稀疏域进行离散化处理.大量研究工作一直在探索解决基不匹配的方法^[18, 24-27],然而这些尝试并没有从其产生的本质原因入手,从而无法从根本上避免基不匹配的发生.直到2012年, Candès 等提出利用全变分范数可以从少量连续时域采样中重构无限精度的连续频率值^[28],为基不匹配问题的求解提供了一个崭新的思路,当信号频率之间的间隔至少为 $c_d/(k \log k \log N)$ 时,只需 $O(k \log k \log N)$ 个采样就能重构出信号频率,其中 c_d 为一个小常数, k 为信号的个数, N 为信号的长度. Tang 等^[23]在此基础上提出无网格压缩感知(Gridless compressive sensing, Gridless CS),通过求解原子范数(Atomic norm)^[29]最小化问题,能够从 $O(k \log k \log N)$ 个随机时域采样中重构出无限精度的连续频率值,同时将信号频率之间的间隔条件进一步缩小至 $4/N$ ^[23].

本文首先介绍了基不匹配产生的原因,接着阐述了原子范数的定义和性质,说明了 ℓ_1 范数和核范数都可以看作是原子范数的特例.在此基础上综述了 Gridless CS 的理论框架和其关键技术问题,以及 Gridless CS 中原子范数最小化问题的求解方法,着重介绍了一维和多维 Gridless CS 的最新研究进展,最后分析探讨了利用 Gridless CS 重构循环平稳信号的循环自相关和循环谱的可行性和优势,并通过

仿真实验对重构效果进行了验证.

1 基不匹配问题

为便于描述,令原始信号 $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^N$,在对信号进行压缩和重构处理时,通常假设该信号在已知的变换基 ψ_0 下是稀疏的,即 $\mathbf{s} = \psi_0 \mathbf{x}$, $\psi_0 \in \mathbf{C}^{N \times N}$, $\mathbf{x}$ 是一个稀疏向量.而事实上,信号 $\mathbf{s}$ 在另一个变换基 ψ_1 下是稀疏的,即 $\mathbf{s} = \psi_1 \boldsymbol{\theta}$, $\psi_1 \in \mathbf{C}^{N \times N}$, $\boldsymbol{\theta}$ 是一个稀疏向量.基 ψ_1 是未知的,由真实的信号频率、波数、时延等实际参数决定,且 $\psi_0 \neq \psi_1$,那么 ψ_0 就无法作为稀疏表示信号 $\mathbf{s}$ 的变换基,以至于信号 $\mathbf{s}$ 的实际参数不会精确地落在由变换基 ψ_0 所划分的网格点上.因此,在稀疏表示信号时变换基之间存在的差异(即 ψ_0 与 ψ_1 之间的差异)称为基不匹配.

在上述问题中,稀疏向量 $\mathbf{x}$ 可以通过变换基的求逆运算得到,有

$$\mathbf{x} = \psi_0^{-1} \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\theta} = \psi_1^{-1} \mathbf{s} \quad (1)$$

此时, $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 之间存在如下的坐标变换

$$\mathbf{x} = \psi \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta} = \psi^{-1} \mathbf{x} \quad (2)$$

其中, $\psi = \psi_0^{-1} \psi_1 \in \mathbf{C}^{N \times N}$, ψ 表示了 ψ_0 与 ψ_1 之间的不匹配程度.若 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}$,则 ψ 为单位矩阵,即 $\psi_0 = \psi_1$,不存在基不匹配现象.

根据之前的描述,信号 $\mathbf{s}$ 事实上是在基 ψ_1 下稀疏,则由式(1)可知 $\boldsymbol{\theta}$ 在单位基 I 下是稀疏的.而许多研究却假设 $\mathbf{s}$ 在 ψ_0 下是稀疏的,则由式(1)和式(2)知, $\mathbf{x}$ 并不在单位基 I 下稀疏,而是在变换基 ψ 下稀疏.因此,基不匹配问题就是指, $\mathbf{x}$ 在一个未知的变换基 ψ 下稀疏,却假设其在单位基 I 下是稀疏的.这会带来什么样的影响?下面通过一个具体应用实例来说明这一问题^[24].

例如,语音或图像信号在离散傅里叶变换基(Discrete Fourier transform, DFT)下是稀疏的,稀疏系数表示了构成信号的频率成分.假设变换基 ψ_0 是一个 N 点 DFT 矩阵,其第 ℓ 列是一个范德蒙德向量,具体形式为 $\boldsymbol{\psi}_{0,\ell} = [1, e^{j2\pi\ell/N}, \dots, e^{j2\pi(N-1)\ell/N}]^T$,则 ψ_0 的表达式如式(3)所示.

不失一般性,假设真实的变换基 ψ_1 的第 ℓ 列的实际频率 θ_ℓ 与 ψ_0 相比频率偏移了 $\Delta\theta_\ell$, $0 \leq \Delta\theta_\ell < 2\pi/N$,则 ψ_1 的形式如式(4)所示.联立式(3)和式(4)可以得到 ψ 的表达式(5),其中, $L(\theta)$ 为 Dirichlet 核.

$$L(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\theta} = \frac{1}{N} e^{j\frac{\theta(N-1)}{2}} \frac{\sin(\frac{\theta N}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,N-1}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{j2\pi}{N}} & \dots & e^{\frac{j2\pi(N-1)}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{j2\pi(N-1)}{N}} & \dots & e^{\frac{j2\pi(N-1)^2}{N}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} [\psi_{1,0}, \dots, \psi_{1,N-1}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\Delta\theta_0} & e^{j(\frac{2\pi}{N} + \Delta\theta_1)} & \dots & e^{j(\frac{2\pi(N-1)}{N} + \Delta\theta_{N-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\Delta\theta_0(N-1)} & e^{j(\frac{2\pi}{N} + \Delta\theta_1)(N-1)} & \dots & e^{j(\frac{2\pi(N-1)}{N} + \Delta\theta_{N-1})(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} L(\Delta\theta_0) & L\left(\Delta\theta_1 - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) & \dots & L\left(\Delta\theta_{N-1} - \frac{2\pi}{N}\right) \\ L\left(\Delta\theta_0 - \frac{2\pi}{N}\right) & L(\Delta\theta_1) & \dots & L\left(\Delta\theta_{N-1} - \frac{2\pi \cdot 2}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\left(\Delta\theta_0 - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) & L\left(\Delta\theta_1 - \frac{2\pi(N-2)}{N}\right) & \dots & L(\Delta\theta_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

当 $|\theta| \leq \pi$ 时, 有 $|\sin(\theta/2)| \geq 2|\theta/2\pi|$, $|\theta| = 0$ 或 $|\theta| = \pi$ 时等号成立. 因此有 $|L(\theta)| \leq (\theta N/2\pi)^{-1}$, $L(0) = 1$, 也就是说 $(\theta N/2\pi)^{-1}$ 是 $|L(\theta)|$ 的包络, 这使得 ψ 的每一列在移位的过程中会造成实际频率 θ_ℓ 和 DFT 基 $2\pi\ell/N$ 之间的差异, 这种不匹配让假设模型 $\mathbf{s} = \psi_0 \mathbf{x}$ 中的表示向量 $\mathbf{x}$ 并不稀疏. 从式 (2) 来理解就是, 经过 ψ 的作用, 真正的参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 中的少量稀疏元素被分布到 $\mathbf{x}$ 的所有位置上, 即 $\mathbf{x}$ 是不稀疏的.

