CBMeMBer 滤波器序贯蒙特卡罗实现新方法的研究

陈 辉 [1,2]　　韩崇昭 [1]

摘　要　为提升多伯努利滤波器序贯蒙特卡罗 (Sequential Monte Carlo, SMC) 实现中粒子采样的有效性, 提出一种 CBMeMBer 辅助粒子滤波 (Auxiliary particle filter, APF) 实现的新方法. 首先, 利用多伯努利后验概率密度选择适合于 CBMeMBer 滤波器的辅助变量去重新定义采样问题. 分别选择量测和先验密度分量作为辅助变量, 确保最终的状态粒子能够集中在真实目标量测对应航迹的伯努利概率密度上进行采样, 以使粒子向似然函数的峰值区移动, 得到更为精确的多目标多伯努利 (Multi-target multi-Bernoulli, MeMBer) 后验概率密度的估计. 同时, 文中深入研究并给出了在量测更新和漏检情况下辅助变量以及多目标状态采样分布函数的设计, 并研究利用渐近更新 (Progressive correction, PC) 算法对先验密度分量的量测更新进行迭代逼近计算, 以提高最终分布函数求解的准确度. 最后, 针对两个典型非线性多目标跟踪问题的应用验证了算法的有效性.

关键词　多目标跟踪, 随机有限集, 辅助变量, 序贯蒙特卡罗, 多伯努利

引用格式　陈辉, 韩崇昭. CBMeMBer 滤波器序贯蒙特卡罗实现新方法的研究. 自动化学报, 2016, **42**(1): 26−36

DOI　10.16383/j.aas.2016.c150182

A New Sequential Monte Carlo Implementation of Cardinality Balanced Multi-target Multi-Bernoulli Filter

CHEN Hui[1, 2]　　HAN Chong-Zhao[1]

Abstract　To improve the effectiveness of particle sampling in the sequential Monte Carlo (SMC) implementation of the multi-Bernoulli filter, this paper proposes a new SMC implementation of the CBMeMBer filter using the so called auxiliary particle filter (APF). First, according to the posterior multi-Bernoulli density, this paper redefines the sampling problem by introducing some auxiliary random variables suited to the CBMeMBer filter. The measurement and the prior density component are chosen accordingly as auxiliary variables. As a result, this method can sample particles concentrating on the high likelihood state space and the Bernoulli probability density of track corrected by the actual target measurement. Therefore, a more accurate posterior probability density of multi-target multi-Bernoulli (MeMBer) can be obtained. Meanwhile, the sampling distribution functions of those auxiliary random variables and the multi-target states are designed for the legacy tracks and the measurement-corrected tracks. Moreover, this paper corrects iteratively the prior density component based on the progressive correction (PC) algorithm in order to improve the solving accuracy of sampling distribution functions. Finally, simulation results show the effectiveness of the proposed approach as applied to two typical nonlinear tracking problems.

Key words　Multi-target tracking, random finite set (RFS), auxiliary variable, sequential Monte Carlo (SMC), multi-Bernoulli

Citation　Chen Hui, Han Chong-Zhao. A new sequential Monte Carlo implementation of cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(1): 26−36

基于随机有限集 (Random finite set, RFS) 的多目标跟踪算法是典型的联合决策与估计的方法, 它从集值估计的整体角度描述和解决多目标跟踪问题, 提供了一种无需做关联决策解决多目标跟踪问题的理论框架. 而众所周知的是, 数据关联问题一直是传统多目标跟踪算法的难点, 它的存在对一般问题求解所秉持的 "避难" 原则相矛盾, 既在解决多目标跟踪这个难点问题的同时又引入了一个更加棘手的关联决策问题. 利用 RFS 方法建模多目标状态和观测, 使多目标跟踪问题可在贝叶斯滤波框架下通过递推更新多目标状态的后验分布得到解决, 即多目标贝叶斯滤波器 (Multi-target Bayes filter, MTBF)[1]. 但是, 求解标准 MTBF 必

收稿日期 2015-04-08　　录用日期 2015-10-19
Manuscript received April 8, 2015; accepted October 19, 2015
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2013CB329405), 国家自然科学基金创新研究群体 (61221063), 国家自然科学基金 (61370037, 61005026, 61473217), 甘肃省高等学校科研项目 (2014A-035) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329405), Foundation for Innovative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (61221063), National Natural Science Foundation of China (61370037, 61005026, 61473217) and Foundation of Higher Education of Gansu Province (2014A-035)
本文责任编委 潘泉
Recommended by Associate Editor PAN Quan
1. 西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室 西安 710049　2. 兰州理工大学电气工程与信息工程学院 兰州 730050
1. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security, Xi′an Jiaotong University, Xi′an 710049　2. School of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050

须考虑到由多目标状态联合概率分布的组合特性和有限维多目标状态空间上的多重积分带来的复杂性. Mahler 提出了概率假设密度 (Probability hypothesis density, PHD) 滤波器[2]、势概率假设密度 (Cardinalized PHD, CPHD) 滤波器[3−4], 由于使基于 RFS 的多目标跟踪问题的求解大为简化而广受关注. 此外, 近些年 Mahler 又提出了多目标多伯努利 (Multi-target multi-Bernoulli, MeMBer)[5] 滤波器, 不同于 PHD 和 CPHD 滤波器的强度 (Intensity) 递推估计, MeMBer 滤波器直接近似递推了多目标状态的后验概率密度, 使得多目标跟踪问题的求解及其状态的递推估计显得更为直观. Vo 等为了修正 MeMBer 滤波器对势估计存在的偏差提出了势均衡多目标多伯努利 (Cardinality balanced MeMBer, CBMeMBer) 滤波器[6], 并给出了它的高斯混合 (Gaussian mixture, GM) 实现和序贯蒙特卡罗 (Sequential Monte Carlo, SMC) 实现[6]; 而近几年, CBMeMBer 滤波器在特定应用问题的研究上已取得了一些成果[7−13].

本文的重点和创新点是研究并给出一种 CBMeMBer 滤波器新的 SMC 实现方法, 求解问题的思想源于一类被称之为辅助粒子滤波 (Auxiliary particle filter, APF)[14−15] 的方法, 而这类方法的重点就是根据所研究的闭式求解问题构造辅助变量, 以及设计辅助变量的采样分布函数. 注意到, 已经有一些文献研究了 PHD 滤波器的 APF 实现和应用[16−18], 例如文献 [16] 基于 APF 实现了免聚类 PHD 滤波器以提取目标状态. 文献 [17] 依据势估计精度的最大化给出了一种 APF-PHD 滤波器建议分布的设计方法. 文献 [18] 则给出了一套完整的 APF-PHD 滤波器设计方案, 主要是最优建议分布函数的设计, 并对它们基于空间点过程 (Point process, PP) 理论给予了相关说明. 但是, 这些方法都是为了提高粒子采样的有效性去准确逼近多目标状态后验概率密度的一阶统计矩. 而 CBMeMBer 滤波器不同于 PHD 滤波器, 它近似递推了多目标状态的后验概率密度, 从近似条件和描述形式上有显著的不同, 而传统 CBMeMBer 滤波器的 SMC 实现其实是对各伯努利 RFS 的后验概率密度进行采样, 如何从后验多伯努利密度的整体出发去设计 APF, 将是本文方法的关键. 不同于一般的序贯重要性采样 (Sequential importance sampling, SIS), 以及为避免粒子退化[19−20] 而频繁采用的重采样 (Resampling)[21] 策略, 本文将在一个更高维的空间研究引入适合于 CBMeMBer 的辅助变量去重新定义采样问题, 研究在多伯努利后验概率密度下如何构造各辅助变量的采样分布, 研究如何利用近似方法对提出的采样分布函数进行计算, 从而能够在非线性系统的多目标状态递推估计的过程中保证粒子采样的有效性. 最后将给出两个典型的非线性跟踪问题进行仿真验证.

