第 42 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 42, No. 1
2016 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA January, 2016

基于伪谱法的双摆吊车时间最优消摆轨迹规划策略

陈 鹤 [1,2] 方勇纯 [1,2] 孙 宁 [1,2] 钱彧哲 [1,2]

摘 要 在工业生产过程中, 桥式吊车系统经常会体现出双摆系统的特性, 导致更多欠驱动状态量的出现, 增大控制难度. 基于此, 论文提出了一种针对双摆桥式吊车系统的时间最优轨迹规划方法, 可以得到全局时间最优且具有消摆能力的轨迹. 具体而言, 为方便地构造以时间为代价函数的优化问题, 首先对系统运动学模型进行相应的变换; 在此基础上, 考虑包括两级摆角及台车速度和加速度上限值在内的多种约束, 构造出相应的优化问题; 然后, 利用高斯伪谱法 (Gauss-pseudospectral method, GPM) 将该带约束的优化问题转化为更易于求解的非线性规划问题, 且在转化过程中, 可以非常方便地考虑轨迹约束. 求解该非线性规划问题, 即可得到时间最优的台车轨迹. 不同于已有的大多数方法, 该方法可获得全局时间最优的结果. 最后, 通过仿真与实验结果验证了这种时间最优轨迹规划方法具有满意的控制性能.

关键词 双摆吊车系统, 时间最优, 轨迹规划, 高斯伪谱法

引用格式 陈鹤, 方勇纯, 孙宁, 钱彧哲. 基于伪谱法的双摆吊车时间最优消摆轨迹规划策略. 自动化学报, 2016, **42**(1): 153−160

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150307

Pseudospectral Method Based Time Optimal Anti-swing Trajectory Planning for Double Pendulum Crane Systems

CHEN He[1,2] FANG Yong-Chun[1,2] SUN Ning[1,2]
QIAN Yu-Zhe[1,2]

Abstract In practice, an overhead crane system may behave like a double pendulum, which has more unactuated states and is more difficult to be controlled properly. Motivated by this observation, we present a time optimal trajectory planning scheme for double pendulum crane systems, which can yield a global time-optimal swing-free trajectory. Specifically, to facilitate the optimization problem creation process, we first implement some basic transformations on the system kinematics. Then, various constraints, including upper and lower bounds of the two pendulum angles and upper bounds of the trolley velocity and acceleration, are taken into consideration to set up the optimization problem. After that, the Gauss-pseudospectral method (GPM) is utilized to convert the constrained optimization problem into a nonlinear programming problem, which can be solved more conveniently, while the trajectory constraints are also considered during the transformation. By solving the constructed nonlinear programming problem, a global time-optimal result is obtained, which is different from most existing methods. Finally, numerical simulation and experimental results are given to illustrate the satisfactory performance of the proposed method.

Key words Double pendulum crane, time optimal, trajectory planning, Gauss-pseudospectral method (GPM)

Citation Chen He, Fang Yong-Chun, Sun Ning, Qian Yu-Zhe. Pseudospectral method based time optimal anti-swing trajectory planning for double pendulum crane systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(1): 153−160

在工业生产过程中, 为运送负载到所期望的位置, 包括桥式吊车、悬臂式吊车、塔式吊车、船用吊车在内的各类吊车系统, 有着非常广泛的应用. 为了简化吊车系统的机械结构, 往往不直接控制负载, 而是通过台车的运动, 间接地拖动负载至目标位置. 这种结构带来的结果是, 吊车系统的控制输入维数小于待控自由度维数. 具有该特性的系统即所谓的欠驱动系统[1]. 相比全驱动系统, 由于欠驱动特性的存在, 欠驱动系统往往更难控制. 而在实际生产中, 吊车系统往往是由经验丰富的工人操作. 如果发生误操作, 可能引起负载剧烈摆动导致碰撞, 甚至发生安全事故. 因此, 对吊车系统自动控制方法的研究具有现实意义与广泛应用价值, 得到了广大学者的关注.

对于桥式吊车系统, 主要的控制目标包括两个方面, 即快速且精确的台车定位与负载摆动的抑制与消除. 然而, 这两方面通常是互相矛盾的, 即过快的台车运动往往导致较大的负载摆动. 因此, 同时实现这两方面的控制目标具有较高的难度. 为了获得较好的控制效果, 目前国内外学者已经提出了很多吊车系统自动控制方法. Tuan 等提出了基于部分反馈线性化的控制方法[2−3], 可以简化桥式吊车系统的控制算法设计. 在文献 [4−5] 中, Singhose 等和 Blackburn 等利用输入整形的思想对吊车系统进行控制, 可有效地抑制负载残余摆动. 为处理不确定的外界干扰, 研究人员利用滑模算法控制吊车系统[6−7], 可以获得很好的鲁棒性. 胡洲等提出了一种非线性信息融合控制方法[8], 可以处理控制器输入饱和的问题, 实现对吊车系统的高性能控制. 文献 [9−10] 提出了基于能量与无源性的控制策略, 可获得较好的效果. 除此之外, 近年来, 包括遗传算法[11]、模糊控制[12] 等一些智能控制方法同样在吊车控制领域有着一定的应用.

众所周知, 吊车系统的负载摆动由台车的加减速运动引起, 在台车运动与负载摆动之间存在着较强的耦合. 基于此, 可以为台车规划一条合适的轨迹, 当台车按照该轨迹运动时, 即可实现对其快速精确定位的目标. 同时, 考虑到摆角抑制与消除的要求, 在轨迹规划过程中, 通过深入分析与合理利用台车运动与负载摆动之间的耦合关系, 可以规划出一条具有消摆能力的台车轨迹. 这样即可完成台车快速精确定位与负载消摆的双重目标. 基于该思想, 研究人员已提出了很多吊车轨迹规划方法[13−17]. 例如, 在文献 [13] 中, Uchiyama 等提出了一种针对悬臂吊车的开环控制策略, 为了消除残余摆动, 他们为悬臂的水平运动规划了一条 S 型轨迹. 文献 [14] 则提出了一种基于相平面分析的轨迹规划方法, 它可以较好地抑制负载摆动, 并消除了残余摆动.