针对基不匹配问题的研究成果有很多, 根据求解思路的不同可以分为两大类, 一类是后处理法, 即已经出现基不匹配问题, 考虑如何尽可能降低其对重构性能或参数估计精度带来的影响. 例如, 文献 [27] 和文献 [30] 认为如果 ψ_0 和 ψ_1 之间的不匹配程度较小, 那么可以用重构的稀疏向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 来逼近真正的参数向量 $\boldsymbol{\theta}$, 它们之间的误差满足

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\theta}\|_2 \leq C_0 k^{-1/2} \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k\|_1 + C_1 \varepsilon$$

其中, C_0 、 C_1 和 ε 都是给定的常数, $\boldsymbol{\theta}_k$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的最佳 k 项逼近, $\|\cdot\|_p$ 表示向量的 p 范数. 与之类似的是, 文献 [24] 推导了重构的稀疏向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{x}$ 之间的误差边界为

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 k^{-1/2} \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k\|_1 + C_0 (N - k) k^{-1/2} \beta \|\boldsymbol{\theta}\|_2 + C_1 \varepsilon$$

文献 [18] 则提出了一种频域稀疏信号重构算法, 假设频域稀疏信号可以由多个正弦信号稀疏线性表

示, 但这些正弦信号的真实频率并不一定与 DFT 频率完全吻合, 因此采用过采样 DFT 框架提高重构精度. 在此框架下, 文献 [18] 给出一种“抑制模型” (Inhibition model) 来确保不会从过采样 DFT 矩阵中同时选择相邻原子对信号进行稀疏表示, 这在一定程度上缓解了基不匹配对重构精度的影响, 却依然是治标不治本. 那么更好的求解方法应该是连续建模法, 即在对稀疏域建模时直接采用连续处理方法, 而不对稀疏域进行离散化表示, 在一般的稀疏分析中, 都直接采用定义在 ℓ_2 空间的范数来度量稀疏参数. 要避免离散化处理, 最根本的方法是将范数定义在连续空间中, 这样就从源头上避免了基不匹配问题的发生. 原子范数利用原子集合凸包的连续特性来计算范数, 能够在约束信号稀疏特性的同时保证其参数空间的连续性, 从而为解决基不匹配问题奠定了坚实的基础.

2 原子范数

为了从本质上解决基不匹配问题, 研究者希望直接在连续参数空间中寻找最少的原子来表示给定信号. 因此考虑采用原子范数来刻画信号特征, 它被认为是解决欠定线性逆问题的最佳凸启发式方法.

原子范数的概念最先在文献 [31] 中提出, 它涵盖了许多常用范数, 如 ℓ_1 范数和核范数. 令 $\mathcal{A}$ 为一个原子集合, 若其凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 相对于原点是一个中心对称的紧集, 且包含原点作为内点, 这意味着 $\mathcal{A}$ 中的任一元素 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ 不会位于除 $\mathbf{a}$ 以外的其他元

素所构成的凸包 $\text{conv}(\mathcal{A} \setminus \mathbf{a})$ 内, 即 $\mathcal{A}$ 中的元素都是 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 的极值点, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ 当且仅当 $-\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. 此时由凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 的尺度函数定义的范数成为原子范数, 如图 1 (a) 所示, 用 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 表示, 则有

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} = \inf\{t > 0 : \mathbf{s} \in t \cdot \text{conv}(\mathcal{A})\} = \inf\left\{\sum_k c_k : \mathbf{s} = \sum_k c_k \mathbf{a}_k, c_k \geq 0, \mathbf{a}_k \in \mathcal{A}\right\} \quad (6)$$

由于式 (6) 的下界以原子系数 c_k 的和作为优化目标, 类似于 ℓ_1 范数, 因此式 (6) 也被称为原子 ℓ_1 范数. 当 $\mathcal{A}$ 是由单位范数且 1-稀疏原子构成的集合时, 原子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 即为 ℓ_1 范数; 当 $\mathcal{A}$ 是由单位范数且秩为 1 的矩阵构成的集合时, 原子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 即为核范数, 分别如图 1 (b) 和图 1 (c) 所示.

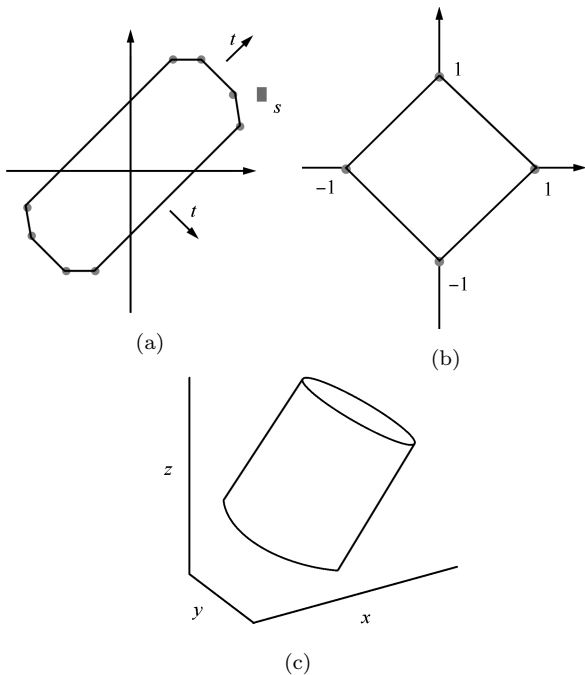


图 1 原子范数示意图

Fig. 1 The diagram of atomic norm

图 1 (a) 为原子范数示意图, 圆点描述了集合中的原子, 方块表示信号向量. (b) 和 (c) 给出了原子范数的两个特例, (b) 中的原子为单位范数的 1-稀疏向量, (c) 中的原子为单位范数的秩为 1 的矩阵. 从图 1 不难发现, ℓ_1 范数和核范数的单位球就是信号相应基向量所构成的凸包, 而对于原子范数来说, 原子集合中的原子就是用于构造任一信号的基本单元, 类似于稀疏信号恢复问题中的 1-稀疏基向量和矩阵填充问题中的秩为 1 的基矩阵, 那么凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 的低维平面同样对应的是由很少的相应原子所构成的信号, 因此原子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 实际上是

给集合 $\mathcal{A}$ 增加了稀疏约束. 这种约束方式将集合 $\mathcal{A}$ 看作一个描述连续变化参数的无限字典, 同时增加稀疏约束时没有引入离散化表示, 避免了基不匹配问题的产生. Tang 等指出, 原子范数具有半定规划 (Semidefinite programming, SDP) 性质, 采取线性半定规划理论方法就能在多项式时间内求解原子范数. 根据 Caratheodory 引理, 任何半正定 Toeplitz 矩阵都能进行 Vandermonde 分解, 如文献 [23] 中的引理 2.2, 从而将原子范数最小化问题转化为如下的半定规划问题, 如文献 [23] 中的引理 2.1:

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} = \inf\left\{\frac{1}{2N} \text{tr}(T(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}t : \begin{bmatrix} T(\mathbf{u}) & \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^H & t \end{bmatrix} \geq 0\right\} \quad (7)$$

其中, $T(\mathbf{u}) \in \mathbf{C}^{N \times N}$ 为 Toeplitz 矩阵, $T(\mathbf{u})$ 的第一行为 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N] \in \mathbf{C}^N$, 即

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ u_2^H & u_1 & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N^H & u_{N-1}^H & \cdots & u_1 \end{bmatrix}$$

