

离散时间两层切换系统的鲁棒指数几乎处处稳定性

宋 杨^{1,2} 杨 杰¹ 郑 敏^{1,2} 费敏锐^{1,2}

摘 要 提出了一种新类型的切换系统——两层切换系统 (Two-level switched systems, TSSs), 其顶层切换是确定的, 底层切换为随机的且由多个 Markov 链支配. 基于持续驻留时间 (Persistent dwell-time, PDT) 方法, 研究了 TSS 存在参数不确定性情况下的鲁棒指数几乎处处 (Exponential almost sure, EAS) 稳定性, 以线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 形式给出了一个充分条件. 最后通过数值仿真例子验证了本文方法的有效性.

关键词 两层切换系统, 持续驻留时间, 鲁棒指数几乎处处稳定, 离散随机系统

引用格式 宋杨, 杨杰, 郑敏, 费敏锐. 离散时间两层切换系统的鲁棒指数几乎处处稳定性. 自动化学报, 2016, 42(1): 131–139

DOI 10.16383/j.aas.2016.c150441

Robust Exponential Almost Sure Stability of Discrete-time Two-level Switched Systems

SONG Yang^{1,2} YANG Jie¹ ZHENG Min^{1,2} FEI Min-Rui^{1,2}

Abstract This paper proposes a new type of switched systems called two-level switched systems (TSSs). In a TSS, the top-level switching is deterministic, while the low-level switching is governed by multiple Markov chains and thus it is stochastic. Considering a TSS with parameter uncertainties, the robust exponential almost sure (EAS) stability is investigated. Based on the method of persistent dwell-time (PDT), a sufficient condition of robust EAS stability is given in the form of linear matrix inequalities (LMIs). A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed result.

Key words Two-level switched systems, persistent dwell-time, robust exponential almost sure stability, discrete-time stochastic system

Citation Song Yang, Yang Jie, Zheng Min, Fei Min-Rui. Robust exponential almost sure stability of discrete-time two-level switched systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(1): 131–139

切换系统是一类特殊的混杂系统, 由一族子系统和相应的切换规则构成. 根据切换驱动机制的不同, 切换系统可分为两类: 确定性切换系统和随机切换系统. 确定性切换系统表征了切换规则可控的切换系统, 例如自动换挡的汽车、切换姿态的飞机追踪等. 驻留时间 (Dwell time, DT)^[1] 和平均驻留时间 (Average dwell-time, ADT)^[2] 方法是研究确

定性切换系统稳定性的常见方法. 近年来有学者提出利用持续驻留时间 (Persistent dwell-time, PDT) 方法研究切换系统的稳定性^[3]. PDT 方法是按照各子系统驻留时间长短将切换序列按次序划分成快变部分 (T 部分) 和缓变部分 (τ 部分), 并且分别对两部分的长度加以限制来保证整个切换系统的稳定性. 相较于 DT 和 ADT 方法, PDT 方法更具一般性, 可以包含 DT 和 ADT 这两种约束情形^[3]. 针对符合 PDT 约束的切换线性系统, 文献 [4] 研究了 H_∞ 滤波问题.

在随机切换系统中, 马尔科夫跳变线性系统 (Markov jump linear system, MJLS) 是最为常见的一种类型, 其子系统间的切换服从马尔科夫 (Markov) 过程, 常用于描述系统结构或参数存在的随机突变^[5–7]. 在过去十余年中, MJLS 的稳定性问题得到了较充分的研究, 主要涉及均方 (Mean square, MS) 稳定^[8]、随机稳定性^[9]、 δ 阶 (δ -moment) 稳定^[10] 和指数几乎处处 (Exponential almost sure, EAS) 稳定^[11] 等.

收稿日期 2015-07-08 录用日期 2015-09-23

Manuscript received July 8, 2015; accepted September 23, 2015
国家自然科学基金 (61573237), 上海市自然科学基金 (13ZR1416300), 国家重大科学仪器设备开发专项课题 (2012YQ15008703), 上海市科委项目 (14JC1402200) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573237), Natural Science Foundation of Shanghai (13ZR1416300), National Key Scientific Instrument and Equipment Development Project (2012YQ15008703) and Science and Technology Commission of Shanghai Municipality (14JC1402200)

本文责任编辑 孙希明

Recommended by Associate Editor SUN Xi-Ming

1. 上海大学机电工程与自动化学院 上海 200072 2. 上海市电站自动化技术重点实验室 上海 200072

1. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200072 2. Shanghai Key Laboratory of Power Station Automation Technology, Shanghai 200072

随着控制系统的复杂化, 有学者进一步在切换机制或系统结构上加以变化, 提出了若干新类型的切换系统^[12-14]. 例如文献 [12] 研究了一种具有复合切换机制的切换系统, 其子系统的驻留时间包括两部分: 确定性部分和随机驻留时间 (服从指数分布). 显然, 若各子系统的确定性驻留时间为零, 则上述切换系统就退化成 MJLS. 而文献 [13-14] 考虑切换系统结构上的变化, 提出了切换动态 MJLS (Switching dynamics MJLS, SD-MJLS)^[13] 和切换 MJLS (Switching MJLS, S-MJLS)^[14] 这两种新类型系统. SD-MJLS 和 S-MJLS 结构如图 1 所示, 整个系统中同时存在着确定性切换 $\gamma(k)$ 和 Markov 切换 $\sigma(k)$. 横向的确定性切换选择某个子系统激活工作, 纵向 Markov 随机切换选择工作模态. SD-MJLS/S-MJLS 不同之处在于, SD-MJLS 中 Markov 链转移速率是固定不变的, 即确定性切换不影响 Markov 链的转移速率. 而 S-MJLS 中的 Markov 链转移速率会随着子系统的切换而变化. 文献 [14] 研究了确定性切换满足 DT 约束时 S-MJLS 的 MS 稳定性, 文献 [13] 分别针对确定性切换满足 DT 和 ADT 约束的情况, 利用 Markov 链的遍历性研究了 SD-MJLS 的 EAS 稳定性.

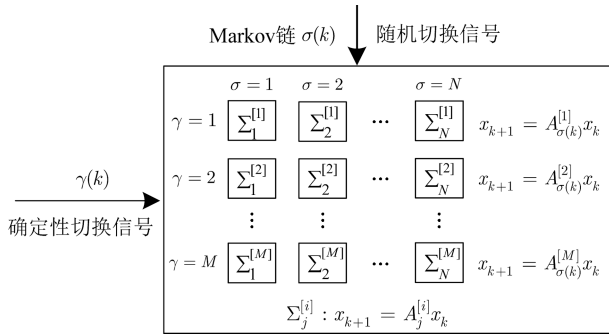


图 1 SD-MJLS/S-MJLS 示意图

Fig. 1 Schematic diagram of SD-MJLS/S-MJLS

在上述基础上, 本文提出了另一种新结构类型的切换系统——两层切换系统 (Two-level switched system, TSS), 如图 2 所示. 在 TSS 中, 多个 MJLS 子系统间的切换 (顶层切换) 是确定性的, 每个 MJLS 子系统模态间的随机切换 (底层切换) 则服从不同的 Markov 链. 与 SD-MJLS/S-MJLS 相比, TSS 更具一般性: 在 SD-MJLS/S-MJLS 中, 不同 MJLS 子系统的模态数必须相同且由同一个 Markov 链控制模态切换; 而在 TSS 中, 不同 MJLS 子系统模态间的切换是由不同的 Markov 链控制, 因而模态数目可以不同. SD-MJLS/S-MJLS 可以视为本文 TSS 的一个特例 (当 TSS 底层切换由同一个 Markov 链控制时). TSS 可以用于具有复杂切换特性系统的建模, 例如一个具有多个工作状况的

复杂系统, 其工况切换取决于确定性的控制指令, 而不同的工况下系统中随机故障的类型可能各不相同, 需采用不同的 Markov 链来描述. 此时该系统的数学模型就是一个 TSS.