对于吊车系统, 虽然上述各种方法在理想情况下可以得到较好的控制效果, 但是这些方法均假设吊钩的质量可以忽略且负载可看作质点, 并将吊车系统的负载摆动视为单摆系统. 若吊钩的质量较大, 无法忽略, 或者负载形状很大, 不能简单看作质点, 在这种情况下, 吊车系统的摆动将会呈现出双摆现象, 即吊钩绕台车进行一级摆动, 同时负载绕吊钩发生二级摆动. 此时, 上述的单摆吊车控制方法无法取得令人满意的控制性能, 目前仅有少量文献报道了双摆效应的吊车系统控制策略. 文献 [18−20] 通过分析双摆吊车系统的固有频率, 将输入整形的方法成功地扩展到双摆吊车系统. 孙宁等在考虑系统摆角约束、台车速度约束等一系列约束的前提下, 提出了一种基于微分平坦理论的双摆吊车最优轨迹规划方法[21]. 郭卫平等通过分析吊车系统的能量, 提出了一种基于无源性的双摆吊车控制策略[22]. 尽管上述控制策略可以实现对双摆吊车系统的控制, 但它们难以保证吊车系统运行效率的最大化.

为提高双摆吊车系统的运送效率, 本文提出了一种全局时间最优轨迹规划方法, 可以同时实现台车精确定位以及负载快速消摆的控制目标. 与现有方法不同的是, 本文所提方法可得到全局时间最优的台车轨迹. 具体而言, 首先对吊车系统的运动学模型进行转化, 得到一种加速度驱动的系统模型. 接着, 利用该模型, 考虑吊车系统工作过程中的各种物理及安全约束, 构造出以运送时间为优化目标的待优化函数. 为了便于求解该优化问题, 利用高斯伪谱法 (Gauss-pseudospectral method), 将所得的优化问题以及相应约束, 在勒让德–高斯 (Legendre-Gauss, LG) 点处进行离散化与近似化. 这样, 原优化问题即转化为一种具有代数约束的非线性规划问题. 通过求解该非线性规划问题, 便可得到所需的时间最优台车轨迹. 在整个规划过程中, 可方便地考虑包括两级摆角约束以及台车速度和加速度约束在内的各种实际物理约束, 因此得到的轨迹光滑合理, 便于实际跟踪. 最后, 通过数值仿真以及实验结果验证了所提方法的有效性.

本文剩余部分组织如下: 第 1 节给出了双摆吊车运动学模型, 以及所需考虑的各种轨迹约束; 第 2 节具体描述了所设计轨迹规划的过程, 包括模型变换与基于高斯伪谱法的优化问题转化与求解; 第 3 节给出了所提方法的仿真与实验结果, 并与已有方法进行分析比较; 第 4 节对本文进行了总结与展望.

1 问题描述

在本文中, 考虑如图 1 所示的双摆桥式吊车系统, 其运动学模型如下[21]:

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)l_1\cos\theta_1\ddot{x}+(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+\\&\quad m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2+m_2l_1l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2+\\&\quad (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&m_2l_2\cos\theta_2\ddot{x}+m_2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1+m_2l_2^2\ddot{\theta}_2-\\&\quad m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+m_2gl_2\sin\theta_2=0\end{aligned}\tag{2}$$

其中, M, m_1, m_2 分别代表台车质量、吊钩质量以及负载质量; l_1 表示吊绳的长度, l_2 为等效绳长, 即负载质心与吊钩质心之间的距离; $x(t)$ 为台车位移, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ 表示一级与二级摆角 (吊钩摆角与负载绕吊钩的摆角); g 代表重力加速度常数.

收稿日期 2015-05-18 录用日期 2015-11-02
Manuscript received May 18, 2015; accepted November 2, 2015
国家科技支撑计划 (2013BAF07B03), 国家杰出青年科学基金 (61325017), 天津市自然科学基金 (15JCQNJC03800), 国家自然科学基金 (61503200) 资助
Supported by National Science & Technology Pillar Program of China (2013BAF07B03), National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (61325017), Natural Science Foundation of Tianjin (15JCQNJC03800), and National Natural Science Foundation of China (61503200)
本文责任编委 孙富春
Recommended by Associate Editor SUN Fu-Chun
1. 南开大学机器人与信息自动化研究所 天津 300071 2. 南开大学天津市智能机器人技术重点实验室 天津 300071
1. Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300071 2. Tianjin Key Laboratory of Intelligent Robotics, Nankai University, Tianjin 300071

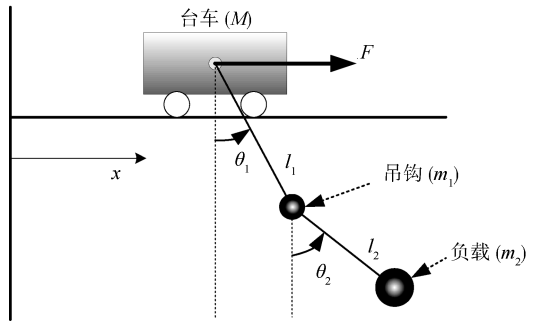

图 1　双摆桥式吊车模型示意图

Fig. 1　Schematic diagram of double pendulum crane

对该双摆桥式吊车系统, 拟规划一条时间最优轨迹, 以实现快速与精确的台车定位, 同时完成两级摆动的抑制与消除的控制目标. 考虑到该系统的欠驱动特性, 无法对两级摆动进行直接控制, 只能通过对台车的运动进行合理的规划, 以此来间接地控制负载摆动. 为此, 对式 (1) 和 (2) 分别除以 $(m_1+m_2)l_1$ 和 m_2l_2, 化简可得:

$$\begin{aligned}&\cos\theta_1\ddot{x}+l_1\ddot{\theta}_1+\frac{m_2l_2}{m_1+m_2}\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2+\\&\frac{m_2l_2}{m_1+m_2}\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2+g\sin\theta_1=0\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\cos\theta_2\ddot{x}+l_1\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1+l_2\ddot{\theta}_2-\\&l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_2=0\end{aligned}\tag{4}$$

式 (3) 和 (4) 描述了台车位移 $x(t)$ 与系统两级摆角 $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ 之间的耦合关系, 即台车的运动对负载摆动的影响. 通过深入分析该耦合关系, 规划一条具有消摆能力的台车轨迹, 是本方法的基础.

