

具有 Markov 跳变参数的闭环供应链系统切换控制

李庆奎¹ 李梅¹ 贾新春¹

摘 要 研究具有 Markov 跳变参数的闭环供应链 (Closed-loop supply chain, CLSC) 切换系统建模以及具有抑制牛鞭效应的 H_∞ 控制问题. 针对再制造过程中的不确定性问题, 在考虑库存衰减因素的条件下, 根据库存水平的不同状态将系统建模为切换系统, 子系统间的切换服从于一个 Markov 过程. 基于输入滞后的控制策略, 应用 Markov 切换思想对系统进行控制器设计与性能分析, 在保证闭环供应链系统稳定的情形下有效抑制牛鞭效应. 仿真例子说明所得结果的有效性.

关键词 切换系统, 闭环供应链系统, Markov 跳变参数, 鲁棒 H_∞ 控制

引用格式 李庆奎, 李梅, 贾新春. 具有 Markov 跳变参数的闭环供应链系统切换控制. 自动化学报, 2015, 41(12): 2081–2091

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140526

Switching Control of Closed-loop Supply Chain Systems with Markovian Jumping Parameters

LI Qing-Kui¹ LI Mei¹ JIA Xin-Chun¹

Abstract This paper deals with the problem of H_∞ control for closed-loop supply chain (CLSC) systems with Markovian jumping parameters. Four subsystems are established in view of the influence of the two kinds of deteriorate rates corresponding to manufacture stock level and recycling stock level, respectively. Then, a switched CLSC system is built with Markovian jumping parameters when considering the different state transmission probabilities which decide the switching rule among the subsystems. With this switching model, a delayed input control strategy is adopted, and sufficient conditions are given such that the stability as well as the H_∞ performance can be guaranteed for the CLSC system. A numerical example is given to illustrate the proposed methods.

Key words Switched systems, closed-loop supply chain (CLSC) systems, Markovian jumping, robust H_∞ control

Citation Li Qing-Kui, Li Mei, Jia Xin-Chun. Switching control of closed-loop supply chain systems with Markovian jumping parameters. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(12): 2081–2091

随着生产力的发展, 消费者对服务要求的提高以及环境保护意识的增强, 供应链系统从单一的前向供应链结构发展为包含逆向物流的闭环供应链 (Closed-loop supply chain, CLSC) 结构. 逆向物流关注于从消费者处回收产品并通过直接再利用、再制造、修理、解体拆用等方式恢复商品的价值. 该领域研究可以追溯到上世纪 90 年代. 如 Amezcua 等^[1] 分析了汽车离合器的再制造, Robot^[2] 编辑了

基于工业再制造的综合报告. 最近, 有效的闭环供应链管理问题越来越受到重视, 涌现出许多相关研究结果. 如 Savaskan 等^[3] 考虑了三种分散式具有产品再制造的供应链模型, 并鉴别出对初始设备制造商最有效的结构模型. Hong 等^[4] 研究了闭环供应链的有效渠道设计, 并得出第三方回收模型不是最有效的回收方式. Kiesmüller^[5] 研究了单一产品的恢复系统, 并通过成本优化决定生产率、再制造率和废弃率. 通过应用 Pontryagin 最大值原理^[6], Kleber 等^[7] 研究了优化生产、再制造和废弃策略的线性模型. 此外, 一些专刊聚焦于逆向物流与闭环供应链研究领域, 如 Guide 等编辑的针对闭环供应链的两部特刊 (第 1 部分^[8] 和第 2 部分^[9]). 就闭环供应链生产–库存控制系统而言, 已有相关结果见诸报道. 比如, 文献 [10] 应用优化控制策略研究了闭环供应链再制造系统的动态容量规划; 文献 [11] 将博弈论思想应用于研究闭环供应链系统的网络均衡问题; 应用模糊逻辑思想和对策理论, 文献 [12–13] 研究了闭环供应链产品回收策略的制定. 近年来以库存控

收稿日期 2014-07-14 录用日期 2015-09-23
Manuscript received July 14, 2014; accepted September 23, 2015

国家自然科学基金 (61573230, 61374059), 教育部留学回国人员科研启动基金 (2013-47), 山西省自然科学基金 (2013011035-3), 山西省留学回国人员科技活动择优资助项目 (2013) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61573230, 61374059), Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry (2013-47), Natural Science Foundation of Shanxi Province (2013011035-3), and Fund Program for the Scientific Activities of Selected Returned Overseas Professionals in Shanxi Province (2013)