3 一维无网格压缩感知

对于基不匹配问题来说, 直接从连续域中提取参数是一种“防患于未然”的解决思路, 尤其是对于压缩感知模型, 原子范数具有的优异性质既能构造出包含无限原子的基字典用于信号的稀疏表示, 又能避免相邻原子之间的相关性太强带来的 CS 重构性能下降的问题. 特别地, 针对缺失数据或压缩采样下的信号参数估计问题, 通过原子范数惩罚项可以约束信号本身的稀疏特性, 同时保证信号参数空间的连续性. 目前, 该领域的研究成果主要集中在不进行频域离散化的前提下多个谐波信号的频率估计问题^[23, 28, 32–34]. 考虑 k 个正弦信号, 对其进行 L 次观测, 有

$$s_{n\ell} = \sum_{i=1}^k c_{i\ell} e^{j2\pi f_i n}, \quad (n, \ell) \in \mathbf{J} \times \mathbf{L} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{J} = \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\mathbf{L} = \{1, 2, \dots, L\}$. 这 L 次观测得到的数据矩阵可以表示为 $S = [s_{n\ell}] \in \mathbf{C}^{N \times L}$, f_i 是第 i 个正弦信号频率, $c_{i\ell}$ 表示第 ℓ 次观测中第 i 个信号频率分量的幅度. 令 $\mathbf{T}$ 作为均匀采样点集合的子集, $\mathbf{T} \subset \mathbf{J}$, 其包含的元素个数

$|\mathbf{T}| = M \leq N$, 表示对每个观测向量的实际采样点数.

当观测数据矩阵存在缺失数据时, 即 $M < N$, 此时上述问题可以由一维无网格压缩感知模型来描述, 它能够从残余观测数据中恢复谐波分量的频率支撑集 $\{f_1, \dots, f_k\}$, 从而很容易得到相应谐波分量的幅度 c_{il} 以及缺失的观测数据. 因此, 按照观测向量 L 的个数可以将一维无网格压缩感知模型划分为两大类: 单测量矢量 (Single measurement vector, SMV) 模型^[16] 和多测量矢量 (Multiple measurement vector, MMV) 模型^[35]. MMV 模型需要观测数据具有特殊的先验结构信息——联合稀疏 (Joint sparsity), 即 L 个观测向量具有相同的 k 个谐波频率, 典型的应用是稀疏线性阵列 (Sparse linear array, SLA) 的 DOA (Direction of arrival) 估计问题^[36]. 而当 $L = 1$ 时, MMV 模型就简化为 SMV 模型, 此时上述频率恢复过程就是一个线谱估计问题, 这是一维无网格压缩感知的基础, 而且通过 SMV 模型也很容易推广到 MMV 模型, 因此下面着重介绍 SMV 框架下的一维无网格压缩感知模型.

考虑 k 个谐波信号叠加, 有

$$s_n = \sum_{i=1}^k c_i e^{j2\pi f_i n}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (9)$$

其中, $\{f_1, \dots, f_k\}$ 为归一化的频率, $\{f_1, \dots, f_k\} \subset [0, 1]$. 令 $\mathbf{J} = \{0, \dots, N-1\}$, 定义原子 $[\mathbf{a}(f, \phi)]_n = e^{j(2\pi f n + \phi)} \in \mathbf{C}^{|\mathbf{J}|}$, $f \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, 因此原子集合可以写成 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}(f, \phi) : f \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi)\}$. 根据式 (6) 的原子范数定义, 信号 $\mathbf{s}$ 的原子范数为

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} = \inf_{\substack{c_i \geq 0, f_i \in [0, 1] \\ \phi_i \in [0, 2\pi)}} \left\{ \sum_i c_i : \mathbf{s} = \sum_i c_i \mathbf{a}(f_i, \phi_i) \right\} \quad (10)$$

假设观测到的采样是从 $\{0, \dots, N-1\}$ 中随机选取大小为 M 的子集 $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{J}$, 可以利用下列的原子范数最小化问题来恢复缺失的采样

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{s}}} \|\tilde{\mathbf{s}}\|_{\mathcal{A}} \\ \text{s.t.} \quad \tilde{s}_n = s_n, \quad n \in \mathbf{T} \end{aligned} \quad (11)$$

由式 (7), 上式可以等价转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{s}}, t} \frac{1}{2|\mathbf{J}|} \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}t \\ \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{s}} \\ \tilde{\mathbf{s}}^H & t \end{bmatrix} \geq 0 \\ \tilde{s}_n = s_n, n \in \mathbf{T} \end{aligned} \quad (12)$$

在求解形如式 (12) 的半定规划问题时, 如果压缩测量数足够多, 同时多个谐波频率相互之间的间隔在一定范围之外, 那么通过式 (12) 就能精确恢复缺失的信号采样点以及确定各个谐波频率. 假设谐波信号的幅度符号为 $\text{sgn}(c_i) = c_i/|c_i|$, 各个谐波频率之间的最小间隔为 $\Delta_f = \min_{u \neq v} |f_u - f_v|$, Tang 等给出了如下的性能保证.

定理 1. 如文献 [23] 中的定理 2.3: 假设形如式 (9) 的谐波信号包含未知频率 $\Omega = \{f_1, \dots, f_k\} \subset [0, 1]$, 观测到的采样是从 $\{0, \dots, N-1\}$ 中随机选取大小为 M 的子集 $\mathbf{T}$, 各个谐波信号的 $\text{sgn}(c_i)$ 独立同分布且在单位圆上满足均匀分布. 如果各个谐波频率之间的最小间隔 $\Delta_f \geq 1/\lfloor (N-1)/4 \rfloor$ 时, 存在常数 C 使得观测的样点数

$$M \geq C \max \left\{ \log^2 \frac{N}{\delta}, k \log \frac{k}{\delta} \log \frac{N}{\delta} \right\}$$

就能通过半定规划求解, 保证以高概率 $1 - \delta$ 重构信号 $\mathbf{s}$ 并确定各个谐波频率.

利用现有的一些凸优化工具, 如 CVX^[37] 等, 即可求解半定规划式 (12), 得到原始信号的估计 $\tilde{\mathbf{s}}$. 然而如何根据 $\tilde{\mathbf{s}}$ 确定各个谐波频率似乎并不明确, 如果直接对 $\tilde{\mathbf{s}}$ 做傅里叶变换, 则又会陷入频域离散化的误区, 失去了引入原子范数带来的“无网格”优势. 为此, 研究者考虑利用原子范数的对偶范数来定位谐波频率.

对于每种范数来说都有相应的对偶范数, 与原始范数相比, 对偶范数通常具有一些有用的结构和性质, 因此被广泛用于许多具体问题的分析和应用. 原子范数的对偶范数等价于原子集合 $\mathcal{A}$ 的支撑集函数, 定义为

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{A}}^* = \sup_{\|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} \leq 1} \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle_R = \sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{a} \rangle_R \quad (13)$$

其中, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{a} \rangle_R = \text{Re}(\mathbf{a}^H \mathbf{t})$.