为完成时间最优轨迹规划, 考虑到吊车系统在实际工作时的目标、物理约束及安全性, 本文将系统地考虑如下几个方面的轨迹约束[21]:

1) 为实现快速而精确的台车定位, 台车从初始位置 x_0 开始运动, T 时刻达到目标位置 x_f, 且开始时刻与结束时刻的台车速度、加速度均为 0, 即

$$\begin{aligned}&x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0\\&x(T)=x_f,\ \dot{x}(T)=\ddot{x}(T)=0\end{aligned}$$

其中, T 表示运送过程所需要时间; 对于初始位置, 不失一般性, 本文选取 $x_0=0$.

2) 考虑到系统输入饱和问题, 不同于文献 [23−24] 中的方法, 这里等价于考虑在运送过程中, 台车的速度、加速度均应保持在适当的范围内, 即

$$|\dot{x}(t)|\le v_{\max},\quad |\ddot{x}(t)|\le a_{\max}$$

其中, $v_{\max}$, $a_{\max}$ 分别表示允许的台车最大速度和加速度.

3) 为保证在运送结束时可直接对负载进行下一步的处理, 台车达到目标位置后应无残余摆动且角速度也均为 0, 即

$$\begin{aligned}&\theta_1(0)=\dot{\theta}_1(0)=0,\quad \theta_1(T)=\dot{\theta}_1(T)=0\\&\theta_2(0)=\dot{\theta}_2(0)=0,\quad \theta_2(T)=\dot{\theta}_2(T)=0\end{aligned}$$

4) 为避免由于负载的剧烈摆动引起的碰撞, 在运送过程中, 两级摆动的摆角及角速度都应保持在允许的范围内, 即

$$|\theta_1(t)|\le\theta_{1\max},\quad |\theta_2(t)|\le\theta_{2\max}\tag{5}$$

$$|\dot{\theta}_1(t)|\le\omega_{1\max},\quad |\dot{\theta}_2(t)|\le\omega_{2\max}\tag{6}$$

其中, $\theta_{1\max}$, $\theta_{2\max}$ 分别表示一级与二级摆角允许的最大角度; $\omega_{1\max}$, $\omega_{2\max}$ 代表允许的一级与二级最大角速度.

综上, 可以构造如下的优化问题:

$$\begin{aligned}&\min\quad T\\&\text{s.t.}\quad x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0\\&\qquad x(T)=x_f,\quad \dot{x}(T)=\ddot{x}(T)=0\\&\qquad |\dot{x}(t)|\le v_{\max},\quad |\ddot{x}(t)|\le a_{\max}\\&\qquad \theta_1(0)=\dot{\theta}_1(0)=0,\quad \theta_1(T)=\dot{\theta}_1(T)=0\\&\qquad \theta_2(0)=\dot{\theta}_2(0)=0,\quad \theta_2(T)=\dot{\theta}_2(T)=0\\&\qquad |\theta_1(t)|\le\theta_{1\max},\quad |\theta_2(t)|\le\theta_{2\max}\\&\qquad |\dot{\theta}_1(t)|\le\omega_{1\max},\quad |\dot{\theta}_2(t)|\le\omega_{2\max}\end{aligned}\tag{7}$$

接下来, 将通过伪谱法求解该优化问题, 并为台车规划出一条时间最优轨迹.

2　时间最优轨迹规划方法

本节将提出一种基于伪谱法的时间最优轨迹规划策略, 并通过求解式 (7) 得到台车轨迹. 具体而言, 首先将吊车系统运动学模型转化成一种加速度驱动模型, 其中台车加速度可看作系统输入量; 随后, 基于该加速度驱动模型, 可将原优化问题改写成一种新的形式; 接着利用高斯伪谱法, 将带约束优化问题转化为一系列非线性规划问题; 最后通过求解该非线性优化问题, 即可得到时间最优的台车轨迹.

2.1　系统模型及优化问题的转化

为方便后续的轨迹规划, 这里首先对双摆吊车系统模型以及优化问题 (7) 进行转化. 为此定义系统全状态向量 $\boldsymbol{\zeta}(t)$ 如下:

$$\boldsymbol{\zeta}=[\ x\quad \dot{x}\quad \theta_1\quad \dot{\theta}_1\quad \theta_2\quad \dot{\theta}_2\ ]^{\mathrm{T}}\tag{8}$$

根据系统运动学模型 (3) 和 (4), 可将台车的加速度作为系统的输入. 此时, 运动学模型可转化为如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta})u\tag{9}$$

其中, $u(t)$ 即为台车加速度 $\ddot{x}(t)$; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta}),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta})$ 表示关于 $\boldsymbol{\zeta}(t)$ 的辅助函数, 具体形式如下:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta})=\left[\begin{array}{cccccc}\dot{x}&0&\dot{\theta}_1&A&\dot{\theta}_2&B\end{array}\right]^{\mathrm{T}}\tag{10}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta})=\left[\begin{array}{cccccc}0&1&0&C&0&D\end{array}\right]^{\mathrm{T}}\tag{11}$$

其中, 为方便描述, 定义了如下的辅助变量 A, B, C, D:

$$
\begin{aligned}
A =& -\frac{m_2C_{1-2}}{l_1(m_1+m_2)-m_2l_1C_{1-2}^2}\Big[l_1S_{1-2}\dot{\theta}_1^2+\\
&\frac{m_2l_2}{m_1+m_2}S_{1-2}C_{1-2}\dot{\theta}_2^2-g(S_2-S_1C_{1-2})\Big]-\\
&\frac{1}{l_1}gS_1-\frac{m_2l_2}{l_1(m_1+m_2)}S_{1-2}\dot{\theta}_2^2\\
B =& \frac{m_1+m_2}{l_2(m_1+m_2)-m_2l_2C_{1-2}^2}\Big[\frac{m_2l_2}{m_1+m_2}S_{1-2}\times\\
&C_{1-2}\dot{\theta}_2^2+l_1S_{1-2}\dot{\theta}_1^2-g(S_2-S_1C_{1-2})\Big]\\
C =& \frac{m_2C_{1-2}}{l_1(m_1+m_2)-m_2l_1C_{1-2}^2}(C_2-C_1C_{1-2})-\frac{1}{l_1}C_1\\
D =& -\frac{m_1+m_2}{l_2(m_1+m_2)-m_2l_2C_{1-2}^2}(C_2-C_1C_{1-2})
\end{aligned}
$$