本文责任编辑 李乐飞

Recommended by Associate Editor LI Le-Fei

1. 山西大学数学科学学院 太原 030006

1. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006

制连接制造和再制造系统研究引起了广泛的关注. El-Sayed 等^[14] 提出在前向物流网络和逆向物流网络之间建立一个关联市场来用旧产品换取新产品; Dobos^[15] 找到最佳库存策略在逆向物流系统的特殊结构, 并应用 Pontryagin 最大值原理^[16] 获取最优的充分必要条件. 值得注意的是, 现有关于闭环供应链系统的结果主要针对静态环境, 基于动态模型的供应链分析与控制虽已取得一定进展^[16-21], 而对于复杂动态闭环供应链的研究尚有不足. 显而易见, 静态模型并不足以刻画闭环供应链系统所具有的动态特点, 例如需求波动、生产提前期、销售预测等. 就闭环供应链生产-库存控制系统而言, 由于系统的复杂性, 需要将其建模为一类混杂系统模型以刻画其复杂的系统动态行为. 事实上, 切换系统作为一种重要的混杂系统, 可用于建模一类由连续 (或离散) 的系统和一条决定子系统之间如何切换的规则所构成的系统. 由于具有重要的理论研究价值和工程应用背景, 该类系统在近年来受到广泛关注, 如文献 [22-23]. 在生产实际中, 具有 Markov 跳变参数的切换系统可以认为是描述闭环供应链系统的恰当模型. 例如生产-库存系统^[16]、制造工业的随机误差过程^[24] 等. 然而, 就作者所知, 鲜有将闭环供应链系统的生产-库存模型建模为具有 Markov 跳变参数的切换系统. 这也是本文研究的主要动机之一.

众所周知, 动态供应链系统是一类有着不同层级的混杂系统, 如在电厂发电系统中, 煤炭的供应及二次利用, 决定其为煤炭供应的一个顶层; 同时, 根据负载的不同 (由用户需求决定) 自动调整锅炉阀门开度以调整发电量又决定了其为电力供应的底层, 具有典型的混杂系统特性. 不同于传统的控制系统, 动态供应链系统的分析与控制是一个崭新的研究课题, 面临诸多困难和挑战. 如何分析和控制这类复杂系统, 成为近年来研究的热点, 如, Rodrigues 等采用 Just-in-time (JIT) 策略并利用 H_∞ 控制理论研究了切换生产系统的控制问题^[16]; 分散线性二次最优控制方案在文献 [25] 中用以研究水利灌溉中的供水问题; 在文献 [26] 中, 混杂模型预测方法用于生产-订单系统的优化控制研究等. 值得注意的是, 不同层级子系统的动态行为差异在已有结果中并没有被充分考虑. 就闭环供应链系统而言, 生产和回收再制造的控制信号不必采用产品库存状态信息的实时反馈, 采用间歇性的滞后信息往往更具现实意义, 这也正是本文研究的另一个主要动机.

另一方面, 在供应链研究领域, 体现需求波动放大现象的牛鞭效应, 因其反映了供应链总体运作绩效和效率, 是动态供应链分析最为主要的性能指标^[27-32]. 闭环供应链通过库存水平生成生产控制量和回收再制造控制量 $u(k)$, 抑制系统不确定需求的

扰动 $\omega(k)$, 从而使系统运作成本 $y(k)$ 取得理想的最小值. 这种抑制水平可以通过

$$\frac{\|y\|_2}{\|\omega\|_2} \leq \gamma \quad (1)$$

来刻画, γ 越小, 系统的性能越好, 其中, $\|\cdot\|_2$ 表示变量的 l_2 范数. 不难看出, 式 (1) 正是刻画 H_∞ 控制中干扰抑制水平满足 l_2 增益的条件, 其本质上反映了系统对牛鞭效应的抑制程度. 自然地, 对供应链系统抑制牛鞭效应的研究, 可以纳入到鲁棒 H_∞ 控制的研究框架之中. 应用鲁棒 H_∞ 控制方法研究闭环供应链的不确定性问题具有重要的理论意义和广泛的应用前景.

本文以基于再制造的闭环供应链生产-库存系统为研究对象, 针对回收再制造过程中的不确定性, 在考虑库存衰减因素的条件下, 根据不同的库存水平状态确定相应的子系统, 并根据子系统间服从一类 Markov 跳变的切换信号^[33-35], 将闭环供应链系统建模为具有 Markov 跳变参数的切换系统. 由于决定生产和回收再制造的控制信号不必采用产品库存状态信息的实时反馈, 一种基于输入滞后的控制策略应用于闭环供应链系统的分析与控制. 同时应用鲁棒 H_∞ 控制方法以 LMI (Linear matrix inequality) 形式给出了保证系统稳定且具有抑制牛鞭效应的 H_∞ 性能的充分条件. 数值例子验证了所采取方法的有效性.

1 闭环供应链切换系统数学模型建立

考虑基于再制造的闭环供应链系统控制问题. 其结构如图 1 所示. 该模型假定有一个制造商生产一种商品来满足市场需求, 同时从市场上回收该种商品用于再制造. 经过再制造的商品其质量标准达到和新的一样程度, 与新产品是可替换的. 本文主要从库存管理角度考虑, 制造与再制造的商品存储于可用商品仓库, 从市场回收的已使用商品存储于回收商品仓库. 令 $x_1(k) \in \mathbf{R}$, $x_2(k) \in \mathbf{R}$ 分别表示可用商品仓库和回收商品仓库的库存水平, $u_1(k) \in \mathbf{R}$, $u_2(k) \in \mathbf{R}$ 分别表示在时刻 k 制造设备的制造率和废旧商品的回收率.