1 问题描述

1.1 多伯努利随机有限集

若 X 是状态空间 $\mathcal{X}$ 上的 (单) 伯努利 RFS, 它可用单目标存在概率 r 和单目标状态分布 p 来联合表示, 而 X 的势分布是一个参数为 r 的伯努利分布. 若 $\emptyset$ 表示空集, 伯努利 RFS 的概率密度为[5]

$$\pi(X)=\begin{cases}1-r, & X=\emptyset\\ r\cdot p(\boldsymbol{x}), & X=\{\boldsymbol{x}\}\end{cases}\tag{1}$$

若 X 是状态空间 $\mathcal{X}$ 上的多伯努利 RFS, 它是一个确定数目且相互独立的伯努利 RFS 的集合. 组成 X 的第 i 个伯努利 RFS 表示为 $X^{(i)}$, 它的存在概率为 $r^{(i)}$, 概率密度为 $p^{(i)}$, $i=1,\cdots,M$ 是伯努利 RFS 的索引, 那么 $X=\bigcup_{i=1}^{M}X^{(i)}$. 显然, 它的势平均为 $\sum_{i=1}^{M}r^{(i)}$. 则 X 的概率密度 π 可表示为 $\pi(\emptyset)=\prod_{j=1}^{M}(1-r^{(j)})$, 且

$$\pi(\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\})=\\ \pi(\emptyset)\sum_{1\le i_1\ne\cdots\ne i_n\le M}\prod_{j=1}^{n}\frac{r^{(i_j)}p^{(i_j)}(\boldsymbol{x}_j)}{1-r^{(i_j)}}\tag{2}$$

为描述方便, 可以将上述表达式简写为参数集表达形式[5], 即 $\pi=\{(r^{(i)},p^{(i)})\}_{i=1}^{M}$.

1.2 CBMeMBer 滤波器

Vo 等在文献 [6] 中通过理论和实验已论证 MeMBer 滤波器会产生明显的势偏差, 进而提出了 CBMeMBer 滤波器, 以下给出它的递推公式.

1) 预测步

假设 $k-1$ 时刻后验多目标多伯努利密度表示为

$$\pi_{k-1}=\{(r_{k-1}^{(i)},p_{k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k-1}}\tag{3}$$

则预测的多目标密度也是一个多伯努利密度

$$\pi_{k|k-1}=\{(r_{P,k|k-1}^{(i)},p_{P,k|k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k-1}}\cup\\ \{(r_{\Gamma,k}^{(i)},p_{\Gamma,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}\tag{4}$$

其中, $\{(r_{\Gamma,k}^{(i)},p_{\Gamma,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$ 是 k 时刻新生多伯努利密度. 而存活目标预测伯努利密度参数

$$r_{P,k|k-1}^{(i)}=r_{k-1}^{(i)}\left\langle p_{k-1}^{(i)},\ p_{S,k}\right\rangle\tag{5}$$

$$p_{P,k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})=\frac{\left\langle f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}|\cdot),\ p_{k-1}^{(i)}p_{S,k}\right\rangle}{\left\langle p_{k-1}^{(i)},\ p_{S,k}\right\rangle}\tag{6}$$

$f_{k|k-1}(\cdot|\boldsymbol{\zeta})=k$ 时刻在先前状态为 $\boldsymbol{\zeta}$ 条件下的单目标状态转移密度, $p_{S,k}(\boldsymbol{\zeta})=k$ 时刻在先前状态为 $\boldsymbol{\zeta}$ 条件下的目标存活概率.

2) 更新步

令 CBMeMBer 预测多目标多伯努利密度为

$$\pi_{k|k-1}=\{(r_{k|k-1}^{(i)},p_{k|k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k|k-1}} \tag{7}$$

那么后验多目标密度可用多伯努利密度近似如下:

$$\begin{aligned}\pi_k\approx\ &\{(r_{L,k}^{(i)},p_{L,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}\cup\\ &\{(r_{U,k}(\boldsymbol{z}),p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}))\}_{z\in Z_k}\end{aligned} \tag{8}$$

其中, Z_k 是 k 时刻量测集, $\{(r_{L,k}^{(i)},p_{L,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}$ 是继承航迹 (漏检) 的多伯努利密度, 若检测概率表示为 $p_{D,k}(\boldsymbol{x})$, 有:

$$r_{L,k}^{(i)}=r_{k|k-1}^{(i)}\frac{1-\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},p_{D,k}\right\rangle}{1-r_{k|k-1}^{(i)}\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},p_{D,k}\right\rangle} \tag{9}$$

$$p_{L,k}^{(i)}=p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})\frac{1-p_{D,k}(\boldsymbol{x})}{1-\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},p_{D,k}\right\rangle} \tag{10}$$

$\{(r_{U,k}(\boldsymbol{z}),p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}))\}_{z\in Z_k}$ 是量测更新的多伯努利密度, 有:

$$r_{U,k}(\boldsymbol{z})=\frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}(1-r_{k|k-1}^{(i)})\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},\psi_{k,z}\right\rangle}{\left(1-r_{k|k-1}^{(i)}\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},p_{D,k}\right\rangle\right)^2}}{\kappa_k(\boldsymbol{z})+\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},\psi_{k,z}\right\rangle}{1-r_{k|k-1}^{(i)}\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},p_{D,k}\right\rangle}} \tag{11}$$

$$p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})=\frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}}p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})\psi_{k,z}(\boldsymbol{x})}{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}}\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},\psi_{k,z}\right\rangle} \tag{12}$$

$$\psi_{k,z}(\boldsymbol{x})=g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})p_{D,k}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

1.3 SMC-CBMeMBer 滤波器的实现问题

传统 SMC-CBMeMBer 滤波器的实现过程简述如下.

对于式 (3), 假设 $k-1$ 时刻概率密度 $p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}}w_{k-1}^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x})$, $\delta(\boldsymbol{x})$ 是关于状态 $\boldsymbol{x}$ 的狄拉克 δ 函数. 将它代入式 (5), 得到目标存在概率的预测

$$r_{P,k|k-1}^{(i)}=r_{k-1}^{(i)}\sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}}w_{k-1}^{(i,j)}p_{S,k}(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)}) \tag{14}$$

依据建议分布 $q_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},Z_k)$ 采样存活目标状态 $\boldsymbol{x}_{P,k|k-1}^{(i,j)}$, 那么预测概率密度

$$p_{P,k|k-1}^{(i)}\approx\sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}}\tilde{w}_{P,k|k-1}^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_{P,k|k-1}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

其中

$$\tilde{w}_{P,k|k-1}^{(i,j)}=\frac{w_{P,k|k-1}^{(i,j)}}{\sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}}w_{P,k|k-1}^{(i,j)}} \tag{16}$$

$$w_{P,k|k-1}^{(i,j)}=\frac{w_{k-1}^{(i,j)}f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_{P,k|k-1}^{(i,j)}|\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)})p_{S,k}(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)})}{q_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_{P,k|k-1}^{(i,j)}|\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)},Z_k)} \tag{17}$$

通过建议分布 $b_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_k|Z_k)$ 采样得到新生目标状态粒子 $\boldsymbol{x}_{\Gamma,k}^{(i,j)}$ $(j=1,\cdots,L_{\Gamma,k}^{(i)})$, 则新生概率密度可表示为

$$p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x})\approx\sum_{j=1}^{L_{\Gamma,k}^{(i)}}\tilde{w}_{\Gamma,k}^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_{\Gamma,k}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

其中

$$w_{\Gamma,k}^{(i,j)}=\frac{p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}_{\Gamma,k}^{(i,j)})}{b_k^{(i)}(\boldsymbol{x}_{\Gamma,k}^{(i,j)}|Z_k)} \tag{19}$$

$$\tilde{w}_{\Gamma,k}^{(i,j)}=\frac{w_{\Gamma,k}^{(i,j)}}{\sum_{j=1}^{L_{\Gamma,k}^{(i)}}w_{\Gamma,k}^{(i,j)}} \tag{20}$$

通过前述的重要性采样 (Importance sampling, IS), 每一个 $p_{k|k-1}^{(i)}$ 由一组加权粒子表示为 $p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}}w_{k|k-1}^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x})$, 则对应量测更新伯努利 RFS (航迹) 的密度函数 $p_{U,k}(\cdot;\boldsymbol{z})$ 可用加权粒子集 $\{w_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)}\}$ 近似表达, 其更新权重

$$w_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})=\frac{w_{k|k-1}^{(i,j)}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}}\psi_{k,z}(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)})}{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}}\sum\limits_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}}w_{k|k-1}^{(i,j)}\frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}}\psi_{k,z}(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)})} \tag{21}$$

继承航迹 (漏检) 的概率密度 $p_{L,k}^{(i)}$ 也可用加权粒子集 $\{w_{L,k}^{(i,j)},\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)}\}$ 近似表达, 其权重

$$w_{L,k}^{(i,j)}=\frac{w_{k|k-1}^{(i,j)}(1-p_{D,k}(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)}))}{\sum\limits_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}}w_{k|k-1}^{(i,j)}(1-p_{D,k}(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)}))} \tag{22}$$

而存在概率 $r_{L,k}^{(i)}$ 和 $r_{U,k}(\boldsymbol{z})$ 将由 $p_{k|k-1}^{(i)}$ 的离散表达代入式 (9) 和 (11) 直接计算可得, 不再罗列.