式中, 使用了如下的简化形式:

$$
\begin{aligned}
&S_1=\sin\theta_1,\quad S_2=\sin\theta_2,\quad C_1=\cos\theta_1,\quad C_2=\cos\theta_2\\
&S_{1-2}=\sin(\theta_1-\theta_2),\quad C_{1-2}=\cos(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned}
$$

利用所得的加速度驱动系统模型 (9), 原优化问题 (7) 可以转化为

$$
\begin{aligned}
&\min \quad T && \text{(12a)}\\
&\text{s.t.} \quad \dot{\boldsymbol{\zeta}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta})+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta})u && \text{(12b)}\\
&\qquad \boldsymbol{\zeta}(0)=[\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}} && \text{(12c)}\\
&\qquad \boldsymbol{\zeta}(T)=[\ x_f\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}} && \text{(12d)}\\
&\qquad |\dot{x}(t)|\le v_{\max},\quad |u(t)|\le a_{\max} && \text{(12e)}\\
&\qquad |\theta_1(t)|\le \theta_{1\max},\quad |\theta_2(t)|\le \theta_{2\max} && \text{(12f)}\\
&\qquad |\dot{\theta}_1(t)|\le \omega_{1\max},\quad |\dot{\theta}_2(t)|\le \omega_{2\max} && \text{(12g)}
\end{aligned}
$$

求解该优化问题, 即可得到完成控制目标所需的最优时间 T^*, 同时得到对应的最优台车轨迹.

2.2 基于高斯伪谱法的轨迹规划

为得到时间最优的台车轨迹, 关键是如何求解所构造的带约束优化问题. 本文通过高斯伪谱法对优化问题进行处理, 可方便地得到时间最优解以及最优轨迹. 与现有大部分方法不同的是, 这种方法可更为直接地对原系统进行分析和处理, 并可以获得全局时间最优解.

本文方法的主要思想如图 2 中的流程图所示, 具体描述如下: 首先利用拉格朗日插值方法, 选择 LG 点处的离散系统状态轨迹以及输入轨迹, 通过离散轨迹与拉格朗日插值多项式, 表示相应的近似轨迹模型. 接着, 通过对近似后的轨迹模型进行求导, 可将系统状态的导数用拉格朗日多项式导数表示. 随后, 利用离散的轨迹模型及其导数, 可将原系统模型 (微分方程约束) 转化为一系列多项式方程. 利用高斯积分, 优化问题中的边界条件同样可以表示成多项式方程的形式. 最后, 时间最优轨迹规划问题即转化为一种具有代数约束的非线性规划问题, 通过对其求解即可得到最优时间及最优轨迹.

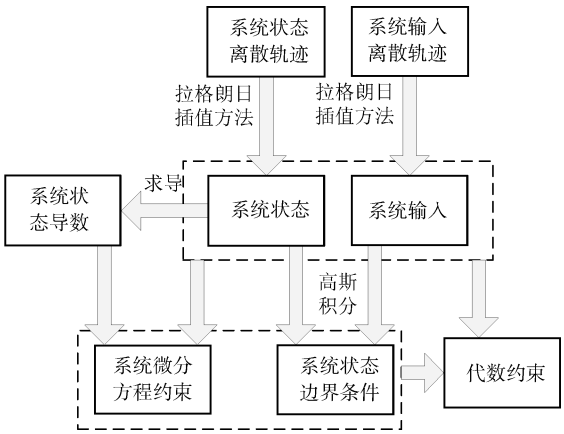

图 2 高斯伪谱法流程图

Fig. 2 Flowchart of the Gauss-pseudospectral method

为适应高斯伪谱法的要求, 首先需要利用坐标变换, 将轨迹对应的时间区间由 $t\in[0,T]$ 转化到区间 $\tau\in[-1,1]$ 上, 即

$$\tau=\frac{2t}{T}-1 \tag{13}$$

随后选取 K 个节点 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_K\}\in(-1,1)$ 组成点列, 即 LG 点. LG 点的选取可以通过求解 K 阶的勒让德多项式的零点获得. 同时, 把 $\tau_0=-1$ 加到点列的首位. 待规划的系统状态量及输入量可离散表示成如下的形式:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\zeta}(\tau_0),\boldsymbol{\zeta}(\tau_1),\boldsymbol{\zeta}(\tau_2),\cdots,\boldsymbol{\zeta}(\tau_K)\\
&u(\tau_0),u(\tau_1),u(\tau_2),\ldots,u(\tau_K)
\end{aligned}
$$

利用该 $K+1$ 个节点, 可以构造出 $K+1$ 个拉格朗日插值多项式, 具体形式如下:

$$\mathcal{L}_i(\tau)=\prod_{j=0,j\neq i}^{K}\frac{\tau-\tau_j}{\tau_i-\tau_j} \tag{14}$$

其中, $\tau\in[-1,1]$; $\mathcal{L}_i(\tau)$ 代表第 i 个拉格朗日插值多项式函数; $i\in 0,1,\cdots,K$. 利用式 (14) 以及 LG 点处的系统状态量和输入量的值, 系统的状态量轨迹以及输入量轨迹可通过下面的方式近似表出:

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau)\approx\sum_{i=0}^{K}\boldsymbol{\zeta}(\tau_i)\mathcal{L}_i(\tau),\quad u(\tau)\approx\sum_{i=0}^{K}u(\tau_i)\mathcal{L}_i(\tau) \tag{15}$$

其中, $\boldsymbol{\zeta}(\tau_i)$, $u(\tau_i)$ 分别表示 $\tau=\tau_i$ 处的系统状态量以及输入量. 对式 (15) 求导, 并利用式 (14) 中插值函数的具体形式, 计算并化简, 可得状态量轨迹的导数如下:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\tau_k)=\sum_{i=0}^{K}\mathcal{D}_{ki}(\tau_k)\boldsymbol{\zeta}(\tau_i) \tag{16}$$

其中, $\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\tau_k)$ 表示 $\tau=\tau_k$ 处的状态轨迹导数值; $\mathcal{D}_{ki}(\tau_k)$ 代表 $\tau=\tau_k$ 处, $\mathcal{L}_i$ 的导数值, 具体形式如下:

$$\mathcal{D}_{ki}(\tau_k)=\dot{\mathcal{L}}_i(\tau_k)=\sum_{l=0,l\neq i}^{K}\frac{\prod\limits_{j=0,j\neq i,l}^{K}(\tau_k-\tau_j)}{\prod\limits_{j=0,j\neq i}^{K}(\tau_i-\tau_j)} \tag{17}$$