由此可得, 在优化问题式 (11) 中, 原子范数 $\|\tilde{\mathbf{s}}\|_{\mathcal{A}}$ 的对偶范数定义为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{A}}^* &= \sup_{\|\tilde{\mathbf{s}}\|_{\mathcal{A}} \leq 1} \langle \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{s}} \rangle_R = \\ &= \sup_{\substack{f \in [0, 1] \\ \phi \in [0, 2\pi)}} \langle \mathbf{q}, e^{j\phi} \mathbf{a}(f, 0) \rangle_R = \\ &= \sup_{f \in [0, 1]} |\langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(f, 0) \rangle| \end{aligned} \quad (14)$$

也就是说, 在此问题中对偶范数等价于多项式 $Q(z) = \sum_{n \in \mathbf{J}} q_n z^{-n}$ 在单位圆上的最大模, 而且由于原始问题只包含等式约束, 则原始和对偶问题之间存在强对偶性, 这意味着 $\tilde{\mathbf{s}}$ 和 $\mathbf{q}$ 分别是原始和对偶问题的最优解, 那么式 (11) 的对偶优化问题就

是求解多项式模值落在单位圆上的点^[23], 可以表示为

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{q}} \langle \mathbf{q}_T, \mathbf{s}_T \rangle_R \\ \text{s. t. } & \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{A}}^* \leq 1 \\ & \mathbf{q}_{T^c} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

定理 2. 如文献 [23] 中的定理 2.4: 假设集合 $\mathcal{A}$ 中的原子由 $[\mathbf{a}(f, 0)]_n = e^{j2\pi f n}$ 组成, 如果存在对偶多项式 $Q(f) = \langle \mathbf{q}, \mathbf{a}(f, 0) \rangle = \sum_{n \in \mathbf{J}} q_n e^{-j2\pi f n}$ 满足下列条件

$$\begin{aligned} Q(f_i) &= \text{sgn}(c_i), \forall f_i \in \Omega \\ |Q(f)| &< 1, \forall f \notin \Omega \\ q_n &= 0, \forall n \notin \mathbf{T} \end{aligned} \quad (16)$$

式 (11) 有唯一的最优解。

从定理 2 可以看出, 由于原始和对偶问题之间的强对偶性, 多项式 $Q(f)$ 作为一种对偶保证确保了式 (11) 求解出的 $\hat{\mathbf{s}}$ 是原始问题的最优解. 值得注意的是, 定理 2 给出了确定 $\hat{\mathbf{s}}$ 的谐波频率支撑集的计算方法. 首先通过快速傅里叶变换 (Fast Fourier transform) 实现多项式 $\hat{Q}(f) = \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{a}(f, 0) \rangle$ 的计算过程, 再寻找 $\hat{Q}(f)$ 模为 1 时的频率位置作为谐波频率支撑集. 傅里叶变换点数的多少意味着频域分辨率的高低, 在仿真实验中一般设置为 2^{24} 甚至更高, 如此高的频域分辨率足以精确定位频率支撑集, 使得实际参数和估计值之间的误差很小, 同时由于在建模过程中没有涉及到变换基, 如 DFT 等, 此时的高分辨率并不会降低 CS 重构性能. 一旦确定了频率支撑集, 就能通过求解最小二乘问题 $\min_{\mathbf{c}} \|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{F}\mathbf{c}\|_2^2$, $F_{nk} = \exp\{j2\pi n f_k\}$ 得到各个频率对应的系数.

图 2 给出了信噪比为 10 dB 时的对偶多项式值与频率支撑集关系, 我们利用 6 个频率分量构成的信号进行仿真. 横坐标表示归一化的信号频率, 纵坐标表示归一化的对偶多项式模值. 图中的虚线是将对偶多项式 $\hat{Q}(f) = \langle \hat{\mathbf{q}}, \mathbf{a}(f, 0) \rangle$ 的计算值取模, 再对 $|\hat{Q}(f)|$ 进行归一化处理, 圆圈表示实际的信号频率支撑集. 可以看出, 归一化后的模值 $|\hat{Q}(f)|$ 等于 1 时所对应的频率即为原始信号的频率支撑集. 因此只需寻找到对偶多项式模值达到最大值时对应的频率点, 就能确定原始信号的频率支撑集. 在没有噪声的条件下, 只要各个频率之间的最小间隔 $\Delta_f \geq 4/N$ 时, 利用上述方法确定的频率支撑集是非常精确的^[28], 而在有噪声的情况下估计出的频率支撑集也十分接近于真实频率支撑集, 如图 2 中的放大部分所示.

从频率支撑集的求解过程中得知, “无网格” 实际上是将网格划分的近似于 “连续” 般精细, 使得描

述信号参数空间的字典近似于 “无限”, 再利用原子范数及其对偶范数的优异性质, 巧妙地解决了基不匹配和压缩感知等约束条件 (Restricted isometry property, RIP) 之间的矛盾, 无需在两者之中采用折衷的方法, 从而达到精确恢复原始信号和估计信号参数的目标.

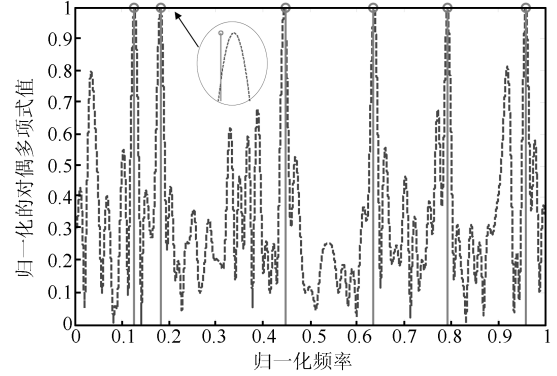


图 2 一维对偶多项式与频率支撑集的关系

Fig. 2 The relationship between dual polynomial and frequency support

文献 [38–39] 进一步将上述研究成果扩展到有噪声的情况, 提出一种原子范数去噪方法 (Atomic norm denoising) 用于估计线谱参数. 假设带噪信号为 $\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$, 从观测值 $\mathbf{y}$ 中对 $\mathbf{s}$ 进行估计的过程成为原子范数软门限问题 (Atomic norm soft thresholding, AST), 有

$$\min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|_2^2 + \tau \|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} \quad (17)$$

其中, $\tau = \sigma \sqrt{N \log N}$. 同理, 将式 (17) 转化为半定规划问题, 就可以通过交替方向乘子法 (Alternating direction method of multipliers, ADMM)^[40] 等方法进行求解.

文献 [22] 将 AST 方法推广到缺失数据的情况下的模型阶数和信号频率估计问题, 并给出在缺失数据条件下估计噪声方差的方法.

4 多维无网格压缩感知

在许多信号处理应用中都会遇到二维乃至高维参数的估计问题, 如在雷达、声呐等领域, 时延与多普勒频移的联合估计是目标跟踪和定位的重要技术手段, 在无线通信系统中, 精确估计信道状态信息对信道感知以及提升系统容量起着至关重要的作用, 而无线信道中的每条路径是由时延、多普勒频移和衰减三个参数决定的. 因此, 采用无网格压缩感知处理高维参数估计问题引起了广泛关注.

在二维无网格压缩感知^[41] 中, 考虑由 k 个二维正弦信号组成的时域信号 $\mathbf{S} \in \mathbf{C}^{N_1 \times N_2}$, 每个元素

$s_{m,n}$ 可以表示为

$$s_{m,n} = \sum_{i=1}^k c_i y_i^m z_i^n = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{i=1}^k c_i e^{j2\pi(m,n)\mathbf{f}_i} \quad (18)$$

其中, $(m,n) \in J = \{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, \dots, N_2 - 1\}$, $\mathbf{f}_i = (f_{1i}, f_{2i})^T \in [0, 1]^2$, 令 $y_i = (1/\sqrt{N_1}) e^{j2\pi f_{1i}}$, $z_i = (1/\sqrt{N_2}) e^{j2\pi f_{2i}}$, 可以将式 (18) 转化为矩阵形式

$$S = YCZ^T \quad (19)$$

其中, $Y = [\mathbf{a}(f_{11}), \dots, \mathbf{a}(f_{1k})] \in \mathbf{C}^{N_1 \times k}$, $\mathbf{a}(f_{1i}) = [1, y_i, \dots, y_i^{N_1-1}]^T$, $Z = [\mathbf{b}(f_{21}), \dots, \mathbf{b}(f_{2k})] \in \mathbf{C}^{N_2 \times k}$, $\mathbf{b}(f_{2i}) = [1, z_i, \dots, z_i^{N_2-1}]^T$, $C = \text{diag}\{c_1, \dots, c_k\} = \text{diag}\{\mathbf{c}\} \in \mathbf{C}^{k \times k}$. 将式 (19) 两边做拉直运算, 可得

$$\mathbf{s} = \text{vec}(S^T) = (Y \otimes Z) \mathbf{c} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{a}(f_{1i}) \otimes \mathbf{b}(f_{2i}) = \sum_{i=1}^k c_i \mathcal{F}_i \quad (20)$$