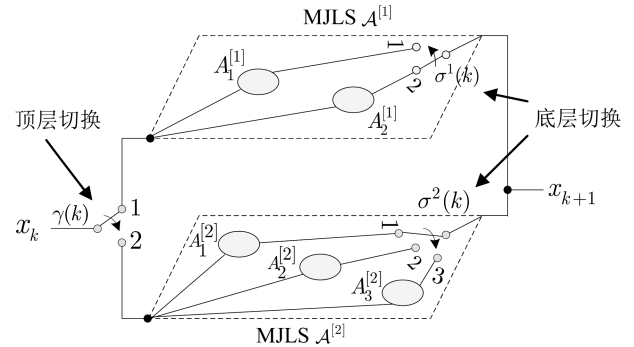


图 2 两层切换系统

Fig. 2 Two-level switched systems

本文针对存在参数不确定性的 TSS, 研究了其鲁棒 EAS 稳定性. 值得一提的是, 由于 TSS 中多个 MJLS 交替作用, 无法采用文献 [13] 中基于 Markov 链遍历性特征的研究方法. 本文通过分析 MJLS 的随机统计特征并结合 PDT 方法, 以线性矩阵不等式形式给出了 TSS 鲁棒 EAS 稳定的一个充分条件. 仿真例子验证了结论的正确性.

符号说明: 在本文中, $1_{N \times N}$ 表示元素全为 1 的 $N \times N$ 维矩阵, 上标 T 表示矩阵或向量转置, $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数, $\lambda_{\max}(M)$ 和 $\lambda_{\min}(M)$ 分别表示矩阵 M 的最大特征值和最小特征值, $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集, $\mathbf{Z}_{[n_1, n_2]}$ 表示集合 $\{k \in \mathbf{Z}_+ | n_1 \leq k \leq n_2\}$.

1 问题描述

考虑如下离散时间两层切换系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \bar{A}_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{\gamma(k)} \mathbf{x}_k \quad (1)$$

其中系统状态 $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, 顶层切换 $\gamma(k) \in \mathcal{M} := \{1, 2, \dots, M\}$ 是一个分段常值函数, 指定一个子 MJLS 在 k 时刻作用, 底层切换 $\sigma^{\gamma(k)}(k) \in \mathcal{N}_{\gamma(k)} := \{1, 2, \dots, N_{\gamma(k)}\}$ 是一个 Markov 链, 决定第 $\gamma(k)$ 个子 MJLS 的一个模态在 k 时刻作用. $\bar{A}_i^{[j]} \in \{A_i^{[j]} + L_i^{[j]} \Delta_i^{[j]} N_i^{[j]} | \Delta_i^{[j]} \in \mathbf{R}^{m_i^{[j]} \times p_i^{[j]}}, \|\Delta_i^{[j]}\| \leq w_i^{[j]}\}$, $j \in \mathcal{M}$, $i \in \mathcal{N}_j$, 其中 $A_i^{[j]} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $L_i^{[j]} \in \mathbf{R}^{n \times m_i^{[j]}}$ 和 $N_i^{[j]} \in \mathbf{R}^{p_i^{[j]} \times n}$ 是常数矩阵, $w_i^{[j]}$ 是给定的扰动半径.

$\forall j \in \mathcal{M}$, Markov 链 $\{\sigma^j(k)\}$ 的一步转移概率矩阵记为 $P^{[j]} := [p_{rs}^{[j]}]_{N_j \times N_j}$, $p_{rs}^{[j]} := \Pr\{\sigma^j(k+1) = s | \sigma^j(k) = r\}$, $r, s \in \mathcal{N}_j$; 两层切换系统 (1) 顶层切换的初始位置记为 $\gamma_0 := \gamma(0)$, 对应的子 MJLS 的初始概率分布记为 $f^{\gamma_0} = [f_1^{\gamma_0} f_2^{\gamma_0} \dots f_{N_{\gamma_0}}^{\gamma_0}]$, 其中

$f_i^{\gamma_0} = \Pr\{\sigma^{\gamma_0}(0) = i\}$, $i \in \mathcal{N}_{\gamma_0}$, $\forall j \in \mathcal{M}$, 本文假设 Markov 链 $\{\sigma^j(k)\}$ 是不可约且非周期的, 则它是遍历的且存在平稳分布 $\pi^{[j]} = [\pi_1^{[j]} \pi_2^{[j]} \cdots \pi_{N_j}^{[j]}]$, 满足方程 $\pi^{[j]} = \pi^{[j]} P^{[j]}$ 和 $\sum_{i=1}^{N_j} \pi_i^{[j]} = 1$.

如图 3 所示, PDT 切换是由切换规则相同的阶段构成, 每个阶段均包括两个部分: τ 部分和 T 部分. 在 τ 部分中, 只有一个子系统 (该子系统可以是任意的一个, 并非为固定) 激活且其作用时间至少为 τ ; 在 T 部分中, 有多个子系统激活, 每个子系统的作用时间小于 τ 且所有激活子系统作用的总时间小于 T . 如果第 p 阶段中 T 部分的实际运行时间记为 T_p , 则 $T_p = \sum_{r=1}^{\theta_p} T^{[\gamma(k_{s_p+r})]} \leq T$, 其中 $T^{[\gamma(k_{s_p+r})]} < \tau$ 表示在切换时刻 $k_{s_p+r} \in [k_{s_p+1}, k_{s_{p+1}})$, $r \in \mathbf{Z}_{[1, \theta_p]}$ 处激活子系统的运行时间, $\theta_p := \theta(k_{s_p+1}, k_{s_{p+1}})$ 表示 $\gamma(k)$ 在区间 $[k_{s_p+1}, k_{s_{p+1}})$ 内的切换次数, k_{s_p+1} 表示第 p 个阶段中时刻 k_{s_p} 之后的下一个切换时刻, $k_{s_{p+1}}$ 表示第 $p+1$ 阶段的切入时刻.