利用式 (16) 和 (17) 以及 LG 点处的轨迹值, 可对优化问题 (12) 中的微分方程约束 (12b) 进行离散化与近似化处理, 具体结果如下:

$$\sum_{i=0}^{K}\mathcal{D}_{ki}(\tau_k)\boldsymbol{\zeta}(\tau_i)-\frac{2}{T}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))u(\tau_k)]=0 \quad (18)$$

其中, $k\in\{0,1,2,\cdots,K\}$. 式 (18) 可以看作代数约束. 接下来, 优化问题中的边界条件约束也需要转化成代数约束的形式, 其中式 (12c) 可直接改写如下:

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau_0)=[\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}} \quad (19)$$

为表示运送过程结束时刻的边界约束, 定义 $\tau_{K+1}=1$, 由式 (13) 可知, $\tau_{K+1}=1$ 即对应运送结束时刻 $t=T$. 利用高斯积分, 式 (12d) 可表示为

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau_{K+1})=\boldsymbol{\zeta}(\tau_0)+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{K}w_k[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))u(\tau_k)] \quad (20)$$

其中, $\boldsymbol{\zeta}(\tau_0)$ 即上述的系统初始状态向量; w_k 表示第 k 个勒让德权值 (Legendre weight), 具体值可在求解 LG 点时一并求得.

综上, 优化问题中所有的约束都可以通过代数约束的形式表出, 基于此, 原优化问题可以转化成一种具有代数约束的非线性规划问题, 具体如下所示:

$$\begin{aligned}
&\min\quad T \quad (21)\\
&\text{s.t.}\\
&\sum_{i=0}^{K}\mathcal{D}_{ki}(\tau_k)\boldsymbol{\zeta}(\tau_i)-\frac{2}{T}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))+\\
&\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))u(\tau_k)]=0,\qquad k\in\{0,1,2,\cdots,K\}\\
&\boldsymbol{\zeta}(\tau_0)=[\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{\zeta}(\tau_0)+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{K}w_k[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\zeta}(\tau_k))u(\tau_k)]=\\
&[\ x_f\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ ]^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{\zeta}(\tau)-\boldsymbol{\gamma}\le 0,\ -\boldsymbol{\zeta}(\tau)-\boldsymbol{\gamma}\le 0\\
&u(\tau)-a_{\max}\le 0,\ -u(\tau)-a_{\max}\le 0
\end{aligned}$$

其中, 向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 的具体形式如下:

$$\boldsymbol{\gamma}=[\ \infty\quad v_{\max}\quad \theta_{1\max}\quad \omega_{1\max}\quad \theta_{2\max}\quad \omega_{2\max}\ ]^{\mathrm{T}}$$

对于上述带约束非线性规划问题, 本文选择连续二次型规划方法 (Sequential quadratic programming, SQP) 求解, 可得到如下的时间最优状态向量序列:

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau_0),\boldsymbol{\zeta}(\tau_1),\boldsymbol{\zeta}(\tau_2),\cdots,\boldsymbol{\zeta}(\tau_K),\boldsymbol{\zeta}(\tau_{K+1}) \quad (22)$$

上式即时间离散的最优状态向量序列. 取每个向量的前两项 (台车位移与台车速度), 并进行插值, 即可得到相应的时间最优的台车位移与速度轨迹.

3　仿真与实验

在本节中, 为验证所设计的轨迹规划方法的有效性, 给出了相应的仿真与实验结果. 具体而言, 首先, 利用 Matlab 及其相关工具箱, 按照所设计的轨迹规划方法, 离线计算出时间最优的台车轨迹; 随后, 利用 Matlab/Simulink 环境对其进行仿真测试; 最后, 将构造的最优轨迹在双摆吊车实验平台上进行实验验证, 并与现有的方法进行对比. 所得结果均验证了本文所设计的轨迹规划方法具有良好的性能.

3.1　仿真结果

为实现本文所提出的基于伪谱法的轨迹规划策略, 这里使用 GPOPS 软件工具箱[25] 以及 SNOPT 工具箱[26] 离线求解优化问题并得到相应的时间最优轨迹. 相应的系统参数按照实验平台中的实际参数进行选取, 具体值如下:

$$\begin{aligned}
&M=6.5\ \mathrm{kg},\quad m_1=2.003\ \mathrm{kg},\quad m_2=0.559\ \mathrm{kg}\\
&g=9.8\ \mathrm{m/s^2},\quad l_1=0.53\ \mathrm{m},\quad l_2=0.4\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

台车的目标位置选取为 $x_f=0.6$ m, 同时轨迹约束选择如下:

$$\begin{aligned}
&\theta_{1\max}=\theta_{2\max}=2\ \mathrm{deg},\quad v_{\max}=0.3\ \mathrm{m/s}\\
&\omega_{1\max}=\omega_{2\max}=5\ \mathrm{deg/s},\quad a_{\max}=015\ \mathrm{m/s^2}
\end{aligned}$$

仿真结果如图 3 和 4 所示. 从图 3 中可以看出, 当台车按照所规划轨迹进行运动时, 完成给定运送任务仅需时间 $T^*=4.2776$ s, 且台车可以精确达到目标位置, 整个过程中, 台车速度未超过给定限制 $v_{\max}=0.3$ m/s. 同时, 由图 3 可知, 一级摆动和二级摆动的最大摆角均未超过给定值 2 deg, 且运送结束时不存在残余摆动. 这也就保证了负载运送过程中的安全性. 同样地, 两级摆动对应的角速度也均保持在给定范围内. 综上所述, 仿真结果验证了所提最优轨迹规划方法的高效性与安全性.