$\mathcal{F}_i = \mathbf{a}(f_{1i}) \otimes \mathbf{b}(f_{2i})$, $\otimes$ 表示 Kronecker 积, 此时定义原子集合为 $\mathcal{A} = \{\mathcal{F} | \mathcal{F} \in [0, 1]^2\}$, 则原子范数可以定义为 $\|\mathbf{s}\|_{\mathcal{A}} = \inf \{\sum_i c_i | \mathbf{s} = \sum_i c_i \mathcal{F}_i\}$, 因此目标是求解下列原子范数最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{s}}} \|\tilde{\mathbf{s}}\|_{\mathcal{A}} \\ \text{s.t. } \mathcal{P}_{\Omega}(\tilde{\mathbf{s}}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (21)$$

$\mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{s})$ 表示观测到的采样是数拉直处理后信号 $\mathbf{s}$ 的一部分, $\Omega \in J$, $\mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{s}) = P \odot \mathbf{s}$, $P \in \{0, 1\}^{N_1 N_2 \times 1}$ 表示一个二值掩蔽矩阵. 自然地, 将式 (21) 转化为相应的半定规划进行求解

$$\begin{aligned} \min_{T, \tilde{\mathbf{s}}, t} \frac{1}{2\sqrt{N_1 N_2}} \text{tr}(T) + \frac{1}{2}t \\ \text{s.t. } \begin{bmatrix} T & \tilde{\mathbf{s}} \\ \tilde{\mathbf{s}}^H & t \end{bmatrix} \geq 0, \mathcal{P}_{\Omega}(\tilde{\mathbf{s}}) = \mathcal{P}_{\Omega}(\mathbf{s}) \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $T \in \mathbf{C}^{(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)}$ 是双重的块 Toeplitz 矩阵, 它是 $N_1 \times N_1$ 维的块 Toeplitz 矩阵, 每个块都是 $N_2 \times N_2$ 维的 Toeplitz 矩阵, 即

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & T_{-1} & \cdots & T_{-(N_1-1)} \\ T_1 & T_0 & \cdots & T_{-(N_1-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N_1-1} & T_{N_1-2} & \cdots & T_0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

对每个块 T_l 来说, 有

$$T_l = \begin{bmatrix} s_{l,0} & s_{l,-1} & \cdots & s_{l, -(N_2-1)} \\ s_{l,1} & s_{l,0} & \cdots & s_{l, -(N_2-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{l, N_2-1} & s_{l, N_2-2} & \cdots & s_{l,0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

但是与一维无网格压缩感知不同的是, 式 (21) 与式 (22) 之间的等价转化通常并不成立. 在一维问题中, 原子范数最小化问题和半定规划之间的等价关系是建立在 Toeplitz 矩阵的 Vandemonde 分解基础上的, 而 Caratheodory 引理很难推广到多维模型, 无法给出块 Toeplitz 矩阵的 Vandemonde 分解性质. 对此, 文献 [41] 并没有给出这一问题的严格推导和证明, 只是通过仿真实验验证了式 (22) 的可行性和性能, 在频率最小间隔 $\Delta_f \geq 1/\lfloor (N-1)/4 \rfloor$ 时, 利用 $O(k \log k \log N)$ 个采样即可精确重构二维信号.

为了更好地处理多维信号重构的问题, 文献 [42] 建立了多维问题的半定规划模型, 证明了多维无网格框架下的原子范数最小化问题与相应半定规划的等价转化关系, 给出了多维重构问题的求解方法, 所提方法能够精确重构任意 D 维 ($D \geq 2$) 无网格频率信号.

总的来说, 多维无网格压缩感知的研究还处在起步阶段, 研究内容主要集中在将一维无网格压缩感知理论框架推广到多维模型以及寻找更为快速有效的半定规划求解方法, 目前还十分缺乏与实际应用相结合来解决多维信号参数估计问题的研究成果, 这应成为未来多维无网格压缩感知的主要研究方向.

5 无网格压缩感知的应用

直接从连续空间中估计信号参数的特性使得无网格压缩感知具有广阔的发展潜力和应用前景, 从上述理论介绍和分析中可以看出, 无网格压缩感知方法无需构造可压缩信号的变换基, 也不需要事先获得信号稀疏度、模型阶数等先验信息, 具有重构精度高、计算复杂度较低的优点, 可被应用于以下领域:

1) 矩阵填充

矩阵填充是随机约束下的仿射秩最小问题, 在图像处理、稀疏信道估计、传感器网络等方面有着广泛的应用. 根据矩阵的低秩特性, 即矩阵特征值的稀疏性, 从矩阵的部分元素重构该矩阵所有元素, 实现低秩矩阵填充. 假设一个秩为 r 的低秩矩阵 $X \in \mathbf{C}^{N \times N}$, 令 $P_{\Omega} : \mathbf{C}^{N \times N} \rightarrow \mathbf{C}^{N \times N}$ 是一个将矩

阵中处在索引集合 Ω 之外的元素置为 0 的投影, 即

$$Y_{i,j} = \begin{cases} X_{i,j}, & (i,j) \in \Omega \\ 0, & (i,j) \notin \Omega \end{cases}$$

矩阵 Y 相当于去掉 X 的部分观测值, 当这些部分观测值是从矩阵 X 中随机选取的元素时, 可以通过下列凸优化问题从 Y 重构出 X , 有

$$\begin{aligned} \min_X & \|X\|_{\mathcal{A},0} \\ \text{s.t.} & P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(Y) \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\|X\|_{\mathcal{A},0}$ 是原子 ℓ_0 范数, 定义为 $\|X\|_{\mathcal{A},0} = \inf\{K : X = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \in \mathcal{A}, c_k > 0\}$, $\mathcal{A}$ 是原子集合或连续字典. 由于原子 ℓ_0 范数的求解同样是一个 NP 难问题, 文献 [43] 指出 $\|X\|_{\mathcal{A},0}$ 等价于下列的秩最小化问题的最优解:

$$\begin{aligned} \min_{W \in \mathbb{C}^{r \times r}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N, U \geq 0} & \text{rank}(U) \\ \text{s.t.} & U = \begin{bmatrix} W & X^H \\ X & T(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此, 低秩矩阵填充问题式 (25) 等价于下列的秩最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X, W, \mathbf{u}, U \geq 0} & \text{rank}(U) \\ \text{s.t.} & U = \begin{bmatrix} W & X^H \\ X & T(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \\ & P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(Y) \end{aligned} \quad (26)$$

如果进一步对优化目标进行凸松弛, 将原子 ℓ_0 范数松弛为原子 ℓ_1 范数 (即式 (6) 定义的原子范数), 则优化问题式 (25) 转化为利用半定规划求解迹最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{X, W, \mathbf{u}, U \geq 0} & \text{tr}(U) \\ \text{s.t.} & U = \begin{bmatrix} W & X^H \\ X & T(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \\ & P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(Y) \end{aligned} \quad (27)$$

通过求解式 (27) 可以从部分观测数据中恢复出缺失数据, 适用于压缩采样条件下的数据恢复和参数估计问题, 已被广泛应用于 DOA^[44] 估计等阵列信号处理问题中^[45-48], 解决了离散化角频率域引起的估计性能恶化的问题. 文献 [49] 则将该思想扩展到分布式压缩感知框架中, 使其适用于 MIMO 通信系统、雷达、多天线等大规模传感器系统.