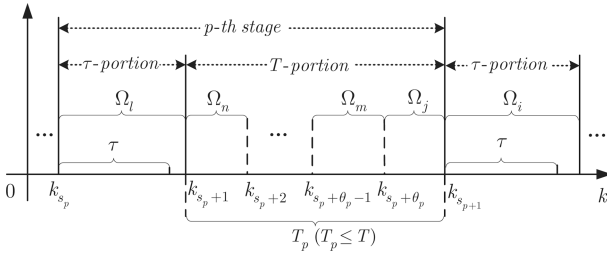


图 3 PDT 切换示意图

Fig. 3 Schematic diagram of PDT switching

本文研究了顶层切换满足 PDT 约束, 且存在参数不确定性的 TSS 鲁棒 EAS 稳定性问题, 下面给出了相关定义:

定义 1^[3]. 考虑切换时刻 $k_0, k_1, \dots, k_s, \dots$, 其中 $k_0 = 0$. 假如存在无数个长度大于 τ 的不相交区间, 且具有该性质的连续区间被一个不大于 T 的时间间隔分割, 则常数 $\tau > 0$ 被称为持续驻留时间 (Persistent dwell-time, PDT), T 被称为持续周期.

定义 2^[15]. 对于切换信号 σ 和任意给定的时刻 $K \geq k \geq k_0$, 记 $N_\sigma(k, K)$ 为 σ 在 $[k, K)$ 内的切换次数. 如果对于 $\tau_a > 0$, $N_0 > 0$, 满足 $N_\sigma(k, K) \leq N_0 + (K - k)/\tau_a$, 则 τ_a 是切换信号 σ 的平均驻留时间, N_0 称为抖振界.

注 1. 由 PDT 切换的定义可知, 当 $T = 0$ 时, PDT 切换将退化为 DT 切换. 另一方面, 如果用 $\vartheta_{ADT}(\tau_a, N_0)$ 表示参数为 τ_a 和 N_0 的 ADT 切换的集合, 用 $\vartheta_{PDT}(\tau, T)$ 表示参数为 τ 和 T 的 PDT 切换的集合. 则任意满足 ADT 切换 $\vartheta_{ADT}(\tau_a, N_0)$ 的切换信号所等效的 PDT 切换为 $\vartheta_{PDT}(\delta\tau_a, \eta\tau_a)$, 其中 $\tau_a > 0$, $N_0 \geq 1$, $\delta \in (0, 1)$ 和 $\eta = \delta(N_0 - 1)/(1 - \delta)$. 详细推导可参见文献 [3].

定义 3^[16]. 对于任意初始条件 $(\mathbf{x}_0, \gamma_0, f^{\gamma_0})$ 和 $\forall \Delta_i^{[j]}$ 满足 $\|\Delta_i^{[j]}\| \leq w_i^{[j]}$, 离散时间不确定 TSS (1) 是鲁棒 EAS 稳定的当且仅当 $\exists \rho > 0$, 有下面等式成立

$$\Pr \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\mathbf{x}_k\| \leq -\rho \right\} = 1 \quad (2)$$

引理 1^[17]. 对于任意初始条件 $(\mathbf{x}_0, \gamma_0, f^{\gamma_0})$ 和 $\forall \Delta_i^{[j]}$ 满足 $\|\Delta_i^{[j]}\| \leq w_i^{[j]}$, 离散时间不确定 TSS (1) 是鲁棒 EAS 稳定的当且仅当 $E(\lambda) < 0$, 其中 λ 是最大李亚普诺夫指数定义为

$$\lambda = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(0, k)\| \quad (3)$$

$\Phi(0, k)$ 是两层切换系统 (1) 的随机转移矩阵.

注 2. 本文的两层切换系统 (1) 是由多个不同的 MJLS 子系统组成, 不同的 MJLS 子系统模态间的切换是由不同的 Markov 链控制. 对于 (1) 中任意的子系统, 每次切入时子系统模态的选取是任意的, 和上次该子系统切出时的模态之间不存在 Markov 跳变关系, 因此该子系统所对应的 Markov 链是不连续的且无法达到稳定状态, 这将无法仿照文献 [13] 利用 Markov 链的遍历性来简化 EAS 稳定性分析. 为此, 必须对 Markov 链进行暂态分析. 下面给出了 Markov 链的两个暂态特性.

引理 2^[11]. 考虑一个 N 模态的 Markov 链 $\{\sigma(k)\}$, 记 $T_i(0, k)$ 为模态 i 在区间 $[0, k)$ 内总的的作用时间 (即驻留时间), $N_{ij}(0, k)$ 为区间 $[0, k)$ 内由模态 i 跳转到模态 j 的总次数. 则在初始概率分布 $f = [f_1 \cdots f_N]$ 已知时, 对于所有的模态 i, j 有下面的等式成立

$$E[T_i(0, k)] = \pi_i k + (f - \pi) \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i \quad (4)$$

$$E[N_{ij}(0, k)] = \pi_i p_{ij} k + p_{ij} (f - \pi) \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i + (f_i - \pi_i) p_{ij}, i \neq j \quad (5)$$

其中 $[\cdot]_i$ 表示一个矩阵的第 i 列, $P = [p_{ij}]_{N \times N}$ 为 Markov 链 $\{\sigma(k)\}$ 的转移概率矩阵, $\pi = [\pi_1 \cdots \pi_N]$ 为其平稳分布.

注 3. 引理 2 给出了 Markov 链 $\{\sigma(k)\}$ 的两个暂态特性. 可以看出 $E[T_i(0, k)]$ 和 $E[N_{ij}(0, k)]$ 与初始概率分布 f 是有关的. 当 f 为任意或未知时, $E[T_i(0, k)]$ 和 $E[N_{ij}(0, k)]$ 的取值范围有如下关系,

证明见附录 A.

$$\pi_i k - \delta_i \leq E[T_i(0, k)] \leq \pi_i k + \delta_i \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi_i p_{ij} k - p_{ij} \delta_i - \pi_i p_{ij} &\leq E[N_{ij}(0, k)] \leq \pi_i p_{ij} k + \\ p_{ij} \delta_i + p_{ij} - \pi_i p_{ij}, i &\neq j \end{aligned} \quad (7)$$

其中, δ_i 为 $(f - \pi) \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i$ 的最大值, 计算方法见附录 A.

2 主要结果

基于注 3 中 Markov 链暂态特性的取值范围和 PDT 方法, 下面给出了不确定 TSS (1) 鲁棒 EAS 稳定的一个充分条件.