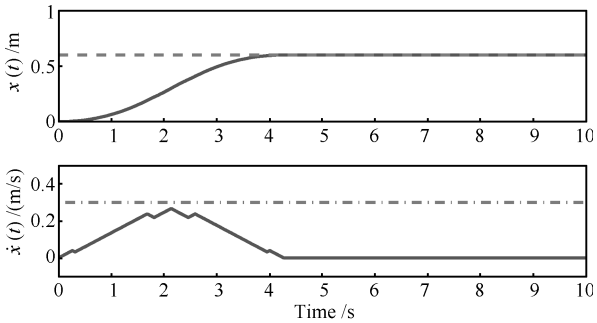

图 3　本文方法仿真结果 (台车位置以及速度) (实线: 仿真结果; 虚线: 目标位置 $x_f=0.6$ m; 点画线: 台车速度约束 $v_{\max}=0.3$ m/s)

Fig. 3　Simulation results (trolley position and velocity) (Solid line: simulation results; Dashed line: target position $x_f=0.6$ m; Dotted-dashed line: trolley velocity constraint $v_{\max}=0.3$ m/s)

3.2　实验结果

为进一步验证所提方法的性能, 这里将所规划轨迹在双摆实验平台上进行验证. 本方法轨迹规划与跟踪控制的整体流程图如图 5 所示. 实验过程中, 为使台车沿所规划的轨迹运动, 本文选择工业中有广泛应用的比例–微分 (Proportional-derivative, PD) 控制器作为跟踪控制器, 以实现台车对目标轨迹的跟踪. 实验平台的参数与仿真中相同,

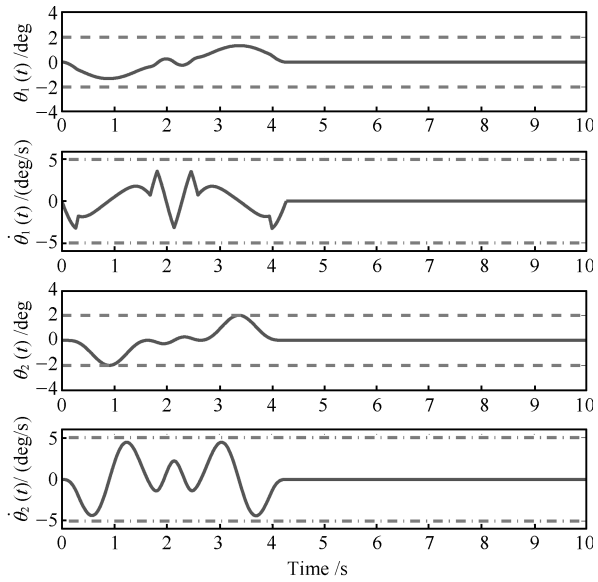

图 4 本文方法仿真结果 (两级摆动对应的摆角及角速度) (实线: 仿真结果; 虚线: 摆角约束 $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg; 点画线: 角速度约束 $\omega_{1\max} = \omega_{2\max} = 5$ deg/s)

Fig. 4 Simulation results (first and second order swing angles and angular velocities) (Solid line: simulation results; Dashed line: swing angle constraint $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg; Dotted-dashed line: angular velocity constraint $\omega_{1\max} = \omega_{2\max} = 5$ deg/s)

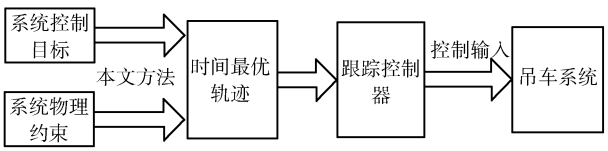

图 5 轨迹规划与控制流程图

Fig. 5 Flowchart of trajectory planning and tracking control

因此通过离线计算所得的最优轨迹即仿真中给出的轨迹. 同时, 作为对比, 这里给出了文献 [21] 的最优轨迹规划方法, 以及线性二次型调节器 (Linear quadratic regulator, LQR) 方法的实验结果. 其中, 文献 [21] 中轨迹规划方法的约束选取与本文所提方法的约束一致; 而对于 LQR 方法, 其控制器表达式如下:

$$F = -k_1(x - x_f) - k_2\dot{x} - k_3\theta_1 - k_4\dot{\theta}_1 - k_5\theta_2 - k_6\dot{\theta}_2$$

代价函数选取如下:

$$J = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{X} + RF^2)\mathrm{d}t$$

其中, $\boldsymbol{X}$ 的定义如下:

$$\boldsymbol{X} = [\ e(t) \quad \dot{x}(t) \quad \theta_1(t) \quad \dot{\theta}_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \dot{\theta}_2(t)\ ]^{\mathrm{T}}$$

$e(t)$ 代表台车定位误差, $e(t) = x(t) - x_f$; 矩阵 Q, R 的选择如下:

$$Q = \mathrm{diag}\{200, 1, 200, 1, 200, 1\},\ R = 0.05$$

计算得到控制器增益如下:

$$k_1 = 63.2456,\ k_2 = 50.7765,\ k_3 = -129.3086$$
$$k_4 = -6.9634,\ k_5 = 19.9137,\ k_6 = -6.7856$$

本文方法、LQR 方法、文献 [21] 中方法的实验结果如图 6～8 所示. 从图 6 中可以看出, 当台车跟踪所规划最优轨迹运行时, 完成运送过程仅需 4.095 s, 且整个过程中两级摆动均保持在给定约束 2 deg 以内, 运送完成时基本无残余摆动. 而对于文献 [21] 所提方法, 完成运送过程需要 5.445 s; 对于 LQR 方法, 完成运送过程需要 7.425 s. 同时, LQR 方法导致的一级摆动最大摆角达到 6.5 deg, 二级摆动最大摆角达到 11.5 deg, 远大于本文所提方法的摆角. 综上可知, 本文所设计的方法可以实现台车的精确定位以及系统两级摆动的快速消除, 获得良好的控制性能. 从图 3、图 4 和图 6 可以看出, 由于摩擦等多种干扰的影响, 实验与仿真结果存在着一定程度上的区别. 同时, 对比图 4 与图 6 中的摆角结果, 可知摆角曲线的形状以及趋势大致相同, 且对摆角的限幅及消摆的目标也基本完成. 因此我们可得如下结论, 即本文中的仿真与实验结果基本一致, 均验证了所提方法可以实现较好的控制效果. 需要指出的是, 由于外界干扰的影响, 一般来说, 实验结果与仿真结果均存在一定程度上的区别[13−14].