可以看出, 量测更新后的权重 $w_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})$ 依赖于 $\psi_{k,z}(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)})=p_D(\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)})g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}_{k|k-1}^{(i,j)})$, 如果粒子没有在那些具有高似然值的状态空间采样的话, 那么

目标的伯努利后验密度的计算值将不会精确, 影响对应目标状态估计的性能. 文中需要研究一种采样方法, 使得粒子采样能够在具有高似然值的状态空间上进行.

2　CBMeMBer 辅助粒子滤波实现方法的研究

2.1　采样流程推导与辅助变量选择

在含有杂波的多目标跟踪环境中, 传统的 SIS 方法难以有效地在真实目标量测信息下的实际状态空间进行采样. 以下研究基于 CBMeMBer 滤波器的后验密度选择辅助变量, 同时研究辅助变量和目标状态的采样分布函数的设计. 先来建立多目标多伯努利后验密度和先验密度之间的关系, 具体有以下推导.

$\pi_{k-1}=\{(r_{k-1}^{(i)}, p_{k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k-1}}$ 是 $k-1$ 时刻后验多目标多伯努利密度, 若概率密度 $p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x})$ 可由加权粒子集表达为 $p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}} w_{k-1}^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x})$, 则存活多目标多伯努利预测概率密度可以表示为 $\{(r_{P,k|k-1}^{(i)}, p_{P,k|k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k-1}}$, $r_{P,k|k-1}^{(i)}$ 由式 (14) 计算, 而

$$p_{P,k|k-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}} w_{P,k|k-1}^{(i,j)} f_{P,k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

其中, 预测密度 $f_{P,k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$ 和权值 $w_{P,k|k-1}^{(i,j)}$ 分别为

$$f_{P,k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) = f_{k|k-1}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)}) \tag{24}$$

$$w_{P,k|k-1}^{(i,j)} = \frac{w_{k-1}^{(i,j)} p_{S,k}(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)})}{\sum\limits_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}} w_{k-1}^{(i,j)} p_{S,k}(\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)})} \tag{25}$$

k 时刻新生多伯努利密度为 $\{(r_{\Gamma,k}^{(i)}, p_{\Gamma,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$, 若

$$p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{L_{\Gamma,k}^{(i)}} w_{\Gamma,k}^{(i,j)} f_{\Gamma,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{26}$$

其中, $\sum_{j=1}^{L_{\Gamma,k}^{(i)}} w_{\Gamma,k}^{(i,j)} = 1$, $f_{\Gamma,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$ 为第 j 个新生密度.

预测多伯努利密度 $\pi_{k|k-1} = \{(r_{k|k-1}^{(i)}, p_{k|k-1}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k|k-1}}$, $p_{k|k-1}^{(i)}$ 可由式 (23) 和 (26) 联合表示为

$$p_{k|k-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}} \tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} \tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{27}$$

假设检测概率独立于状态, 即 $p_{D,k}(\boldsymbol{x}) = p_{D,k}$, 则 k 时刻 CBMeMBer 滤波器的后验多目标多伯努利密度

$$\begin{aligned}\pi_k \approx \{(r_k^{(i)}, p_k^{(i)})\}_{i=1}^{M_k} = \{(r_{L,k}^{(i)}, p_{L,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{k|k-1}} \cup \\ \{(r_{U,k}(\boldsymbol{z}), p_{U,k}(x;\boldsymbol{z}))\}_{z\in Z_k}\end{aligned} \tag{28}$$

其中, $M_k = M_{k|k-1} + |Z_k|$, 而各变量的表达式为

$$r_{L,k}^{(i)} = r_{k|k-1}^{(i)} \frac{1-p_{D,k}}{1-p_{D,k} r_{k|k-1}^{(i)}} \tag{29}$$

$$p_{L,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}} \tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} \tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

$$r_{U,k}(\boldsymbol{z}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \frac{r_{k|k-1}^{(i)}(1-r_{k|k-1}^{(i)})\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})}{(1-p_{D,k} r_{k|k-1}^{(i)})^2}}{\kappa_k(\boldsymbol{z}) + \sum\limits_{i=1}^{M_{k|k-1}} \frac{r_{k|k-1}^{(i)}\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})}{1-p_{D,k} r_{k|k-1}^{(i)}}} \tag{31}$$

$$p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{M_{k|k-1}} \sum_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}} \tilde{w}_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) \tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{32}$$

其中

$$\tilde{w}_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}) = \tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} M^i(r) \frac{\psi_{k,z}(\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{z})} \tag{33}$$

$$D(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{M_{k|k-1}} M^i(r)\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z}) \tag{34}$$

$$\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z}) = \left\langle p_{k|k-1}^{(i)}, \psi_{k,z} \right\rangle \tag{35}$$

$$M^i(r) = \frac{r_{k|k-1}^{(i)}}{1-r_{k|k-1}^{(i)}} \tag{36}$$

多伯努利 RFS 是相互独立的伯努利 RFS 的集合, 而 $r_{U,k}(\boldsymbol{z})$ 是量测 $\boldsymbol{z}$ 的函数, 代表对应量测 $\boldsymbol{z}$ 的伯努利 RFS (航迹) 的存在概率. 则可以选取量测 $\boldsymbol{z}$ 作为辅助变量, 利用存在概率 $r_{U,k}(\boldsymbol{z})$ 构建采样分布 $q(\boldsymbol{z})$. 将 $\boldsymbol{z}$ 作为辅助变量的目的是让采样过程集中于那些真实目标量测所对应伯努利 RFS (航迹) 的密度 $p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})$. 注意到式 (32), $p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})$ 表达式是累加形式, 所以它可以用加权粒子集来近似表示. 同时, $p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})$ 是状态 $\boldsymbol{x}$、量测 $\boldsymbol{z}$ 以及先验密度 $\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$ 的函数, (i,j) 是先验密度分量的索引. 所以, 另外选用 (i,j) 作为辅助变量, 选取对应似然较大的那些先验密度, 以提高粒子采样的有效性和连续性. 为后面辅助变量表示形式上的简洁, 定义分量索引变量:

$$\begin{aligned} n_{i,j} := (i,j),\quad & i \in \{1,\cdots,M_{k|k-1}\}, \\ & j \in \{1,\cdots,L_{k|k-1}^{(i)}\} \end{aligned} \tag{37}$$

若选定了索引 $n_{i,j}$, 即选定了先验密度 $\tilde{f}^{(i,j)}_{k|k-1}(\boldsymbol{x})$. 所以, 在选取了量测 $\boldsymbol{z}$ 的条件下, 完成粒子最终采样的关键在于设计采样分布 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$ 和 $q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},n_{i,j})$. 设计总的采样粒子数为 $L_k=L_s\times r_{m,k}$, L_s 为每个目标应采样粒子的平均个数, $r_{m.k}$ 是 k 时刻的多伯努利 RFS 的势均值, 有:

$$r_{m.k}=\sum_{i=1}^{M_k}r_k^{(i)}=\sum_{i=1}^{M_{k|k-1}}r_{L,k}^{(i)}+\sum_{\boldsymbol{z}\in Z}r_{U,k}(\boldsymbol{z}) \tag{38}$$

最终采样过程为: 依次采样 L_k 个粒子 $\{\boldsymbol{z}^{(l)},n_{i,j}^{(l)},\boldsymbol{x}_k^{(l)}\}_{l=1}^{L_k}$. 对于第 l 个新采样粒子, $1\le l\le L_k$, 依据后面提出的采样分布 $q(\boldsymbol{z})$, 首先随机选取一个 $\boldsymbol{z}^{(l)}$. 若选定了 $\boldsymbol{z}^{(l)}\in Z_k$, 可按照 $p_{U,k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ 设计密度分量的采样分布 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$; 若 $\boldsymbol{z}^{(l)}\in\emptyset$, 则根据 $r_{L,k}^{(i)}$ 和 $p_{L,k}^{(i)}$ 设计采样分布 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$. 然后, 由分布 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$ 采样一个密度分量 $n_{i,j}^{(l)}$. 最后, 依据 $q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},n_{i,j})$ 完成新粒子状态的最终采样 $\boldsymbol{x}_k^{(l)}$. 每一步的采样都按以上连续进行, 第 l 次采样可以简单表示为 $(\boldsymbol{z}^{(l)},n_{i,j}^{(l)},\boldsymbol{x}^{(l)})\sim q(\boldsymbol{z})\times q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})\times q(\boldsymbol{x}|n_{i,j},\boldsymbol{z})$. 具体采样流程可参照第 2.2 节 7) 算法程序的伪码.