定理 1. 考虑离散时间不确定 TSS (1), 对于 $\forall i, j \in \mathcal{M}$, 若存在一组矩阵 $Q_r^{[j]} > 0$ 以及标量 $\xi^{[i]} > 1, s_r^{[j]} > 0, \lambda_r^{[j]} > 0$, 满足式 (8)~(11), PDT 切换参数满足式 (12), 则切换系统是鲁棒 EAS 稳定的.

$$Q_q^{[j]} \leq \xi^{[i]} Q_r^{[j]}, i \neq j, q \in \mathcal{N}_i, r \in \mathcal{N}_j \quad (8)$$

$$(L_r^{[j]})^T Q_r^{[j]} L_r^{[j]} \leq s_r^{[j]} I, r \in \mathcal{N}_j \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} B_r^{[j]} & D_r^{[j]} & (N_r^{[j]})^T \\ (D_r^{[j]})^T & \frac{-1}{(w_r^{[j]})^2} I & 0 \\ N_r^{[j]} & 0 & \frac{-1}{1+s_r^{[j]}(w_r^{[j]})^2} I \end{bmatrix} \leq 0, r \in \mathcal{N}_j \quad (10)$$

$$Q_r^{[j]} \leq u_{qr}^{[j]} Q_q^{[j]}, q, r \in \mathcal{N}_j, q \neq r \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{\beta}(T+1)}{\tau+T} + \tilde{\alpha} < 0 \quad (12)$$

其中, $B_r^{[j]} = (A_r^{[j]})^T Q_r^{[j]} A_r^{[j]} - \lambda_r^{[j]} Q_r^{[j]}$, $D_r^{[j]} = (A_r^{[j]})^T Q_r^{[j]} L_r^{[j]}$, $\tilde{\alpha} = \max_{j \in \mathcal{M}} \{\alpha^{[j]}\} < 0$, $\tilde{\beta} = \max_{j \in \mathcal{M}} \{\beta^{[j]}\}$, $\alpha^{[j]} = \sum_{a=1}^{N_j} \pi_a^{[j]} \ln \lambda_a^{[j]} + \sum_{b=1, a=1}^{N_j} p_{ba}^{[j]} \pi_b^{[j]} \ln u_{ba}^{[j]}$, $\beta^{[j]} = \ln \xi^{[j]} + \sum_{a \in \mathcal{N}_j^+} \delta_a^{[j]} \ln \lambda_a^{[j]} - \sum_{a \in \mathcal{N}_j^-} \delta_a^{[j]} \ln \lambda_a^{[j]} + \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u+}} (p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} - \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]} + p_{ba}^{[j]} \ln u_{ba}^{[j]}) - \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u-}} (p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} + \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]} \ln u_{ba}^{[j]})$, $\mathcal{N}_j^{\mu+} = \{(m, n) | \mu_{mn}^{[j]} \geq 1, m, n \in \mathcal{N}_j, m \neq n\}$, $\mathcal{N}_j^{\mu-} = \{(m, n) | \mu_{mn}^{[j]} < 1, m, n \in \mathcal{N}_j, m \neq n\}$, $\mathcal{N}_j^{\lambda+} = \{m \in \mathcal{N}_j | \lambda_m^{[j]} > 1\}$, $\mathcal{N}_j^{\lambda-} = \{m \in \mathcal{N}_j | \lambda_m^{[j]} < 1\}$, $\delta_b^{[j]}$ 由附录 A 可得.

证明. 构造一个分段李雅普诺夫函数 $V(k) = \mathbf{x}_k^T Q_{N(k)}^{[\gamma(k)]} \mathbf{x}_k$, 其中 $N(k) = \sigma^{\gamma(k)}(k)$. 为了便于分析, 假设顶层切换 $\gamma(k)$ 在第 p 阶段内发生了 n 次切换, 对应的切换时刻由小到大依次为 $h_1, h_2, \dots, h_n$, 如图 4 所示. 其中, h_1 为第 p 阶段的切入时刻, $\bar{h}$ 为第

$p+1$ 阶段的切入时刻.

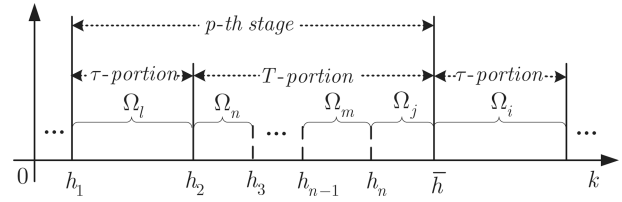


图 4 PDT 第 p 阶段的切换序列

Fig. 4 The p -th stage switching sequence of PDT

考虑如下一个顶层切换序列:

$$\begin{cases} \gamma(k) = j, k \in [h_n, \bar{h}), i \neq j \\ \gamma(\bar{h}) = i, \end{cases}$$

并假定 $\sigma^i(\bar{h}) = m, m \in \mathcal{N}_i$.

不失一般性, 假设在区间 $[h_n, \bar{h})$ 内底层切换的次数为 l , 其对应的切换时刻由小到大依次记为 $s_1 (s_1 = h_n), s_2, \dots, s_l$. 因此,

$$\begin{aligned} \sigma^j(s_1) &= \sigma^j(s_1 + 1) = \dots = \sigma^j(s_2 - 1) \neq \\ \sigma^j(s_2) &\dots \neq \sigma^j(s_{l-1}) = b = \dots = \sigma^j(s_l - 1) \neq \\ \sigma^j(s_l) &= a = \dots = \sigma^j(\bar{h} - 1) \end{aligned}$$

根据条件 (8) 以及式 (1), 可得

$$\begin{aligned} V(\bar{h}) &= \mathbf{x}_{\bar{h}}^T Q_m^{[i]} \mathbf{x}_{\bar{h}} \leq \\ \xi^{[j]} \mathbf{x}_{\bar{h}}^T Q_a^{[j]} \mathbf{x}_{\bar{h}} &= \\ \xi^{[j]} \mathbf{x}_{h-1}^T \left((A_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} A_a^{[j]} + \right. \\ (A_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} L_a^{[j]} \Delta_a^{[j]} N_a^{[j]} &+ (L_a^{[j]} \Delta_a^{[j]} N_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} A_a^{[j]} + \\ (N_a^{[j]})^T (\Delta_a^{[j]})^T (L_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} L_a^{[j]} \Delta_a^{[j]} N_a^{[j]} \Big) \mathbf{x}_{h-1} &= \\ \xi^{[j]} \mathbf{x}_{h-1}^T \left(E_a^{[j]} + F_a^{[j]} G_a^{[j]} + (F_a^{[j]} G_a^{[j]})^T + \right. \\ (G_a^{[j]})^T (L_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} L_a^{[j]} G_a^{[j]} \Big) \mathbf{x}_{h-1} & \quad (13) \end{aligned}$$

其中 $E_a^{[j]} = (A_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} A_a^{[j]}$, $F_a^{[j]} = (A_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} L_a^{[j]}$, $G_a^{[j]} = \Delta_a^{[j]} N_a^{[j]}$. 由条件 (9) 知 $(L_a^{[j]})^T Q_a^{[j]} L_a^{[j]} \leq$

$s_a^{[j]}I$, 则

$$\begin{aligned}
 & E_a^{[j]} + F_a^{[j]}G_a^{[j]} + (F_a^{[j]}G_a^{[j]})^T + \\
 & (G_a^{[j]})^T(L_a^{[j]})^TQ_a^{[j]}L_a^{[j]}G_a^{[j]} \leq \\
 & E_a^{[j]} + F_a^{[j]}G_a^{[j]} + (F_a^{[j]}G_a^{[j]})^T + s_a^{[j]}(G_a^{[j]})^TG_a^{[j]} = \\
 & E_a^{[j]} - \left(w_a^{[j]}F_a^{[j]} - \frac{(G_a^{[j]})^T}{w_a^{[j]}} \right) \times \\
 & \left(w_a^{[j]}F_a^{[j]} - \frac{(G_a^{[j]})^T}{w_a^{[j]}} \right)^T + (w_a^{[j]})^2F_a^{[j]}(F_a^{[j]})^T + \\
 & \left(\frac{1}{(w_a^{[j]})^2} + s_a^{[j]} \right) (G_a^{[j]})^TG_a^{[j]} \leq \\
 & E_a^{[j]} + (w_a^{[j]})^2F_a^{[j]}(F_a^{[j]})^T + \\
 & \left(\frac{1}{(w_a^{[j]})^2} + s_a^{[j]} \right) (G_a^{[j]})^TG_a^{[j]} \quad (14)
 \end{aligned}$$