2) 循环平稳信号处理

在通信、导航和雷达等系统中经常遇到的许多信号是循环平稳信号^[50], 它们的特定阶统计特征参

数随时间周期性变化, 如各种正弦波的幅度、相位、频率调制信号、频率键控信号以及雷达周期扫描过程中产生的信号. 谱相关理论^[51-52] 指出循环自相关函数和循环谱密度函数^[53] 是分析信号循环平稳特性的重要数学工具. 因此, 高精度、快速求解循环自相关和循环谱的方法是循环平稳信号的检测和参数估计技术的重要基础.

近年来, 大量研究将压缩感知理论运用到循环自相关和循环谱的重构问题中. 文献 [54] 提出一种循环自相关的盲估计方法, 只利用很短观测时间内的采样点重构循环自相关. 与传统方法相比, 该方法的估计误差大大降低. 在此基础上, 文献 [55] 深入挖掘循环自相关的本质特点, 提出一种基于字典的循环自相关重构模型, 用字典来描述循环频率结构, 包括零循环频率和非零循环频率, 并将现有对循环自相关特性的理解作为先验信息加入到优化问题的约束条件中进行求解. 采用该方法估计出的循环自相关, 无论从整体误差还是循环频率处的峰值误差都有一定程度的降低.

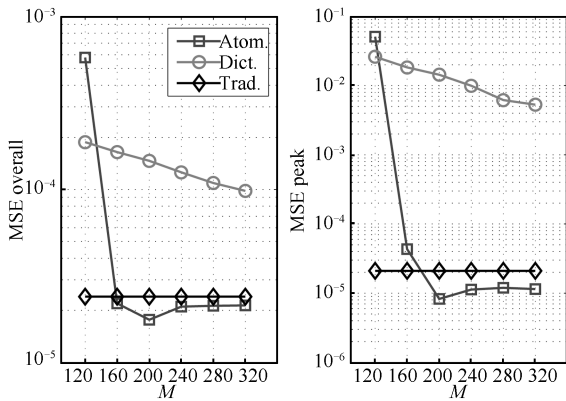
然而, 这些方法都不可避免地将连续循环频率域离散化成有限个网格点, 导致基不匹配问题. 因此我们提出一种基于原子范数最小化的循环自相关无网格重构方法^[56], 适用于非整数周期的循环频率估计. 算法的性能用最小均方误差 (Mean square error, MSE) 来衡量, 整体重构误差和循环频率处的峰值重构误差分别定义为

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{overall}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left| \hat{\mathbf{R}}[i] \right| - |\mathbf{R}[i]| \right)^2 \\ \text{MSE}_{\text{peak}} &= \frac{1}{N_{\text{peak}}} \sum_{i \in \mathcal{S}} \left(\left| \hat{\mathbf{R}}[i] \right| - |\mathbf{R}[i]| \right)^2 \end{aligned}$$

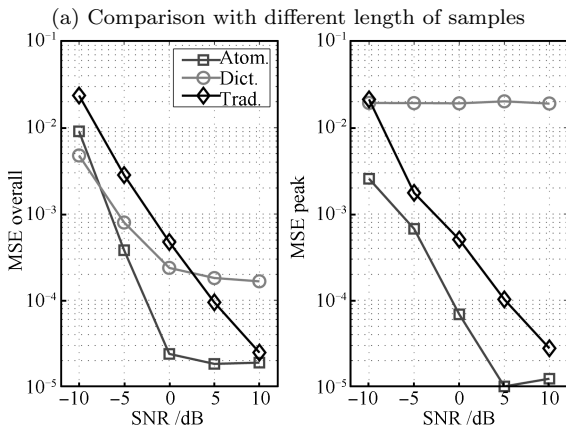
其中, $\mathbf{R}[i]$ 和 $\hat{\mathbf{R}}[i]$ 分别表示原始和重构的循环自相关函数, $\mathcal{S}$ 表示峰值点集合, N_{peak} 表示峰值点个数. 所提算法 (Atom.) 与两种方法进行比较, 一种是传统循环自相关计算方法 (Trad.), 利用整个观测时间内的所有采样点去计算循环自相关函数, 另一种是基于字典的循环自相关重构方法 (Dict.)^[55]. 在图 3 的仿真中 $N = 2000$, $N_{\text{peak}} = 8$. 可以看出, 同样是基于压缩采样的处理方法, 由于在采用原子范数对循环频率域进行建模时考虑到了循环频率域的连续性, 同时原子范数最小化问题的求解本身就是一个去噪过程, 因此所提算法的性能在不同压缩采样点数 M 和不同信噪比 SNR 条件下均有较大提升.

对于循环平稳信号, 其循环自相关函数与循环谱密度函数是一对傅里叶变换对. 根据之前的分析, Dirichlet 核引起的谱溢出同样会造成基不匹配问题, 另外现有的大多数循环谱处理方法都是在二维下进行的, 即将二维的循环谱拉直成一个一维向

量, 再利用循环谱的结构特性对其进行重构. 文献 [57] 利用循环平稳信号相关矩阵具有块 Toeplitz 结构的特点, 刻画了循环平稳信号相关矩阵与压缩采样的相关矩阵之间的线性关系, 再根据重构出的信号相关矩阵估计循环谱. 文献 [58] 重点关注多陪集采样^[59] 和调制宽带转换器 (Modulated wideband converter, MWC)^[11] 这两种不同的压缩采样机制, 给出了宽带信号压缩采样的频谱与循环谱之间的关系, 研究了在稀疏度未知以及非稀疏条件下的循环谱重构问题. 文献 [60–61] 也考虑了非稀疏条件下的循环谱重构, 给出了随机采样的相关矩阵与循环谱之间的关系.



(a) 不同压缩采样数下的算法性能比较



(b) 不同信噪比下的算法性能比较

(b) Comparisons with different SNRs

图 3 基于原子范数最小化的循环自相关重构算法性能 (MSE overall 表示循环自相关的整体重构误差, MSE peak 表示循环频率处的峰值重构误差)

Fig. 3 Performance of atomic norm based cyclic autocorrelation reconstruction (MSE overall represents the whole MSE and MSE peak represents the MSE at the peaks of cycle frequencies.)

另外, 循环平稳信号处理在许多工程领域也得到了广泛应用, 如齿轮、轴承的故障分析等, 在处理

过程中引入无网格压缩感知, 可以有效降低数据采样和存储负担, 提高故障特征识别和故障定位的精度, 为机械故障诊断提供了有效的处理工具.

3) 其他领域

除了上述应用之外, 频谱估计也是无网格压缩感知的重要应用领域之一. 文献 [62] 建立了连续的 MMV 模型, 利用很少的采样点就可以同时重构频率支撑集相同的多个谱稀疏信号. 文献 [63] 考虑块稀疏的频谱结构, 提出一种连续域的超分辨率频谱估计方法. 文献 [64] 关注的是单快拍测量条件下 MUSIC 算法对连续频谱估计的稳定性分析. 为实现信号参数的联合估计, 文献 [65–66] 分别基于模型选择, 从压缩测量值中估计频域稀疏信号的频率、幅度和相位等参数信息, 克服了参数空间字典原子相干性和估计精度之间的矛盾. 此外, 无网格压缩感知还被引入到线性系统辨识 (Linear system identification, LSI)^[67]、二维谐波恢复^[68]、雷达成像^[69–70]、地面运动目标显示 (Ground moving target indication, GMTI)^[71]、移动通信^[72] 等领域.