2.2 辅助变量和多目标状态的采样分布函数

1) 量测 $\boldsymbol{z}$ 采样的分布

根据前面的分析, $r_{U,k}(\boldsymbol{z})$ 代表量测 $\boldsymbol{z}$ 所对应的伯努利 RFS (航迹) 的存在概率, 设计量测采样的分布函数为

$$q(\boldsymbol{z})=\begin{cases}1-p_{D,k}, & \boldsymbol{z}\in\emptyset\\ p_{D,k}\dfrac{r_{U,k}(\boldsymbol{z})}{\sum\limits_{z\in Z_k}r_{U,k}(\boldsymbol{z})}, & \boldsymbol{z}\in Z_k\end{cases} \tag{39}$$

$r_{U,k}(\boldsymbol{z})$ 计算取决于积分 $\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})=\left\langle p_{k|k-1}^{(i)},\psi_{k,z}\right\rangle$, 文中将在后续内容给出 $\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})$ 的求解.

2) 先验密度分量 $n_{i,j}$ 选取的分布

量测 $\boldsymbol{z}$ 选取完毕后, 若 $\boldsymbol{z}\in Z_k$, 即选定了 $\boldsymbol{z}$ 对应的伯努利 RFS (航迹), 它的后验概率密度为 $\{(r_{U,k}(\boldsymbol{z}),p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z}))\}$, 可利用 SMC 方法对密度 $p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})$ 进行近似. 且有粒子权重

$$w_k(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})=\frac{\tilde{w}_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})}{q(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})} \tag{40}$$

其中, $q(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})=q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})\times q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},n_{i,j})$, 而最优建议分布

$$q^{opt}(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\propto\tilde{w}_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{41}$$

注意到, $\tilde{w}_{U,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})$ 的值和似然函数 $g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})$ 相关. $q^{opt}(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$ 很难精确求取, 以下研究给出该分布的近似. 注意到, $q^{opt}(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$ 依赖于以下两个表达式

$$\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\propto g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}) \tag{42}$$

$$\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})=\int g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{43}$$

以上两式通常只能求取近似解. 如果先验概率密度 $\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$ 和似然 $g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})$ 在空间分布上能够很好地重叠, 那么利用线性化方法 (例如 n 阶 Taylor 展开) 或 UT (Unscented transformation) 算法的处理会带来较为精确的求解, 但反之亦然. 为确保近似计算对概率密度的适应性, 本文利用渐近更新 (Progressive correction, PC) 算法[22−23] 求解式 (42) 和 (43). PC 方法的讨论见本节第 6) 部分. 注意到 $p_{U,k}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{z})$ 的表达式, 可定义

$$\tilde{q}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})=p_{D,k}\tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)}M^i(r)\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z}),\qquad \boldsymbol{z}\in Z_k \tag{44}$$

则设计先验分量 $n_{i,j}$ 的采样分布为

$$q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})=\frac{\tilde{q}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})}{\Delta_q} \tag{45}$$

其中, Δ_q 是该分布的归一化常数.

而当 $\boldsymbol{z}\in\emptyset$, 即采样到空量测 (漏检), 则先选择先验伯努利 RFS (航迹) 索引 i, 再随机选择该 RFS 概率密度 $p_{L,k}^{(i)}$ 采样粒子集中的第 j 个粒子, 即 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})=q(i|\boldsymbol{z})q(j|i,\boldsymbol{z})$, 对应采样分布

$$q(i|\boldsymbol{z})=\frac{r_{L,k}^{(i)}}{\sum\limits_i r_{L,k}^{(i)}} \tag{46}$$

$$q(j|i,\boldsymbol{z})=\tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} \tag{47}$$

3) 状态的采样

辅助变量 $\boldsymbol{z}$ 的采样得到最有可能的真实目标量测, 而分量 $n_{i,j}$ 的采样则选取了采样量测条件下所对应的最有效的先验密度. 所以选择状态采样的分布是

$$q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},n_{i,j})=\begin{cases}\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{z}=\emptyset\\ \tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}), & \boldsymbol{z}=Z_k\end{cases} \tag{48}$$

4) 粒子权重的计算

根据提出的各辅助变量和目标状态的采样分布, 第 l 次采样选取得到 $\{z^{(l)},n_{i,j}^{(l)},x_k^{(l)}\}$, 其权重可由下

式进行计算.

$$w_k^{(l)}(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{1}{L_k}, & \boldsymbol{z}^{(l)} = \emptyset \\ \dfrac{\Delta_q}{L_k D(\boldsymbol{z})} \dfrac{g(\boldsymbol{z}^{(l)}|\boldsymbol{x}_k^{(l)}) \tilde{f}_{k|k-1}^{(n_{i,j}^{(l)})}(\boldsymbol{x}_k^{(l)})}{\tilde{p}^{(n_{i,j}^{(l)})}(\boldsymbol{z}^{(l)}) \tilde{p}^{(n_{i,j}^{(l)})}(\boldsymbol{x}_k^{(l)}|\boldsymbol{z}^{(l)})}, & \boldsymbol{z}^{(l)} = Z_k \end{cases} \tag{49}$$

显然, 上式中 $\tilde{p}^{(n_{i,j}^{(l)})}(\boldsymbol{z}^{(l)})$ 和 $\tilde{p}^{(n_{i,j}^{(l)})}(\boldsymbol{x}_k^{(l)}|\boldsymbol{z}^{(l)})$ 足够精确的话, $w_k^{(l)} \approx 1/L_k$.

在进行完所有 L_k 次采样后, 需要将同属一个航迹的粒子集进行归类, 并进行权重的归一化操作, 对于式 (28) 中的状态分布 $p_k^{(i)}$, 它的粒子集中第 j 个粒子的权重 $w_k^{(i,j)} \in \{w_k^{(l)}, l = 1, \cdots, L_k\}$, 对它进行归一化操作得到最终的权重, 即

$$\tilde{w}_k^{(i,j)} = \frac{w_k^{(i,j)}}{\sum\limits_{j=1}^{L_k^{(i)}} w_k^{(i,j)}} \tag{50}$$

其中, $L_k^{(i)}$ 是全部 L_k 次采样后, 由密度 $p_k^{(i)}$ 采样得到的粒子总个数.

5) 积分项 $\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})$ 的求取

采样之前需要首先计算积分项 $\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})$, 那么

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z}) = p_{D,k} \int g_k(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) p_{k|k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \\ p_{D,k} \sum_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}} \tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} \tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z}) \end{aligned} \tag{51}$$

6) 渐近更新算法

一般情况下, 先验密度的分布要比似然函数的分布更加宽泛[23], 这给更新过程的精确求解带来困难, 当似然函数集中在状态空间上很窄的范围段内, 就很难充分涵盖先验粒子所预测的状态密度的分布. PC 算法的本质是将量测更新步分解成几个子更新步, 以逐步逼近得到更加精确的量测更新结果 (或后验概率密度), 用以控制先验密度分量更新的计算误差, 即提高式 (42) 和 (43) 的计算准确性, 为文中设计的采样分布的求解提供基础. 以下给出 PC 算法的一般流程:

对于更一般性的求解问题, 定义如下两个求解式 (注: $f_0(\boldsymbol{x})$ 可指代 $\tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$):

$$p(\boldsymbol{z}) = \int g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) f_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{52}$$

$$f(\boldsymbol{x}) \propto g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) f_0(\boldsymbol{x}) \tag{53}$$

其中, $f_0(\boldsymbol{x})$ 代表先验概率密度, $g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}$ 是似然函数. PC 方法需要定义 m 个更新因子 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 每个因子 $0 < \lambda_i \le 1$, 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, 定义

$$f_i(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\Sigma_i} \frac{f_0(\boldsymbol{x})}{p_i(\boldsymbol{z})} \tag{54}$$

$$p_i(\boldsymbol{z}) = \int g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\Sigma_i} f_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{55}$$

其中, $\Sigma_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j$.