又因为 $\|\Delta_a^{[j]}\| \leq w_a^{[j]}, \frac{(\Delta_a^{[j]})^T\Delta_a^{[j]}}{(w_a^{[j]})^2} \leq I$, 所以

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{(w_a^{[j]})^2} + s_a^{[j]} \right) (G_a^{[j]})^TG_a^{[j]} \leq \\
 & (1 + s_a^{[j]}(w_a^{[j]})^2)(N_a^{[j]})^TN_a^{[j]} \quad (15)
 \end{aligned}$$

将式 (15) 代入式 (14), 并结合式 (13) 得

$$\begin{aligned}
 V(\bar{h}) \leq & \xi^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-1}^T \left(E_a^{[j]} + (w_a^{[j]})^2F_a^{[j]}(F_a^{[j]})^T + \right. \\
 & \left. (1 + s_a^{[j]}(w_a^{[j]})^2)(N_a^{[j]})^TN_a^{[j]} \right) \mathbf{x}_{\bar{h}-1} \quad (16)
 \end{aligned}$$

由 Schur 补引理, 条件 (10) 等价于

$$\begin{aligned}
 & E_a^{[j]} + (w_a^{[j]})^2F_a^{[j]}(F_a^{[j]})^T + \\
 & (1 + s_a^{[j]}(w_a^{[j]})^2)(N_a^{[j]})^TN_a^{[j]} \leq \lambda_a^{[j]}Q_a^{[j]} \quad (17)
 \end{aligned}$$

将式 (17) 代入到式 (16) 可得

$$V(\bar{h}) \leq \xi^{[j]}\lambda_a^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-1}^TQ_a^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-1} \quad (18)$$

注意到在区间 $[s_l, \bar{h}-1]$ 上只有第 j 个 MJLS 的模式 a 作用, 用式 (13)~(18) 类似的推导可得

$$\begin{aligned}
 V(\bar{h}) \leq & \xi^{[j]}\lambda_a^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-1}^TQ_a^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-1} \leq \\
 & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^2\mathbf{x}_{\bar{h}-2}^TQ_a^{[j]}\mathbf{x}_{\bar{h}-2} \leq \cdots \leq \\
 & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^{\bar{h}-s_l}\mathbf{x}_{s_l}^TQ_a^{[j]}\mathbf{x}_{s_l} \quad (19)
 \end{aligned}$$

根据式 (19) 和条件 (11), 可得

$$\begin{aligned}
 V(\bar{h}) \leq & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^{\bar{h}-s_l}u_{ba}^{[j]}\mathbf{x}_{s_l}^TQ_b^{[j]}\mathbf{x}_{s_l} = \\
 & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^{\bar{h}-s_l}u_{ba}^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1}^T(\bar{A}_b^{[j]})^TQ_b^{[j]}\bar{A}_b^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1} \quad (20)
 \end{aligned}$$

由推导式 (19) 和式 (20) 类似的步骤可得

$$\begin{aligned}
 V(\bar{h}) \leq & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^{\bar{h}-s_l}u_{ba}^{[j]}\lambda_b^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1}^TQ_b^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1} \leq \\
 & \xi^{[j]}(\lambda_a^{[j]})^{\bar{h}-s_l}(\lambda_b^{[j]})^{s_l-s_l-1}u_{ba}^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1}^TQ_b^{[j]}\mathbf{x}_{s_l-1} \leq \cdots \leq \\
 & \xi^{[j]}\prod_{a=1}^{N_j}(\lambda_a^{[j]})^{T_a^{[j]}(s_1, \bar{h})} \times \\
 & \prod_{\substack{b=1, a=1 \\ a \neq b}}^{N_j} (u_{ba}^{[j]})^{N_{ba}^{[j]}(s_1, \bar{h})} V(s_1) \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中 $T_a^{[j]}(s_1, \bar{h})$ 表示第 j 个子 MJLS 的模式 a 在区间 $[s_1, \bar{h})$ 内的总驻留时间, $N_{ba}^{[j]}(s_1, \bar{h})$ 表示在区间 $[s_1, \bar{h})$ 内第 j 个子 MJLS 的模式由 b 切换到 a 的次数, $s_1 = h_n$.

式 (21) 两边取对数可得

$$\begin{aligned}
 \ln V(\bar{h}) \leq & \ln \xi^{[j]} + \sum_{a=1}^{N_j} T_a^{[j]}(h_n, \bar{h}) \ln \lambda_a^{[j]} + \\
 & \sum_{\substack{b=1, a=1 \\ a \neq b}}^{N_j} N_{ba}^{[j]}(h_n, \bar{h}) \ln u_{ba}^{[j]} + \ln V(h_n) \quad (22)
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 E[\ln V(\bar{h})] \leq & \ln \xi^{[j]} + \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^+}} E[T_a^{[j]}(h_n, \bar{h})] \ln \lambda_a^{[j]} + \\
 & \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^-}} E[T_a^{[j]}(h_n, \bar{h})] \ln \lambda_a^{[j]} + \\
 & \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^+}} E[N_{ba}^{[j]}(h_n, \bar{h})] \ln u_{ba}^{[j]} + \\
 & \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^-}} E[N_{ba}^{[j]}(h_n, \bar{h})] \ln u_{ba}^{[j]} + \\
 & E[\ln V(h_n)] \quad (23)
 \end{aligned}$$

另一方面, 由式 (6) 和式 (7) 可得

$$\pi_a^{[j]}\Delta_k - \delta_a^{[j]} \leq E[T_a^{[j]}(h_n, \bar{h})] \leq \pi_a^{[j]}\Delta_k + \delta_a^{[j]} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 \pi_b^{[j]}p_{ba}^{[j]}\Delta_k - p_{ba}^{[j]}\delta_b^{[j]} - \pi_b^{[j]}p_{ba}^{[j]} \leq & E[N_{ba}^{[j]}(h_n, \bar{h})] \leq \\
 \pi_b^{[j]}p_{ba}^{[j]}\Delta_k + p_{ba}^{[j]}\delta_b^{[j]} + p_{ba}^{[j]} - \pi_b^{[j]}p_{ba}^{[j]}, & b \neq a \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中 $\Delta_k = \bar{h} - h_n$. 将式 (24) 和式 (25) 代入式 (23),