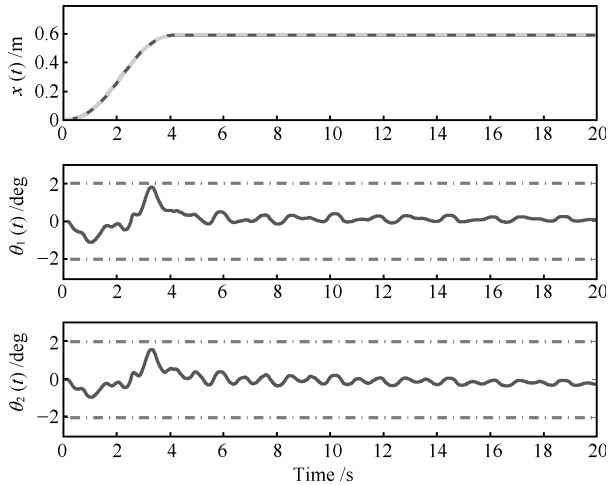

图 6 本文方法实验结果 (台车位置、一级摆角、二级摆角) (实线: 实验结果; 虚线: 待跟踪最优轨迹; 点画线: 摆角约束 $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg)

Fig. 6 Experimental results of proposed method (trolley position, first and second order swing angles) (Solid line: experimental results; Dashed line: planned trajectory; Dotted-dashed line: swing angle constraint $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg)

注 1. 图 6 中, 本文所提方法的实验结果, 在台车停止运动后存在着一定的残摆, 但其幅度很小, 仅为 0.2 deg. 这与图 4 中本方法仿真结果有一定的差异. 需要指出的是, 残摆的出现并非由于本问方法存在缺陷, 而是因为在实验过程中, 存在着摩擦等多种外界干扰的影响. 同时, 考虑到残摆的幅度很小, 在实际吊车工作过程中, 这种幅度的残摆基本可以忽略. 需要注意的是, 虽然本文方法以及对比方法是在相同的实验平台上进行测试, 但每次测试时, 轨道摩擦等外界干扰均会略有差别. 只会在几次实验中, 得到基本无残摆的结果. 除此之外, 一般来说, 实验结果存在小幅度的残摆属于正常的情况[13, 18].

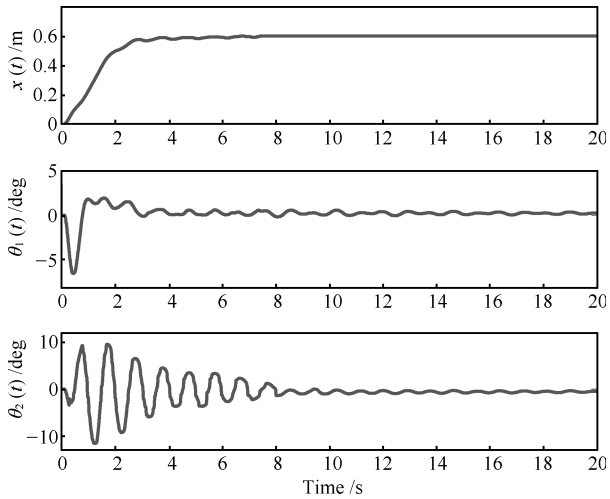

图 7　LQR 方法实验结果 (台车位置、一级摆角、二级摆角) (实线: 实验结果)

Fig. 7　Experimental results of the LQR method (trolley position, first and second order swing angles) (Solid line: experimental results)

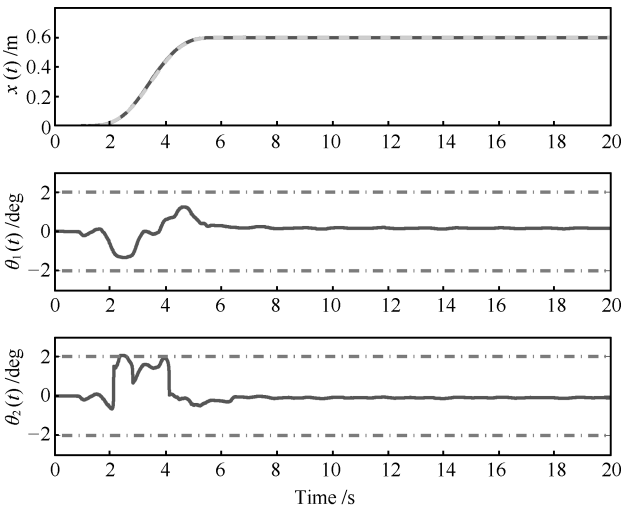

图 8　文献 [21] 方法实验结果 (台车位置、一级摆角、二级摆角) (实线: 实验结果; 虚线: 待跟踪轨迹; 点画线: 摆角约束 $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg)

Fig. 8　Experimental results of the method in [21] (trolley position, first and second order swing angles) (Solid line: experimental results; Dashed line: planned trajectory; Dotted-dashed line: swing angle constraint $\theta_{1\max} = \theta_{2\max} = 2$ deg)

4　结论

本文针对具有双摆效应的桥式吊车, 提出了一种基于伪谱法的时间最优轨迹规划策略. 具体而言, 首先, 将吊车系统的运动学模型转化为一种加速度驱动模型, 并基于此模型, 考虑各种约束, 构造出带约束的优化问题; 随后, 利用高斯伪谱法对所得优化问题进行处理, 将其转化为更方便求解的非线性规划问题. 在此基础上, 即可得到时间最优台车轨迹. 本文提出的这种轨迹规划方法除了考虑消摆的目标之外, 还可以非常方便地处理摆角约束、角速度约束、台车速度约束、加速度约束等实际物理约束. 与现有方法不同的是, 本文提出的方法可获得全局时间最优解, 极大地提高了吊车系统的工作效率. 最后, 通过仿真与实验, 验证了本文所提方法的有效性. 在未来的工作中, 将考虑在轨迹规划过程中加入对角加速度的约束, 以获得更好的控制效果, 并考虑为具有双摆效应的吊车系统设计闭环控制算法, 以提高吊车系统在运行过程中对外界干扰的鲁棒性.