$p_i(\boldsymbol{z})$ 可进行递推计算, 具体为

$$\begin{aligned} p_i(\boldsymbol{z}) = \int g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_i} g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\Sigma_{i-1}} f_0(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ p_{i-1}(\boldsymbol{z}) \int g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_i} f_{i-1}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{56}$$

逐次递推, 并有 $p_0(\boldsymbol{z}) = 1$, 所以有下式成立.

$$p(\boldsymbol{z}) = p_m(\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^m \nu_i(\boldsymbol{z}) \tag{57}$$

$$\nu_i(\boldsymbol{z}) = \int g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_i} f_{i-1}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{58}$$

而 $f_i(\cdot)$ 具有递推关系

$$f_i(\boldsymbol{x}) \propto g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_i} f_{i-1}(\boldsymbol{x}), \qquad i = 1, \cdots, m \tag{59}$$

此时, 可以利用线性化方法或 UT 算法来近似计算式 (58) 和 (59). 而迭代初始值 $i = 1$ 时,

$$f_1(\boldsymbol{x}) \propto g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_1} f_0(\boldsymbol{x}) \tag{60}$$

显然, 在子更新的初始阶段, $g(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})^{\lambda_i}$ 的分布会拓展的更加宽泛, 得到和先验密度更多的重叠. 越到后面的子更新似然会越窄越集中, 更新结果也会越精确. 从上面的计算步骤可以看到, PC 方法是一种对先验密度进行量测更新的迭代逼近计算, 每一步迭代计算将更加逼近真实的后验概率密度.

7) 算法程序的伪码

CBMeMBer 辅助粒子滤波的伪码

输入. $\{r_{k-1}^{(i)}, p_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^{M_{k-1}}$, 传感器位置 $\boldsymbol{x}_{obs}$, 量测集 Z_k,

$p_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{L_{k-1}^{(i)}} w_{k-1}^{(i,j)} \delta_{\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i,j)}}(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \cdots, M_{k-1}$;

步骤 1. 预测和新生

for $i = 1 : M_{k-1}$

for $j = 1 : L_{k-1}^{(i)}$

式 (14) 得 $r_{P,k|k-1}^{(i)}$, 式 (24) 和 (25) 得 $f_{P,k|k-1}^{(i,j)}$ 和 $w_{P,k|k-1}^{(i,j)}$;

end

end

给定新生多伯努利密度为 $\{(r_{\Gamma,k}^{(i)}, p_{\Gamma,k}^{(i)})\}_{i=1}^{M_{\Gamma,k}}$, $p_{\Gamma,k}^{(i)}$ 为 $p_{\Gamma,k}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{L_{\Gamma,k}^{(i)}} w_{\Gamma,k}^{(i,j)} f_{\Gamma,k}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$;

步骤 2. 辅助变量分布函数的计算

$M_{k|k-1} = M_{k-1} + M_{\Gamma,k}$;

预测密度 $p_{P,k|k-1}^{(i)}$ 和新生密度 $p_{\Gamma,k}^{(i)}$ 可联合表示为 $p_{k|k-1}^{(i)}$;

$p_{k|k-1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}} \tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)} \tilde{f}_{k|k-1}^{(i,j)}(\boldsymbol{x})$;

for $i=1:M_{k|k-1}$
$\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})=0$, 由式 (29) 计算 $r_{L,k}^{(i)}$;
for $j=1:L_{k|k-1}^{(i)}$
for $m=1:\text{length}(Z_k)$
基于 PC 算法计算 $\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$ 和 $\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})$;
$\tilde{q}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})=p_{D,k}\tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)}M^i(r)\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})$;
$\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})=\Phi_k^{(i)}(\boldsymbol{z})+p_{D,k}\sum_{j=1}^{L_{k|k-1}^{(i)}}\tilde{w}_{k|k-1}^{(i,j)}\tilde{p}^{(i,j)}(\boldsymbol{z})$;
end
end
end
for $m=1:\text{length}(Z_k)$
由式 (31) 计算 $r_{U,k}(\boldsymbol{z})$;
end
由式 (39) 计算量测采样分布 $q(\boldsymbol{z})$;
由式 (45) ∼ (47) 计算先验密度分量的采样函数 $q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$
步骤 3. 粒子采样
$r_{m.k}=\sum_{i=1}^{M_k}r_k^{(i)}=\sum_{i=1}^{M_{k|k-1}}r_{L,k}^{(i)}+\sum_{\boldsymbol{z}\in Z}r_{U,k}(\boldsymbol{z})$
采样总粒子数 $L_k=L_s\times r_{m,k}$;
for $l=1:L_k$
量测采样 $\boldsymbol{z}_k^{(l)}\sim q(\boldsymbol{z})$;
先验密度分量采样 $(n_{ij})_k^{(l)}\sim q(n_{i,j}|\boldsymbol{z})$;
由式 (48) 进行状态采样 $x_k^{(l)}\sim q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z},n_{i,j})$;
由式 (49) 进行权重计算 $w_k^{(l)}(n_{i,j},\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$;
end
步骤 4. 粒子归类和权重归一化
将同属一个伯努利 RFS 的粒子集进行归类;
由式 (50) 进行权重归一化 $\tilde{w}_k^{(i,j)}=w_k^{(i,j)}/\sum_{j=1}^{L_k^{(i)}}w_k^{(i,j)}$;
目标个数 $tar\_num\_est=0$;
for $i=1:M_k$
if $r_k^{(i)}<$ 航迹删除阈值
删除第 i 个航迹;
end
记录新航迹数目 M_k^*;
if $r_k^{(i)}>0.5$
$tar\_num\_est=tar\_num\_est+1$;
粒子加权求目标状态 $X_{est}(:,tar\_num\_est)$;
end
end
输出. 多目标状态 X_{est}, 多伯努利密度 $\{r_k^{(i)},p_k^{(i)}\}_{i=1}^{M_k^*}$,
$p_k^{(i)}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{L_k^{(i)}}w_k^{(i,j)}\delta_{\boldsymbol{x}_k^{(i,j)}}(\boldsymbol{x})$.

3 仿真验证

考虑不同的 SMC-CBMeMBer 方法, 对比传统的自举滤波 (Bootstrap filter, BF) 实现[6] 和本文提出的辅助粒子滤波 (Proposed APF) 实现的性能. 为减少粒子退化对传统 BF 滤波器性能的影响, BF 在仿真的每一个处理周期都进行重采样 (Resampling), 而本文的 APF 不进行该操作. 两种 SMC 方法的单目标粒子采样平均数 $L_s=500$. 对于 APF 实现中的 PC 算法, 渐近更新因子以对数尺度均匀分布, 取 15 步, $\lambda_{15}/\lambda_1=10^4$. 以下给出两种典型的非线性跟踪问题仿真应用的例子, 一种是距离方位跟踪 (Range-bearing tracking, RBT), 一种是纯方位跟踪 (Bearings-only tracking, BOT). 仿真硬软件环境为: Matlab R2010a, Windows 7 SP1 64 bit, Intel Core i5 4570 CPU 3.20 GHz, RAM 4.00 GB.

另外, 本文采用 OSPA (Optimal subpattern assignment) 距离[24] 评估多目标跟踪的性能. 先给出 OSPA 的定义: 设多目标状态的真值集合为 $X=\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$, 相应的状态估计集合 $\hat{X}=\{\hat{\boldsymbol{x}}_1,\cdots,\hat{\boldsymbol{x}}_n\}$, 若 $m\le n$, 则 OSPA 距离为

$$\bar{d}_p^{(c)}(X,\hat{X})=\left(\frac{1}{n}\Big(\min_{\pi\in\Pi_n}\sum_{i=1}^{m}d^{(c)}(\boldsymbol{x}_i,\hat{\boldsymbol{x}}_{\pi(i)})^p+c^p(n-m)\Big)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{61}$$

其中, $\bar{d}^{(c)}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{x}}):=\min(c,\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|)$, $\prod_k$ 表示所有 $\{1,\cdots,k\}$ 的排列构成的集合, 距离阶次 $p\ge 1$, 截断系数 $c>0$. 如果 $m>n$, 则 $\bar{d}_p^{(c)}(X,\hat{X})=\bar{d}_p^{(c)}(\hat{X},X)$.