可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ln V(\bar{h})] &\leq \ln \xi^{[j]} + \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^+}} (\pi_a^{[j]} \Delta_k + \delta_a^{[j]}) \ln \lambda_a^{[j]} + \\ &\quad \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^-}} (\pi_a^{[j]} \Delta_k - \delta_a^{[j]}) \ln \lambda_a^{[j]} + \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^+}} (\pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]} \Delta_k + \\ &\quad p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} + p_{ba}^{[j]} - \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]}) \ln u_{ba}^{[j]} + \\ &\quad \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^-}} (\pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]} \Delta_k - p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} - \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]}) \ln u_{ba}^{[j]} + \\ \mathbb{E} [\ln V(h_n)] &= \beta^{[j]} + \alpha^{[j]} \Delta_k + \mathbb{E} [\ln V(h_n)] \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \alpha^{[j]} &= \sum_{a=1}^{N_j} \pi_a^{[j]} \ln \lambda_a^{[j]} + \sum_{\substack{b=1, a=1 \\ a \neq b}}^{N_j} p_{ba}^{[j]} \pi_b^{[j]} \ln u_{ba}^{[j]}, \\ \beta^{[j]} &= \ln \xi^{[j]} + \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^+}} \delta_a^{[j]} \ln \lambda_a^{[j]} - \sum_{a \in \mathcal{N}_j^{\lambda^-}} \delta_a^{[j]} \times \\ &\quad \ln \lambda_a^{[j]} + \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^+}} (p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} - \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]} + p_{ba}^{[j]}) \ln u_{ba}^{[j]} - \\ &\quad \sum_{(b,a) \in \mathcal{N}_j^{u^-}} (p_{ba}^{[j]} \delta_b^{[j]} + \pi_b^{[j]} p_{ba}^{[j]}) \ln u_{ba}^{[j]} > 0. \end{aligned}$$

记 $T_D^{[j]}(h_1, \bar{h})$ 和 $D^{[j]}(h_1, \bar{h})$ 分别为第 j 个子 MJLS 在区间 $[h_1, \bar{h})$ 内的总驻留时间和总作用次数, 则由式 (26) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ln V(\bar{h})] &< \sum_{j=1}^M \beta^{[j]} D^{[j]}(h_1, \bar{h}) + \\ &\quad \sum_{j=1}^M \alpha^{[j]} T_D^{[j]}(h_1, \bar{h}) + \mathbb{E} [\ln V(h_1)] \quad (27) \end{aligned}$$

因此, 由式 (27) 依次类推可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ln V(k)] &< \sum_{j=1}^M \beta^{[j]} D^{[j]}(0, k) + \sum_{j=1}^M \alpha^{[j]} T_D^{[j]}(0, k) + \\ \mathbb{E} [\ln V(0)] &< \tilde{\beta} \sum_{j=1}^M D^{[j]}(0, k) + \\ &\quad \tilde{\alpha} \sum_{j=1}^M T_D^{[j]}(0, k) + \mathbb{E} [\ln V(0)] = \\ &\quad \tilde{\beta} \theta(0, k) + \tilde{\alpha} k + \mathbb{E} [\ln V(0)] \quad (28) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\alpha} = \max_{j \in \mathcal{M}} \{\alpha^{[j]}\}$, $\tilde{\beta} = \max_{j \in \mathcal{M}} \{\beta^{[j]}\}$, $\sum_{j=1}^M D^{[j]}(0, k) = \theta(0, k)$, $\sum_{j=1}^M T_D^{[j]}(0, k) = k$, $\theta(0, k)$ 表示顶层切换 $\gamma(k)$ 在区间 $[0, k)$ 内的切换次数.

注意到 $0 \leq \theta(0, k) \leq \left\lceil \frac{k}{\tau+T} \right\rceil (T+1) \leq$

$\left(\frac{k}{\tau+T} + 1\right) (T+1)$ 和 $\tilde{\beta} > 0$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ln V(k)] &< \tilde{\beta} \left(\frac{k}{\tau+T} + 1 \right) (T+1) + \tilde{\alpha} k + \\ \mathbb{E} [\ln V(0)] &= k \left(\frac{\tilde{\beta}(T+1)}{\tau+T} + \tilde{\alpha} \right) + \\ &\quad \tilde{\beta}(T+1) + \mathbb{E} [\ln V(0)] \quad (29) \end{aligned}$$

又因为

$$\lambda_{\min}(R_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{[\gamma(k)]}) \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k \leq \mathbf{x}_k^T R_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{[\gamma(k)]} \mathbf{x}_k = V(k) \quad (30)$$

$$V(0) \leq \lambda_{\max}(R_{\sigma^{\gamma(0)}(0)}^{[\gamma(0)]}) \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 \quad (31)$$

所以根据式 (29) ~ (31), 得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ln \frac{\|\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \right] &\leq \frac{k}{2} \left(\frac{\tilde{\beta}(T+1)}{\tau+T} + \tilde{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\beta}(T+1) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} [\ln \lambda_{\max}(R_{\sigma^{\gamma(0)}(0)}^{[\gamma(0)]})] - \mathbb{E} [\ln \lambda_{\min}(R_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{[\gamma(k)]})] \right) \quad (32) \end{aligned}$$

又因为

$$\|\Phi(k, 0)\| = \max_{\mathbf{x}_0 \neq 0} \frac{\|\Phi(k, 0)\mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x}_0\|} = \max_{\mathbf{x}_0 \neq 0} \frac{\|\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \quad (33)$$

则由式 (32) ~ (33) 和式 (12) 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\Phi(k, 0)\| \right] &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\beta}(T+1)}{\tau+T} + \tilde{\alpha} \right) + \\ &\quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \left(\mathbb{E} [\ln \lambda_{\max}(R_{\sigma^{\gamma(0)}(0)}^{[\gamma(0)]})] - \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E} [\ln \lambda_{\min}(R_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{[\gamma(k)]})] \right) = \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\beta}(T+1)}{\tau+T} + \tilde{\alpha} \right) < 0 \quad (34) \end{aligned}$$

因此, 根据引理 1 可知离散时间 TSS (1) 是鲁棒 EAS 稳定的. $\square$

注 4. 在定理 1 中, 如果 $T = 0$ (即 PDT 切换中只存在 τ 部分), 此时 PDT 切换将退化为 DT 切换. 对应的条件 (12) 将变为 $\tau > -\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$.

注 5. 在定理 1 中, 由于需要设计参数 $\xi^{[i]}$, $s_r^{[i]}$, $\lambda_r^{[i]}$, $u_{qr}^{[i]}$, $Q_r^{[i]}$, 所以条件 (8) ~ (11) 是非凸的. 这些参数可以通过以下步骤得到: 1) 求解不等式 (8) ~ (10) 得到最小的 $\lambda_r^{[i]}$ 和对应的 $\xi^{[i]}$, $s_r^{[i]}$, $Q_r^{[i]}$; 2) 将步骤 1) 中得到的 $Q_r^{[i]}$ 和 $Q_q^{[i]}$ 代入不等式 (11) 中, 解得 $u_{qr}^{[i]}$; 3) 将得到的 $\lambda_r^{[i]}$ 和 $u_{qr}^{[i]}$ 代入到 $\alpha^{[j]}$ 的表达式中, 检查 $\alpha^{[j]}$ 是否小于 0. 如果 $\alpha^{[j]} \geq 0$, 增加 $\lambda_r^{[i]}$ 的值并重复以上步骤; 4) 根据上面得到的参数, 并结合式 (12) 得到使系统稳定的 T 和 τ .