6 结论与展望

在压缩感知理论应用到许多领域的过程中, 为了便于分析处理, 大量研究把连续参数空间进行离散化处理, 将整个参数空间建模成为有限个网格, 从而导致变换基不匹配的后果. 本文旨在通过对当前最新研究成果的详细介绍, 寻找到更多能够发挥“无网格”优势的实际应用, 为未来的研究思路和发展方向奠定良好的基础. 本文重点阐述了无网格压缩感知的基本理论和关键技术问题, 探讨了无网格压缩感知在信号处理等领域中的研究现状和应用前景, 并尝试解决了压缩采样条件下的循环自相关重构问题, 取得了较好的效果.

从离散到连续, 从一维到高维, 无网格压缩感知的理论框架已经成型, 但将此研究成果推向实际应用还有很长的路要走, 应用研究还处在起步阶段, 仍有许多值得进一步研究的问题:

1) 原子范数的求解依赖于半定规划, 半定规划是一个非光滑凸优化问题, 虽然有内点法作为较为成熟有效的求解算法, 但在面对大规模实际问题时, 内点法存在占用内存大、复杂度高等局限性. 因此, 针对具体应用领域提出更强的半定规划松弛, 并据此设计出更好的近似求解算法具有重要的理论意义和实际价值.

2) 虽然目前已经有许多研究利用无网格压缩感知解决实际问题, 但大多数方法仍然集中在一维模型的研究上, 如何将高维无网格压缩感知的优势应用在对信号多个维度上的参数进行联合估计问题上, 是一个重要的研究内容. 另一方面, 除了本文提到

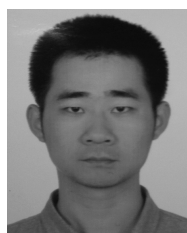
的研究领域, 将“无网格”的思想投入到更多的实际应用中去, 甚至利用“无网格”的思想研制出试验系统、原型样机等, 都是该研究方向的有益尝试。

References

- Baraniuk R G. Compressive sensing [lecture notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, **24**(4): 118–121
- Candes E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, **25**(2): 21–30
- Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289–1306
- Theodoridis S, Kopsinis Y, Slavakis K. Sparsity-aware learning and compressed sensing: an overview. *Academic Press Library in Signal Processing*. New York: Academic Press, 2012. 1271–1377
- Davenport M A, Boufounos P T, Wakin M B, Baraniuk R G. Signal processing with compressive measurements. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 445–460
- Ramasamy D, Venkateswaran S, Madhow U. Compressive parameter estimation in AWGN. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(8): 2012–2027
- Chen X S, Zhang X W, Yang J B, Sun M, Yang W W. Cramer-rao bounds for compressive frequency estimation. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications & Computer Sciences*, 2015, **98**(3): 874–877
- Huang H, Misra S, Tang W, Barani H, Al-Azzawi H. Applications of compressed sensing in communications networks [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1305.3002>, May 14, 2013.
- Willett R M, Marcia R F, Nichols J M. Compressed sensing for practical optical imaging systems: a tutorial. *Optical Engineering*, 2011, **50**(7): 072601
- Mishali M, Eldar Y C. Wideband spectrum sensing at sub-Nyquist rates [applications corner]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, **28**(4): 102–135
- Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 375–391
- Elad M. *Sparse and Redundant Representations: from Theory to Applications in Signal and Image Processing*. New York: Springer, 2010. 1–10
- Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2003, **100**(5): 2197–2202
- Stojnic M, Xu W Y, Hassibi B. Compressed sensing of approximately sparse signals. In: Proceedings of the 2008 IEEE International Symposium on Information Theory. Toronto, Canada: IEEE, 2008. 2182–2186
- Stoica P, Babu P. Sparse estimation of spectral lines: grid selection problems and their solutions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, **60**(2): 962–967
- Stoica P, Moses R L. *Spectral Analysis of Signals*. New Jersey: Prentice Hall, 2005. 1–12
- Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging. In: Proceedings of the 2007 IEEE Radar Conference. Boston, USA: IEEE, 2007. 128–133
- Duarte M F, Baraniuk R G. Spectral compressive sensing. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2013, **35**(1): 111–129
- Bajwa W U, Haupt J, Sayeed A M, Nowak R. Compressed channel sensing: a new approach to estimating sparse multipath channels. *Proceedings of the IEEE*, 2010, **98**(6): 1058–1076
- Herman M A, Strohmer T. High-resolution radar via compressed sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(6): 2275–2284
- Malioutov D, Cetin M, Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, **53**(8): 3010–3022
- Yang Z, Xie L H. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **63**(12): 3139–3153
- Tang G G, Bhaskar B N, Shah P, Recht B. Compressed sensing off the grid. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, **59**(11): 7465–7490
- Chi Y J, Scharf L L, Pezeshki A, Calderbank A R. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(5): 2182–2195
- Herman M A, Strohmer T. General perturbations in compressed sensing. In: Proceedings of Workshop on Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations. Saint-Malo, France: IEEE, 2009. 145–149
- Herrman M A, Strohmer T. General perturbations of sparse signals in compressed sensing. In: Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Sampling Theory and Applications. Marseilles, France: IEEE, 2009. 273–276
- Herman M A, Needell D. Mixed operators in compressed sensing. In: Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems. Princeton, NJ: IEEE, 2010. 1–6
- Candés E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 2014, **67**(6): 906–956
- Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, Willsky A S. The convex algebraic geometry of linear inverse problems. In: Proceedings of the 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Allerton, USA: IEEE, 2010. 699–703
- Herman M A, Strohmer T. General deviants: an analysis of perturbations in compressed sensing. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, **4**(2): 342–349
- Chandrasekaran V, Recht B, Parrilo P A, Willsky A S. The convex geometry of linear inverse problems. *Foundations of Computational Mathematics*, 2012, **12**(6): 805–849
- Candés E J, Fernandez-Granda C. Super-resolution from noisy data. *Journal of Fourier Analysis & Applications*, 2013, **19**(6): 1229–1254
- Azais J M, de Castro Y, Gamboa F. Spike detection from inaccurate samplings. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2015, **38**(2): 177–195
- Chen Y X, Chi Y J. Robust spectral compressed sensing via structured matrix completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, **60**(10): 6576–6601