假设传感器的观测区域为半径 $R=2\,000\,\text{m}$ 的圆形区域, 在观测域内伴随着目标的新生和消亡, 对应着可变的目标数目 (势), 且最大目标数为 $N=8$. 状态取二维笛卡尔坐标系下 x 方向和 y 方向的位置和速度, 状态向量表示为 $\boldsymbol{x}_k=[x_k,y_k,\dot{x}_k,\dot{y}_k]^{\mathrm{T}}$. 目标轨迹均为近常速模型 (Nearly constant velocity model, NCVM), 其状态转移密度

$$f(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})=\mathrm{N}(\boldsymbol{x}_k;F_k\boldsymbol{x}_{k-1},Q_k) \tag{62}$$

其中

$$F_k=\begin{bmatrix}1 & T\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes I_2,\quad Q_k={\sigma_v}^2\begin{bmatrix}\dfrac{T^4}{4} & \dfrac{T^3}{2}\\ \dfrac{T^3}{2} & T^2\end{bmatrix}\otimes I_2 \tag{63}$$

其中, $\otimes$ 是 Kronecker 积, I_n 代表 $n\times n$ 的单位阵, $\sigma_v=5\,\text{m/s}^2$.

实际的目标轨迹如图 1 所示. 目标的新生过程是一个多伯努利 RFS, 可表示为 $\pi_\Gamma=\{(r_\Gamma^{(i)},p_\Gamma^{(i)})\}_{i=1}^8$, 其中新生存在概率 $r_\Gamma^{(i)}=0.01$, 概率密度 $p_\Gamma^{(i)}=f_{\Gamma,k}^{(i)}=\mathrm{N}(x;m_\gamma^{(i)},P_\gamma)$, $m_\gamma^{(1)}=[350,\ 500,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(2)}=[-750,\ -750,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(3)}=[-1\,200,\ -100,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(4)}=[100,\ -500,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(5)}=[1\,200,\ -1\,200,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(6)}=[500,\ 1\,000,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(7)}=[-500,\ 1\,500,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $m_\gamma^{(8)}=[-1\,600,\ 500,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}$, $P_\gamma=\mathrm{diag}\{[50,50,25,25]^{\mathrm{T}}\}^2$.

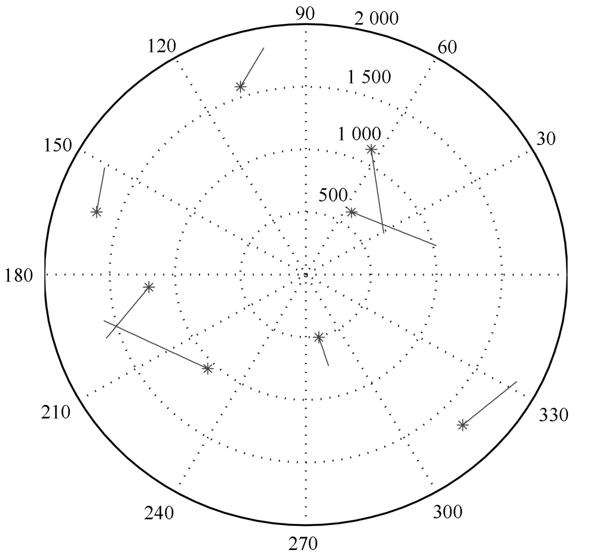


图 1　实际目标的轨迹

Fig. 1　Actual target trajectories

3.1　仿真 1

考虑距离方位跟踪 (RBT), 传感器位于极坐标原点. 仿真中量测模型为

$$\boldsymbol{z}_k = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \tan^{-1}(\frac{y_k}{x_k}) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \tag{64}$$

量测噪声 $\boldsymbol{\varepsilon}_k \sim \mathrm{N}(\cdot, 0, R_k)$, $R_k = \mathrm{diag}\{[\sigma_r^2, \sigma_\theta^2]^{\mathrm{T}}\}$, $\sigma_\theta = (\pi/180)\,\mathrm{rad}$, $\sigma_r = 5\,\mathrm{m}$. 量测采样周期 $T = 1\,\mathrm{s}$, 总共采样 50 次. 杂波是一个泊松 RFS, 且在观测区域 $[0, 2\pi] \times [0, 2\,000\,\mathrm{m}]$ 内均匀分布, 每周期的杂波平均数为 20 个, 对应杂波密度 $\lambda_c = 1.59 \times 10^{-3}(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{m})^{-1}$. 目标的存活概率为 $p_{S,k} = 0.98$, 检测概率 $p_{D,k} = 0.95$. 选取截断系数 $c = 50\,\mathrm{m}$, 距离阶次 $p = 1$. 两种算法在单次跟踪中的位置估计如图 2 和图 3 所示.

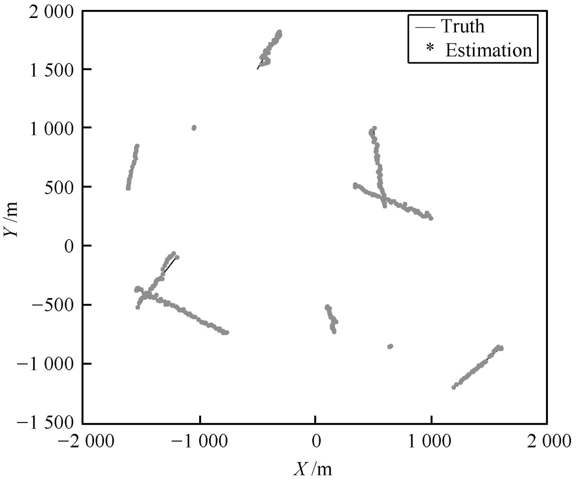


图 2　传统 SMC-CBMeMBer 滤波器的目标跟踪效果

Fig. 2　Target tracking with the traditional SMC-CBMeMBer filter

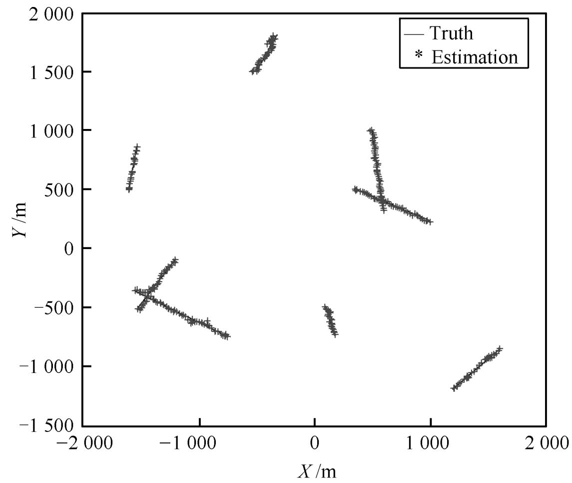


图 3　本文算法的目标跟踪效果

Fig. 3　Target tracking with the proposed filter

运行 200 次 Monte Carlo (MC) 仿真, 两种算法的目标位置估计的 OSPA 距离均值如图 4 所示, 目标个数估计的均值、误差的绝对值和标准差如图 5 所示.

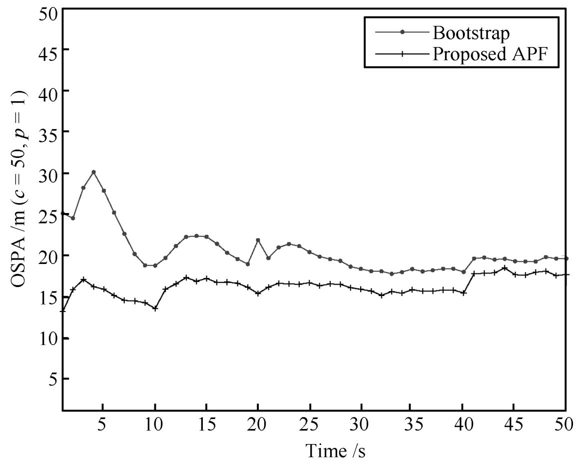
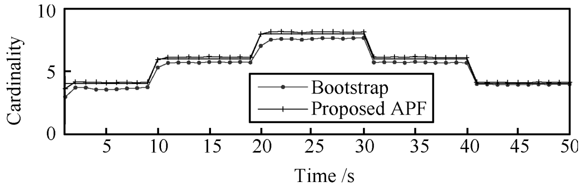


图 4　多目标位置估计 OSPA 的比较

Fig. 4　Tracking performance comparison for position OSPA

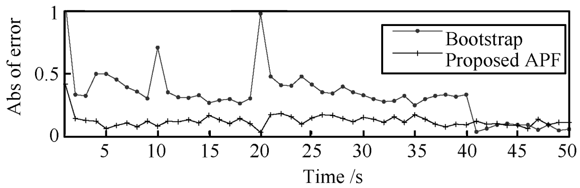
1) 仿真分析: 虽然两种算法都有比较精确的目标跟踪效果 (图 2 和图 3), 但若仔细观察, 图 3 中的跟踪效果还是要相对好一点. 图 2 的跟踪甚至有虚假目标的存在, 而它的实际目标跟踪也有丢失. 从图 4 来看, 本文算法的整体跟踪的 OSPA 距离评价要优于传统算法. 因为 OSPA 能够联合评测多目标状态和势估计的综合性能, 所以也充分说明了在相同的采样规模下, 本文算法相对于传统算法具备更有效的采样粒子. 从图 5 来看, 相对传统算法本文算法在整体上有更为精确的目标个数估计 (图 5 (b) 是势估计误差的绝对值), 且目标个数估计的稳定性得到明显加强. 文中算法由于采用了量测和先验密度分量作为辅助变量, 使状态能够集中对在那些真实目

标量测所对应的伯努利 RFS 的概率密度进行采样, 粒子将向似然函数的峰值区移动, 采样的有效性得到显著增强.