References

1 Liu Y, Yu H N. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 2013, **7**(7): 921−935

2 Tuan L A, Lee S G, Dang V H, Moon S, Kim B. Partial feedback linearization control of a three-dimensional overhead crane. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2013, **11**(4): 718−727

3 Tuan L A, Kim G H, Kim M Y, Lee S G. Partial feedback linearization control of overhead cranes with varying cable lengths. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2012, **13**(4): 501−507

4 Singhose W, Kim D, Kenison M. Input shaping control of double-pendulum bridge crane oscillations. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2008, **130**(3): 034504

5 Blackburn D, Singhose W, Kitchen J, Patrangenaru V, Lawrence J, Kamoi T, Taura A. Command shaping for nonlinear crane dynamics. *Journal of Vibration and Control*, 2010, **16**(4): 477−501

6 Wang Wei, Yi Jian-Qiang, Zhao Dong-Bin, Liu Dian-Tong. Hierarchical sliding-mode control method for overhead cranes. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 784−788
(王伟, 易建强, 赵冬斌, 刘殿通. 桥式吊车系统的分级滑模控制方法. 自动化学报, 2004, **30**(5): 784−788)

7 Xi Z, Hesketh T. Discrete time integral sliding mode control for overhead crane with uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 2010, **4**(10): 2071−2081

8 Hu Zhou, Wang Zhi-Sheng, Zhen Zi-Yang. Nonlinear information fusion control for underactuated cranes with input saturation. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1522−1527
(胡洲, 王志胜, 甄子洋. 带输入饱和的欠驱动吊车非线性信息融合控制. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1522−1527)

9 Sun N, Fang Y C, Zhang X B. Energy coupling output feedback control of 4-DOF underactuated cranes with saturated inputs. *Automatica*, 2013, **49**(5): 1318−1325

10 Sun N, Fang Y C. New energy analytical results for the regulation of underactuated overhead cranes: an end-effector motion-based approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2012, **59**(12): 4723−4734

11 Nakazono K, Ohnishi K, Kinjo H, Yamamoto T. Load swing suppression for rotary crane system using direct gradient descent controller optimized by genetic algorithm. *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, 2011, **22**(8): 303−310

12 Zhao Y, Gao H J. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2012, **20**(1): 181−186

13 Uchiyama N, Ouyang H M, Sano S. Simple rotary crane dynamics modeling and open-loop control for residual load sway suppression by only horizontal boom motion. *Mechatronics*, 2013, **23**(8): 1223−1236

14 Sun N, Fang Y, Zhang X, Yuan Y. Transportation task-oriented trajectory planning for underactuated overhead cranes using geometric analysis. *IET Control Theory & Applications*, 2012, **6**(10): 1410−1423

15 Sun Ning, Fang Yong-Chun, Wang Peng-Cheng, Zhang Xue-Bo. Adaptive trajectory tracking control of underactuated 3-dimensional overhead crane systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(9): 1287−1294
(孙宁, 方勇纯, 王鹏程, 张雪波. 欠驱动三维桥式吊车系统自适应跟踪控制器设计. 自动化学报, 2010, **36**(9): 1287−1294)

16 Sun N, Fang Y C, Zhang Y D, Ma B J. A novel kinematic coupling-based trajectory planning method for overhead cranes. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2012, **17**(1): 166−173

17 Wang P C, Fang Y C, Jiang Z Y. A direct swing constraint-based trajectory planning method for underactuated overhead cranes. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2414−2419

18 Vaughan J, Kim D, Singhose W. Control of tower cranes with double-pendulum payload dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, **18**(6): 1345−1358

19 Singhose W, Kim D. Manipulation with tower cranes exhibiting double-pendulum oscillations. In: Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Roma, Italy: IEEE, 2007. 4550−4555

20 Masoud Z, Alhazza K, Abu-Nada E, Majeed M. A hybrid command-shaper for double-pendulum overhead cranes. *Journal of Vibration and Control*, 2014, **20**(1): 24−37

21 Sun Ning, Fang Yong-Chun, Qian Yu-Zhe. Motion planning for cranes with double pendulum effects subject to state constraints. *Control Theory and Applications*, 2014, **31**(7): 974−980
(孙宁, 方勇纯, 钱彧哲. 带有状态约束的双摆效应吊车轨迹规划. 控制理论与应用, 2014, **31**(7): 974−980)

22 Guo Wei-Ping, Liu Dian-Tong. Double-pendulum-type crane dynamics and passivity based control. *Journal of System Simulation*, 2008, **20**(18): 4945−4948
(郭卫平, 刘殿通. 二级摆型吊车系统动态及基于无源的控制. 系统仿真学报, 2008, **20**(18): 4945−4948)

23 Xu B, Huang X Y, Wang D W, Sun F C. Dynamic surface control of constrained hypersonic flight models with parameter estimation and actuator compensation. *Asian Journal of Control*, 2014, **16**(1): 162−174

24 Xu B. Robust adaptive neural control of flexible hypersonic flight vehicle with dead-zone input nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **80**(3): 1509−1520

25 Garg D, Patterson M, Hager W W, Rao A V, Benson D A, Huntington G T. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods. *Automatica*, 2010, **46**(11): 1843−1851

26 Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review*, 2005, **47**: 99−131

陈 鹤 南开大学机器人与信息自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为吊车系统, 移动机器人控制.
E-mail: chenh@mail.nankai.edu.cn
(**CHEN He** Ph. D. candidate at the Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University. His research interest covers control of crane systems and wheeled mobile robots.)

方勇纯 南开大学机器人与信息自动化研究所教授. 主要研究方向为视觉伺服, 微纳米控制系统, 非线性控制, 欠驱动系统控制. 本文通信作者.
E-mail: fangyc@nankai.edu.cn
(**FANG Yong-Chun** Professor at the Institute of Robotics and Automatic Information System (IRAIS), Nankai University. His research interest covers visual servoing, micro/nano control systems, nonlinear control, and underactuated systems control. Corresponding author of this paper.)

孙 宁 南开大学机器人与信息自动化研究所讲师. 主要研究方向为陆地/船用吊车自动控制, 轮式机器人自主控制, 非线性控制与其在 (欠驱动) 机电系统中的应用. E-mail: sunn@nankai.edu.cn
(**SUN Ning** Assistant professor at the Institute of Robotics and Automatic Information System (IRAIS), Nankai University. His research interest covers control of land/ship-mounted cranes, control of wheeled robots, and nonlinear control theory with applications to (underactuated) mechatronic systems.)

钱彧哲 南开大学机器人与信息自动化研究所博士生. 主要研究方向为欠驱动船用吊车系统控制.
E-mail: qianyzh@mail.nankai.edu.cn
(**QIAN Yu-Zhe** Ph. D. candidate at the Institute of Robotics and Automatic Ingormatino Systems (IRAIS), Nankai University. Her main research interest is underactuated offshore boom crane system control.)