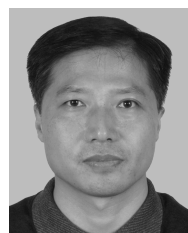
- 35 Eldar Y C, Rauhut H. Average case analysis of multichannel sparse recovery using convex relaxation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, **56**(1): 505–519
- 36 Liang Y J, Ying R D, Lu Z Q, Liu P L. Off-grid direction of arrival estimation based on joint spatial sparsity for distributed sparse linear arrays. *Sensors*, 2014, **14**(11): 21981–22000
- 37 Grant M, Boyd S P. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming. *Global Optimization*, 2014. 155–210
- 38 Bhaskar B N, Tang G G, Recht B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(23): 5987–5999
- 39 Bhaskar B N, Recht B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation. In: Proceedings of the 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. Monticello, USA: IEEE, 2011. 261–268
- 40 Boyd S, Parikh N, Chu E, Peleato B, Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations & Trends in Machine Learning*, 2011, **3**(1): 1–122
- 41 Chi Y J, Chen Y X. Compressive recovery of 2-D off-grid frequencies. In: Proceedings of the 2013 Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, USA: IEEE, 2013. 687–691
- 42 Xu W Y, Cai J F, Mishra K V, Cho M, Kruger A. Precise semidefinite programming formulation of atomic norm minimization for recovering d -dimensional ($d \geq 2$) off-the-grid frequencies. In: Proceedings of the 2014 IEEE Workshop on Information Theory and Applications. San Diego, USA: IEEE, 2014. 1–4
- 43 Yang Z, Xie L H. Continuous compressed sensing with a single or multiple measurement vectors. In: Proceedings of the 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing. Gold Coast, USA: IEEE, 2014. 288–291
- 44 Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, **13**(4): 67–94
- 45 Yang Z, Xie L H, Zhang C S. A discretization-free sparse and parametric approach for linear array signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(19): 4959–4973
- 46 Ibrahim M, Romer F, Aliev R, Del Galdo G, Thoma R S. On the estimation of grid offsets in CS-based direction-of-arrival estimation. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, Italy: IEEE, 2014. 6776–6780
- 47 Liu L, Wei P. Off-grid DOA estimation based on analysis of the convexity of maximum likelihood function [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1412.6720>, December 21, 2014
- 48 Gretsistas A, Plumbley M D. An alternating descent algorithm for the off-grid DOA estimation problem with sparsity constraints. In: Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference. Bucharest, Romania: IEEE, 2012. 874–878
- 49 Lu Z Q, Ying R D, Jiang S X, Liu P L, Yu M X. Distributed compressed sensing off the grid. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, **22**(1): 105–109
- 50 Gardner W A. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1991, **8**(2): 14–36
- 51 Gardner W A. Spectral correlation of modulated signals: Part I – analog modulation. *IEEE Transactions on Communications*, 1987, **35**(6): 584–594
- 52 Gardner W A, Brown W, Chen C K. Spectral correlation of modulated signals: Part II – digital modulation. *IEEE Transactions on Communications*, 1987, **35**(6): 595–601
- 53 Gardner W A. Measurement of spectral correlation. *IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing*, 1986, **34**(5): 1111–1123
- 54 Tian Z. Cyclic feature based wideband spectrum sensing using compressive sampling. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Communications. Kyoto, Japan: IEEE, 2011. 1–5
- 55 Bollig A, Mathar R. Dictionary-based reconstruction of the cyclic autocorrelation via ℓ_1 -minimization for cyclostationary spectrum sensing. In: Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vancouver, Canada: IEEE, 2013. 4908–4912
- 56 Chen X S, Zhang X W, Yang J B, Qiao L. Gridless sparse reconstruction for the cyclic autocorrelation estimation. In: Proceedings of IEEE International Conference on Advanced Communication Technology. PyeongChang, Korea (South): IEEE, 2016. 254–259
- 57 Ariananda D D, Leus G. Non-uniform sampling for compressive cyclic spectrum reconstruction. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, Italy: IEEE, 2014. 41–45
- 58 Cohen D, Rebeiz E, Eldar Y C, Cabric D. Cyclic spectrum reconstruction and cyclostationary detection from sub-Nyquist samples. In: Proceedings of the 14th IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications. Darmstadt, Germany: IEEE, 2013. 425–429
- 59 Mishali M, Eldar Y C. Blind multiband signal reconstruction: compressed sensing for analog signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(3): 993–1009
- 60 Leus G, Tian Z. Recovering second-order statistics from compressive measurements. In: Proceedings of the 4th IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing. San Juan, Puerto Rico: IEEE, 2011. 337–340
- 61 Tian Z, Tafesse Y, Sadler B M. Cyclic feature detection with sub-Nyquist sampling for wideband spectrum sensing. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2012, **6**(1): 58–69
- 62 Chi Y J. Joint sparsity recovery for spectral compressed sensing. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, Italy: IEEE, 2014. 3938–3942
- 63 Mishra K V, Cho M, Kruger A, Xu W Y. Super-resolution line spectrum estimation with block priors. In: Proceedings of the 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, USA: IEEE, 2014. 1211–1215
- 64 Liao W J, Fannjiang A. MUSIC for single-snapshot spectral estimation: stability and super-resolution. *Applied & Computational Harmonic Analysis*, 2016, **40**(1): 33–67

- 65 Lu Z Q, Ying R D, Jiang S X, Zhang Z H, Liu P L, Yu W X. Spectral compressive sensing with model selection. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, Italy: IEEE, 2014. 1045–1049
- 66 Nielsen J K, Christensen M G, Jensen S H. Joint sparsity and frequency estimation for spectral compressive sensing. In: Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Florence, Italy: IEEE, 2014. 1035–1039
- 67 Pillonetto G, Chen T S, Chiuso A, de Nicolao G, Ljung L. Regularized linear system identification using atomic, nuclear and kernel-based norms: the role of the stability constraint [Online], available: <http://arxiv.org/abs/1507.00564>, July 2, 2015
- 68 Chi Y J, Chen Y X. Compressive two-dimensional harmonic retrieval via atomic norm minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, **63**(4): 1030–1042
- 69 Liu C C, Ding L, Chen W D. A correction and generalization to the sparse learning via iterative minimization method for target off the grid in MIMO radar imaging. In: Proceedings of the 46th IEEE Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers. Pacific Grove, USA: IEEE, 2012. 895–899
- 70 Fannjiang A, Tseng H C. Compressive radar with off-grid targets: a perturbation approach. *Inverse Problems*, 2013, **29**(5): 054008
- 71 Prünke L. Off-grid compressed sensing for GMTI using SAR images. In: Proceedings of 2013 Conference on Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations. Lausanne, Switzerland: CADMOS, 2013. 248–251
- 72 Ranganathan K. Enabling off-the-grid telephony: an adaptive probabilistic model for broadcasting in ad-hoc mobile phone networks. *Simulation Modelling Practice & Theory*, 2014, **49**: 73–84



陈栩杉 解放军理工大学指挥信息系统学院博士研究生. 2012 年获得解放军理工大学硕士学位. 主要研究方向为压缩感知, 压缩域信号处理, 宽带模拟信息转换器. E-mail: chenxushan87@163.com
(**CHEN Xu-Shan** Ph.D. candidate at the College of Command Information System, Chinese People's Liberation Army University of Science and Technology. He received his master degree from Chinese People's Liberation Army University of Science and Technology in 2012. His research interest covers compressed sensing, compressive

signal processing and wideband analog-to-information converter.)



张雄伟 解放军理工大学指挥信息系统学院教授. 1992 年获得南京通信工程学院博士学位. 主要研究方向为智能信息处理, 语音与图像信号处理, 数字通信.

E-mail: xwzhang9898@163.com

(**ZHANG Xiong-Wei** Professor at the College of Command Information System, Chinese People's Liberation

Army University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from Nanjing Institute of Communication Engineering in 1992. His research interest covers intelligence information processing, speech and image signal processing and telecommunication systems.)



杨吉斌 解放军理工大学指挥信息系统学院副教授. 2006 年获得解放军理工大学博士学位. 主要研究方向为多媒体信号处理, 压缩感知. 本文通信作者.

E-mail: yjbice@sina.com

(**YANG Ji-Bin** Associate professor at the College of Command Information System, Chinese People's Liberation

Army University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from Chinese People's Liberation Army University of Science and Technology in 2006. His research interest covers multimedia signal processing and compressed sensing. Corresponding author of this paper.)



孙蒙 解放军理工大学指挥信息系统学院讲师. 2012 年获得比利时鲁汶大学博士学位. 主要研究方向为语音信号处理, 无监督/半监督机器学习, 模式识别.

E-mail: summengcccjs@163.com

(**SUN Meng** Lecturer at the College of Command Information System, Chinese People's Liberation Army Uni-

versity of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from Katholieke University of Leuven in 2012. His research interest covers speech processing, unsupervised/semi-supervised machine learning and pattern recognition.)