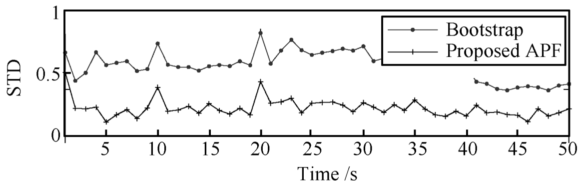
(a) 目标数估计均值

(a) Mean of target number estimations



(b) 目标数估计误差的绝对值

(b) Absolute value of target number estimation errors



(c) 目标数估计的标准差

(c) Standard deviation of target number estimations

图 5 目标个数估计的比较

Fig. 5 Tracking performances of target number estimations

分别在不同的粒子采样规模下进行 MC 仿真, L_s 是单目标粒子采样的平均数. OSPA 均值和程序单步执行时间的均值统计罗列在表 1 中. 理论上讲, APF 这类算法从更高维空间上计算采样必然会带来一定的计算复杂度. 但是从表 1 的 OSPA 均值可以清晰看到, 在较低粒子采样规模的时候, APF-CBMeMBer 已经体现了优越的估计性能, 相对传统算法具有显著的优势. 这源于算法中将总体的采样粒子 ($L_k = L_s \times \sum_{i=1}^{M_k} r_k^{(i)}$) 都集中于采样在那些真实目标量测和有效先验密度分量条件下的目标状态, 所以 APF 的性能提升是不难理解的. 从表 1 的程序单步执行时间的均值也可以看到, 就仿真实验中所给出的不同粒子采样规模 L_s, 传统算法要达到和 APF-CBMeMBer 相当的估计性能, 要花费更多计算时间和数倍的粒子采样规模. 所以, 本文算法为了精度提升所带来的计算开销是值得的.

3.2 仿真 2

纯方位跟踪 (BOT) 仅有角度量测, 它本质上的高度非线性和测量信息的不完备导致非线性滤波器跟踪效果不佳. 若表示 $\boldsymbol{x}_{obs} = [x_s, y_s]^{\mathrm{T}}$ 为传感器位置 (不一定位于坐标原点), 假设其精确可测量.

表 1 不同采样规模下的性能比较

Table 1 Tracking performance versus sampling size

	L_s	100	300	500	1 000	1 500
BF	OSPA (m)	32.43	23.64	20.53	17.42	17.04
	时间 (s)	0.41	1.78	3.05	7.31	11.31
APF	OSPA(m)	17.18	16.41	16.26	16.18	16.12
	时间 (s)	1.27	4.19	7.23	18.78	33.70

BOT 的测量方程

$$\boldsymbol{z}_k = \tan^{-1}\left(\frac{y_k - y_{s,k}}{x_k - x_{s,k}}\right) + v_k \tag{65}$$

其中, $v_k \sim \mathrm{N}(0, {\sigma_\theta}^2)$. $\sigma_\theta = (\pi/180)\,\mathrm{rad}$. 量测采样周期 $T = 1\,\mathrm{s}$, 同样采样 50 次. 杂波是一个泊松 RFS, 且在 $[0, 2\pi]$ 内均匀分布, 采样周期内的杂波平均数为 20 个, 对应的杂波密度 $\lambda_c = 3.18\,\mathrm{rad}^{-1}$. 目标的存活概率为 $p_{S,k} = 0.98$, 检测概率 $p_{D,k} = 0.95$. 因为纯方位跟踪普遍呈发散趋势, 其跟踪效果较差, 所以 OSPA 距离参数选取截断系数 $c = 1\,000\,\mathrm{m}$, 距离阶次 $p = 1$. 为保证跟踪过程中目标状态的可观性, 如图 6 所示, 传感器以恒速率运动并经历多个航向的变化产生机动. 两种算法在单次跟踪中的位置估计如图 7 和图 8 所示.

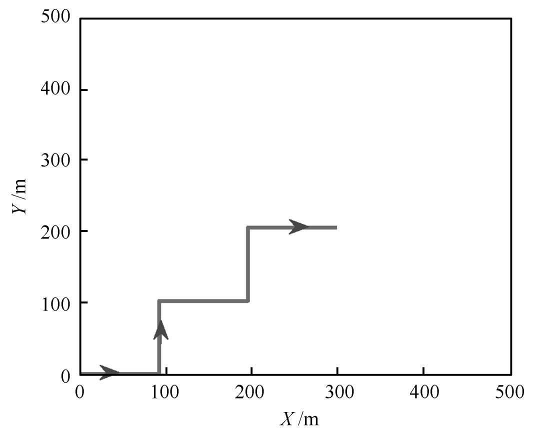


图 6 传感器轨迹

Fig. 6 Sensor trajectory

运行 200 次 Monte Carlo 仿真, 两种算法的目标位置估计的 OSPA 距离均值如图 9 所示, 目标个数估计的均值、误差的绝对值和标准差如图 10 所示.

由于 BOT 量测信息的不完备, 图 7 和图 8 中从目标实际的纯方位跟踪效果上来看, 相对于 RBT 跟踪, 两种滤波器目标跟踪效果显著降低, 两种算法

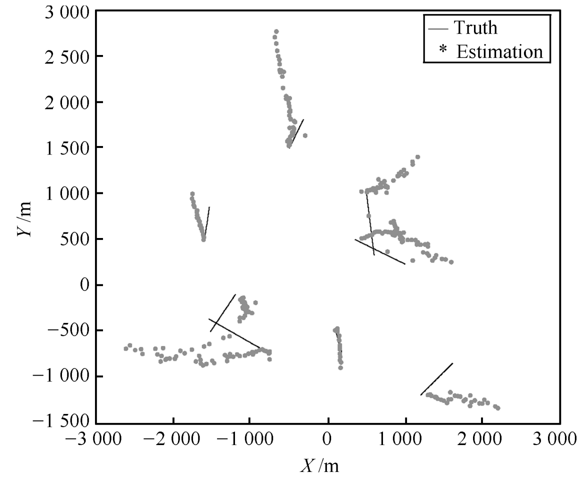


图 7　传统 SMC-CBMeMBer 滤波器的 BOT 跟踪效果

Fig. 7　Bearings-only tracking with the traditional SMC-CBMeMBer filter

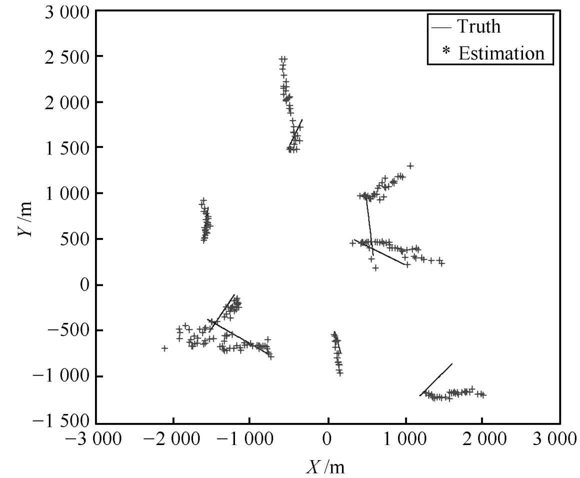


图 8　本文算法的 BOT 跟踪效果

Fig. 8　Bearings-only tracking with the proposed filter

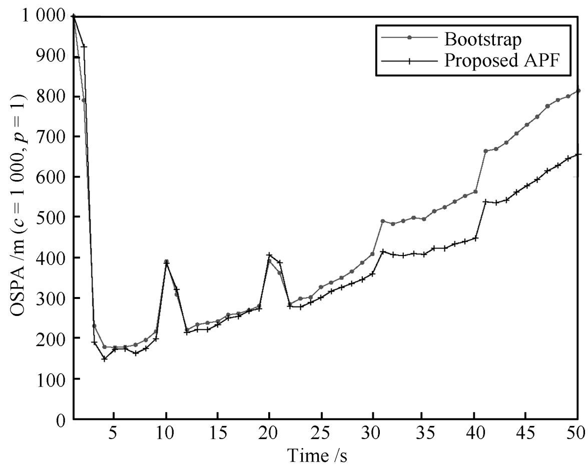
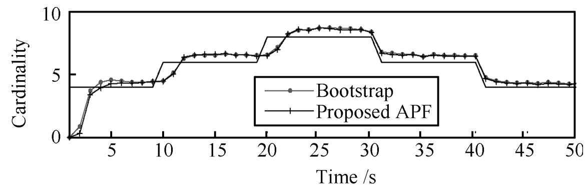