3 仿真例子

考虑离散时间不确定 TSS: $\mathbf{x}_{k+1} = \bar{A}_{\sigma^{\gamma(k)}(k)}^{\gamma(k)} \mathbf{x}_k$, 其中 $\gamma(k) = 1, 2$, $\sigma^{\gamma(k)}(k) = 1, 2$, $\bar{A}_i^{[j]} \in \{A_i^{[j]} + L_i^{[j]} \Delta_i^{[j]} N_i^{[j]} | \Delta_i^{[j]} \in \mathbf{R}^{m_i^{[j]} \times p_i^{[j]}}, \|\Delta_i^{[j]}\| \leq w_i^{[j]}\}$. 各参数如下:

$$A_1^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, L_1^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$N_1^{[1]} = [1 \quad 1]$$

$$A_2^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, L_2^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$N_2^{[1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, L_1^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1^{[2]} = [1 \quad 2]$$

$$A_2^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, L_2^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_2^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

扰动半径为 $w_1^{[1]} = 0.2$, $w_2^{[1]} = 0.25$, $w_1^{[2]} = 0.35$, $w_2^{[2]} = 0.3$. 不确定矩阵如下:

$$\Delta_1^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.2 \sin(0.4k) \\ 0.2 \cos(0.4k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.25 \cos(0.1k) & 0 \\ 0 & 0.25 \sin(0.5k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.35 \sin(0.5k) \\ 0.35 \cos(0.5k) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.3 \cos(0.05k) & 0 \\ 0 & 0.3 \sin(0.05k) \end{bmatrix}$$

Markov 链 $\{\sigma^1(k)\}$ 和 $\{\sigma^2(k)\}$ 的一步转移概率矩阵分别为

$$P^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, P^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

对应的平稳分布分别是 $\pi^{[1]} = [3/7 \quad 4/7]$, $\pi^{[2]} = [7/12 \quad 5/12]$.

应用 Matlab LMI 工具箱求解式 (8) ~ (11), 可得

$$Q_1^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.4001 & -0.2032 \\ -0.2032 & 0.8502 \end{bmatrix}$$

$$Q_2^{[1]} = \begin{bmatrix} 0.5340 & -0.2806 \\ -0.2806 & 0.8005 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.1076 & -0.0643 \\ -0.0643 & 1.2035 \end{bmatrix}$$

$$Q_2^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.7198 & -0.1770 \\ -0.1770 & 1.0850 \end{bmatrix}$$

$\xi^{[1]} = 1.8$, $\xi^{[2]} = 1.5$, $s_1^{[1]} = -2$, $s_2^{[1]} = 2$, $s_1^{[2]} = -2$, $s_2^{[2]} = -2$, $\lambda_1^{[1]} = 0.1$, $\lambda_2^{[1]} = 1.5$, $\lambda_1^{[2]} = 0.2$, $\lambda_2^{[2]} = 1$, $u_{12}^{[1]} = 0.1$, $u_{21}^{[1]} = 0.1$, $u_{12}^{[2]} = 0.3$, $u_{21}^{[2]} = 0.1$.

由附录 A 可得 $\delta_1^{[1]} = \delta_2^{[1]} = 0.7143$, $\delta_1^{[2]} = \delta_2^{[2]} = 0.8333$.

则 $\alpha^{[1]} = -2.334$, $\beta^{[1]} = 2.535$, $\alpha^{[2]} = -1.9616$, $\beta^{[2]} = 4.614$, $\tilde{\alpha} = -1.9616$, $\tilde{\beta} = 4.614$.

由条件 (12) 可得, 当 T 和 τ 满足 $T < 0.74\tau - 1.74$ 时, 不确定 TSS 是鲁棒 EAS 稳定的. 不妨选取 $T = 13$, $\tau = 20$, 并选择如下一个满足 PDT 约束的周期切换信号 $\gamma(k)$:

$$\gamma(k) = \begin{cases} 1, & k \in [mK, mK + 22] \\ 2, & k \in [mK + 23, mK + 26] \\ 1, & k \in [mK + 27, mK + 30] \\ 2, & k \in [mK + 31, mK + 34] \end{cases}$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots$, 周期 $K = 35$. 图 5 为顶层切换 $\gamma(k)$ 的切换序列, 图 6 给出了由 $\mathbf{x}_0 = [3 \quad -1]^T$ 开始的 $\ln \|\mathbf{x}_k\|$ 的 7 次样本实现, 显然 TSS 是鲁棒 EAS 稳定的.

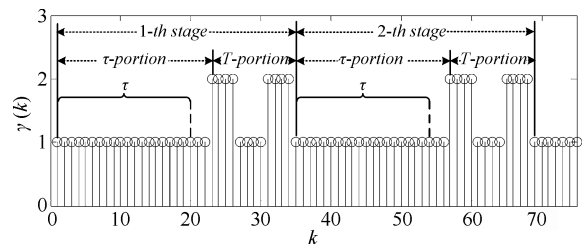
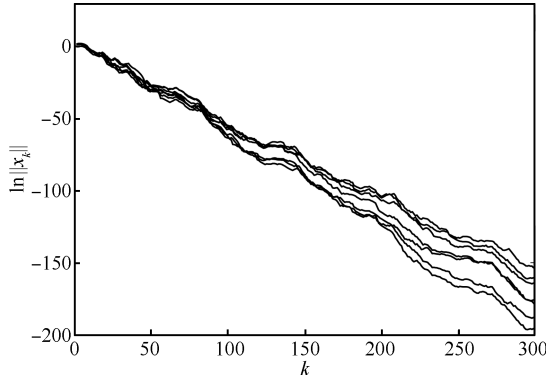


图 5 $\gamma(k)$ 的切换序列

Fig. 5 Switching sequence of $\gamma(k)$

图 6 $\ln||\mathbf{x}_k||$ 的 7 次样本实现Fig. 6 Seven realizations of $\ln||\mathbf{x}_k||$

4 结论

本文提出了一类新型的切换系统——两层切换系统 (Two-level switched systems, TSSs). 该系统顶层切换是确定性的, 底层切换服从多个 Markov 链. TSS 可以用于一类具有分层结构复杂系统的建模与控制设计. 针对顶层切换满足 PDT 约束, 且系统存在参数不确定性的 TSS, 研究了其鲁棒 EAS 稳定性问题. 但在 TSS 中, 由于顶层切换所对应的底层切换分别是由不同的 Markov 链控制, 底层 Markov 链将无法达到稳定状态, Markov 链的遍历性不再适用. 本文基于 Markov 链的暂态特性给出了 TSS 鲁棒 EAS 稳定性的充分条件. 最后用一个数值仿真例子验证了文中方法的有效性.

附录 A

证明. 由于

$$\left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I) = (P+P^2+\cdots+P^k) \times (P-I) = P^{k+1}-P \quad (\text{A1})$$

而另一方面

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I) &= \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I-1_{N \times N}+1_{N \times N}) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I-1_{N \times N}) + \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)1_{N \times N} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I-1_{N \times N}) + k1_{N \times N} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

所以

$$P^{k+1}-P = \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(P-I-1_{N \times N}) + k1_{N \times N} \quad (\text{A3})$$

即

$$P-P^{k+1}+k1_{N \times N} = \left(\sum_{j=1}^k P^j\right)(I-P+1_{N \times N}) \quad (\text{A4})$$

由文献 [18] 中命题 2.14.1, 矩阵 $P-I+1_{N \times N}$ 可逆且满足 $\pi = 1_{1 \times N}(I-P+1_{N \times N})^{-1}$, 所以由式 (A4),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k P^j &= (P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} + \\ &+ k1_{N \times N}(I-P+1_{N \times N})^{-1} = \\ &= (P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} + \\ &+ k1_{N \times 1}1_{1 \times N}(I-P+1_{N \times N})^{-1} = \\ &= (P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} + k1_{N \times 1}\pi \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

注意到 $\pi = \pi P$, 则由式 (A5) 可得

$$\begin{aligned} (f-\pi) \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i &= (f-\pi) \times \\ &\times \left[(P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} + k1_{N \times 1}\pi \right]_i = \\ &= (f-\pi) \left[(P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} \right]_i + \\ &+ k\pi_i(f-\pi)1_{N \times 1} = \\ &= f \left[(P-P^{k+1})(I-P+1_{N \times N})^{-1} \right]_i \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

下面计算在任意 f 和 k 的情况下, $f_i p_{ij}$ 和 $(f-\pi) \times \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i$ 的取值范围:

1) 对于任意 f , 显然

$$0 \leq f_i p_{ij} \leq p_{ij} \quad (\text{A7})$$

2) 记 $[c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N] := f(P-P^{k+1})$ 和 $[b_{1i} \ b_{2i} \ \cdots \ b_{Ni}] := [(I-P+1_{N \times N})^{-1}]_i$. 显然, 当 P 给定时 b_{ji} 是常数, 且对于任意的 f 和 k , $\sum_{i=1}^N c_i = 0$, $-1 \leq c_i \leq 1$. 所以

$$(f-\pi) \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i = \sum_{j=1}^N c_j b_{ji} \quad (\text{A8})$$

因此, 对于任意的初始概率 f 和时间 k , $(f-\pi) \times \left[\sum_{j=1}^k P^j \right]_i$ 的最大、最小值可由下面的线性规划问题得到:

$$\begin{aligned} \max_{c_1, \dots, c_N} \quad & \sum_{i=1}^N c_i b_{ij} \quad (\text{or} \quad \min_{c_1, \dots, c_N} \sum_{i=1}^N c_i b_{ij}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N c_i = 0 \\ & -1 \leq c_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

记 $\delta_i := \max_{c_1, \dots, c_N} \sum_{j=1}^N c_j b_{ji}$, 显然 $\min_{c_1, \dots, c_N} \sum_{j=1}^N c_j b_{ji} = -\delta_i$. 则由 δ_i , 式 (A6)~(A8) 和引理 2 可得式 (6) 和式 (7). $\square$

References

- 1 Briat C, Seuret A. Affine characterizations of minimal and mode-dependent dwell-time for uncertain switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(5): 1304–1310
- 2 Zhao X D, Zhang L X, Shi P, Liu M. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(2): 1809–1815
- 3 Hespanha J P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 470–482
- 4 Zhang L X, Zhuang S L, Shi P. Non-weighted quasi-time-dependent H_∞ filtering for switched linear systems with persistent dwell-time. *Automatica*, 2015, **54**: 201–209
- 5 Zhu J, Wang L P, Spiriyagin M. Control and decision strategy for a class of Markovian jump systems in failure prone manufacturing process. *IET Control Theory & Applications*, 2012, **6**(12): 1803–1811
- 6 Mao Z, Jiang B, Shi P. H_∞ fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems. *IET Control Theory & Applications*, 2007, **1**(5): 1336–1343
- 7 Ma Wei-Guo, Shao Cheng. Stochastic stability for networked control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2007, **33**(8): 878–882
(马卫国, 邵诚. 网络控制系统随机稳定性研究. *自动化学报*, 2007, **33**(8): 878–882)
- 8 Xiao N, Xie L H, Fu M Y. Stabilization of Markov jump linear systems using quantized state feedback. *Automatica* 2010, **46**(10): 1696–1702
- 9 Bolzern P, Colaneri P, De Nicolao G. Stochastic stability of positive Markov jump linear systems. *Automatica* 2014, **50**(4): 1181–1187
- 10 Fang Y G, Loparo K A. Stabilization of continuous-time jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1590–1603
- 11 Song Y, Dong H, Yang T C, Fei M R. Almost sure stability of discrete-time Markov jump linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 2014, **8**(11): 901–906
- 12 Xiong J L, Lam J, Shu Z, Mao X R. Stability analysis of continuous-time switched systems with a random switching signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(1): 180–186
- 13 Bolzern P, Colaneri P, De Nicolao G. Almost sure stability of Markov jump linear systems with deterministic switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 209–214
- 14 Bolzern P, Colaneri P, De Nicolao G. Markov jump linear systems with switching transition rates: mean square stability with dwell-time. *Automatica*, 2010, **46**(6): 1081–1088
- 15 Ge Yan-Rong, Chen Yang-Zhou, Zhang Ya-Xiao. Average dwell-time conditions for consensus of discrete-time linear multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2609–2617
(盖彦荣, 陈阳舟, 张亚霄. 切换信息拓扑和时变时滞下离散时间线

性多智能体系统一致性的平均驻留时间条件. *自动化学报*, 2014, **40**(11): 2609–2617)

- 16 Tanelli M, Picasso B, Bolzern P, Colaneri P. Almost sure stabilization of uncertain continuous-time Markov jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(1): 195–201
- 17 Bolzern P, Colaneri P, De Nicolao G. On almost sure stability of continuous-time Markov jump linear systems. *Automatica*, 2006, **42**(6): 983–988
- 18 Resnick S I. *Adventures in Stochastic Processes*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 1992.



宋 杨 上海大学机电工程与自动化学院副研究员. 主要研究方向为切换系统, 网络控制理论与应用. 本文的通信作者.

E-mail: y_song@shu.edu.cn

(**SONG Yang** Associate professor at the School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers switched systems, networked control theory and application. Corresponding author of this paper.)



杨 杰 上海大学机电工程与自动化学院硕士研究生. 主要研究方向为切换系统. E-mail: yangjielanz@163.com

(**YANG Jie** Master student at the School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University. His main research interest is switched systems.)



郑 敏 上海大学机电工程与自动化学院副研究员. 主要研究方向为网络控制系统, 时滞系统和神经网络.

E-mail: zhengmin203@163.com

(**ZHENG Min** Associate professor at the School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers networked control systems, time delay systems and neural networks.)



费敏锐 上海大学机电工程与自动化学院教授. 主要研究方向为网络化控制系统及实现.

E-mail: mrfei@staff.shu.edu.cn

(**FEI Min-Rui** Professor at the School of Mechatronics Engineering and Automation, Shanghai University. His research interest covers networked control system and its implementation.)