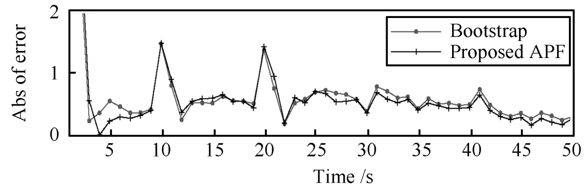
图 9　多目标位置估计 OSPA 的比较

Fig. 9　Tracking performance comparison for position OSPA



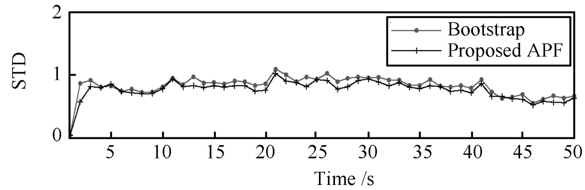
(a) 目标数估计

(a) Mean of target number estimations



(b) 目标数估计误差的绝对值

(b) Absolute value of target number estimations errors



(c) 目标数估计的标准差

(c) Standard deviation of target number estimations

图 10　目标个数估计的比较

Fig. 10　Tracking performances of target number estimations

都不同程度的出现跟踪发散的现象, 这也反映了 BOT 跟踪不稳定的一些基本特质, 而不同目标的发散很大程度取决于在跟踪过程中它们和传感器之间的几何关系. 但是, 图 8 中的本文算法对不同目标的单次跟踪效果还是要好于图 7 的传统算法. 而图 9 也表明, 文中算法的整体跟踪性能还是要优于传统算法, 而随着时间的推移, 所提算法也能在一定程度上抑制 BOT 的发散, 这也再次证明了所提算法提升了粒子采样的有效性. 从图 10 来看, 两种算法的势估计都存在一定的过估计问题, 这可能源于在单一角度量测的情况下, 杂波或其他目标角量测更容易和实际目标的角量测交织而被确认成一个存在概率 r 很高的伯努利过程. 然而, 本文算法仍旧在目标个数的整体估计效果上要优于传统算法, 目标个数估计的稳定性也得到一定的加强.

基于对算法所耗费的运行时间和相应的 OSPA 距离评价, 依然可以得到和仿真 1 相似的结论, 相比提出算法在精度上的提升, 所带来的计算开销是值得的.

4　结论与展望

文中提出了一种 CBMeMBer 辅助粒子滤波实现的新方法. 文中详细分析并研究了辅助变量的选择、辅助变量分布函数的推导、设计及其具体的求解方法. 通过两种典型的非线性跟踪问题的仿真应用, 所提算法的有效性得到充分验证. 本文算法能

够在目标真实量测所对应的状态空间上进行更为有效的采样, 算法的整体性能得到提升. 就后续工作来讲, 自然可较为方便地给出基于本文所提方法的 CBMeMBer 核粒子滤波 (Kernel particle filter, KPF) 实现. 同时, 可开展利用类似本文提出方法对多扩展目标 (Extended targets, ET) 跟踪进行研究. 最后, 本文算法还可向多传感器多目标跟踪方法的研究进行扩展, 拓展算法的应用范围.

References

1 Mahler R P S. *Advances in Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*. Norwood, MA: Artech House, 2014. 120−122

2 Mahler R P S. Multitarget Bayes filtering via first-order multitarget moments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, **39**(4): 1152−1178

3 Mahler R P S. PHD filters of higher order in target number. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, **43**(4): 1523−1543

4 Mahler R P S, Vo B T, Vo B N. CPHD filtering with unknown clutter rate and detection profile. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(8): 3497−3513

5 Mahler R. *Statistical Multisource Multitarget Information Fusion*. Norwood, MA: Artech House, 2007. 655−667

6 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(2): 409−423

7 Reuter S, Vo B T, Vo B N, Dietmayer K. The labeled multi-Bernoulli filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, **62**(12): 3246−3260

8 Chong N, Wong S, Vo B T, Sven N, Murray I. Multiple moving speaker tracking via degenerate unmixing estimation technique and cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter (DUET-CBMeMBer). In: Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing (ISSNIP). Singapore: IEEE, 2014. 1−6

9 Beard M, Reuter S, Granstrom K, Vo B T, Vo B N, Scheel A. A generalised labelled multi-Bernoulli filter for extended multi-target tracking. In: Proceedings of the 18th International Conference on Information Fusion. Washington D. C.: IEEE, 2015. 991−998

10 Hoang H G, Vo B T, Vo B N. A fast implementation of the generalized labeled multi-Bernoulli filter with joint prediction and update. In: Proceedings of the 18th International Conference on Information Fusion. Washington D. C.: IEEE, 2015. 999−1006

11 Zhang G H, Lian F, Han C Z. CBMeMBer filters for non-standard targets, I: Extended targets. In: Proceedings of the 17th International Conference on Information Fusion. Salamanca: IEEE, 2014. 1−6

12 Hoseinnezhad R, Vo B N, Vo B T, Suter D. Bayesian integration of audio and visual information for multi-target tracking using a CB-MeMBer filter. In: Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Prague: IEEE, 2011. 2300−2303

13 Lian Feng, Han Chong-Zhao, Li Chen. Multiple-model GM-CBMeMBer filter and track continuity. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 336−347
(连峰, 韩崇昭, 李晨. 多模型 GM-CBMeMBer 滤波器及航迹形成. 自动化学报, 2014, **40**(2): 336−347)

14 Pitt M K, Shephard N. Filtering via simulation: auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, 1999, **94**(446): 590−599

15 Ubeda-Medina L, Garcia-Fernandez A F, Grajal J. Generalizations of the auxiliary particle filter for multiple target tracking. In: Proceedings of the 17th Conference on Information Fusion. Salamanca: IEEE, 2014. 1−8

16 Ristic B, Clark D, Vo B N. Improved SMC implementation of the PHD filter. In: Proceedings of the 13th Conference on Information Fusion. Edinburgh, UK: IEEE, 2010. 1−8

17 Baser E, Efe M. A novel auxiliary particle PHD filter. In: Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion. Singapore: IEEE, 2012. 165−172

18 Whiteley N, Singh S, Godsill S. Auxiliary particle implementation of probability hypothesis density filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, **46**(3): 1437−1454

19 Doucet A, Godsill S, Andrieu C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 2000, **10**(3): 197−208

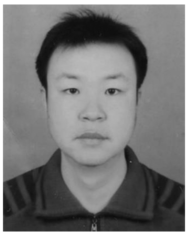
20 Doucet A, Gordon N J, Krishnamurthy V. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(3): 613−624

21 Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, Clapp T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(2): 174−188

22 Musso C, Oudjane N, Le Gland F. Improving regularised particle filters. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York: Springer-Verlag, 2001. 247−271

23 Morelande M R, Skvortsov A. Radiation field estimation using a Gaussian mixture. In: Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion. Seattle, WA: IEEE, 2009. 2247−2254

24 Schuhmacher D, Vo B T, Vo B N. A consistent metric for performance evaluation of multi-object filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, **56**(8): 3447−3457



陈 辉 西安交通大学电子与信息工程学院综合自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为目标跟踪. 本文通信作者. E-mail: huich78@hotmail.com
(**CHEN Hui** Ph. D. candidate at the Institute of Integrated Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University. His main research interest is target tracking. Corresponding author of this paper.)

韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院教授. 主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析. E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn
(**HAN Chong-Zhao** Professor at the School of Electronic and Information Engineering, Xi′an Jiaotong University. His research interest covers multi-source information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)