系统模型基于以下假设:

假设 1. 回收产品的数量由制造商决定, 也就是说, 市场有足够数量的产品满足回收的需求, 且制造商仅需回收它所需的数量.

假设 2. 市场需求率为 $d(k)$, 它包含一个已知的成分常值 $\bar{d}$ 和一个未知的成分 $\omega(k) \in l_2$, 也就是

$$d(k) = \bar{d} + \omega(k)$$

假设 3. 回收产品的处理方式只有两种: 再

制造和废弃. 令 α ($0 \leq \alpha \leq 1$) 表示再制造率, β ($0 \leq \beta \leq 1$) 表示废弃率, α 和 β 都是不确定参数, 且满足 $0 < \alpha + \beta \leq 1$.

假设 4. 储存在仓库中的产品价值会随着时间的推移而减少. 令 ρ_1 和 ρ_2 分别表示可用商品仓库和回收商品仓库的衰减率.

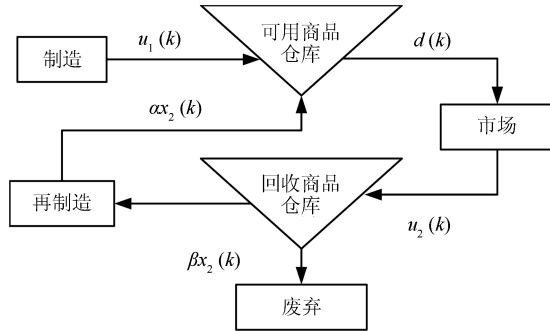


图 1 闭环供应链结构示意图

Fig.1 The structure of CLSC

本文所考虑的闭环供应链系统将以库存水平作为状态变量.

首先, 对于可用商品仓库, 当 $0 < x_1(k) < c_1$ 时, 系统可以由下式给出:

$$x_1(k+1) = (1-\rho_1)x_1(k) + \alpha x_2(k) + u_1(k) - d(k) \quad (2)$$

其中, c_1 为可用商品仓库的最大容量值.

注意到, 当 $x_1(k) \leq 0$ 时, 这意味着仓库中没有商品可用于满足订单需求, 也就导致了缺货现象. 此时的生产-库存模型可以描述为

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha x_2(k) + u_1(k) - d(k) \quad (3)$$

类似地, 对于回收商品库存, 令 c_2 为回收商品仓库的最大容量. 当 $0 < x_2(k) < c_2$ 时, 系统可描述为

$$x_2(k+1) = (1-\rho_2)x_2(k) - \alpha x_2(k) - \beta x_2(k) + u_2(k) \quad (4)$$

而当 $x_2(k) \leq 0$ 时, 此时系统可表示如下:

$$x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(k) \quad (5)$$

此外, 令

$$y(k) = Cx(k) \quad (6)$$

其中, $x(k) = [x_1^T(k) x_2^T(k)]^T$, C 为适当维数成本参数矩阵. 文中假设 $C^T C$ 可逆, 且记 $(C^T C)^{-1} := \ell$.

为了建立闭环供应链生产-库存切换系统模型, 考虑式 (2) 和 (4) 的情况, 可以得到如下闭环供应链

模型:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_1 + \Delta A_1)x(k) + B_1 u(k) + b + B_2 \omega(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-\rho_1 & 0 \\ 0 & 1-\rho_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\bar{d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑式 (2) 和 (5) 的情况, 此时闭环供应链模型如下:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_2 + \Delta A_2)x(k) + B_1 u(k) + b + B_2 \omega(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1-\rho_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

类似地, 结合式 (3) 和 (4) 的情况, 可得到如下闭环供应链系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_3 + \Delta A_3)x(k) + B_1 u(k) + b + B_2 \omega(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\rho_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix}$$

最后, 考虑式 (3) 和 (5) 的情况, 闭环供应链系统可由下给出:

$$\begin{cases} x(k+1) = (A_4 + \Delta A_4)x(k) + B_1 u(k) + b + B_2 \omega(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 为状态空间 $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ 中的一个 Markov 链, 且状态转移概率矩阵为 $\mathcal{P} = [p_{ij}]_{(i,j) \in \mathcal{S}}$, $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 的转移概率满足:

$$\mathcal{P}[\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i] = p_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S} \quad (11)$$

并且, $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^4 p_{ij} = 1$.

假设 4 个子系统间的切换由 Markov 过程 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 决定, 闭环供应链系统可以改写为如下切换控制系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)})\mathbf{x}(k) + B_1 \mathbf{u}(k) + \\ \quad \mathbf{b} + B_2 \omega(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (12)$$

其中, ΔA_i 是由再制造率和废弃率所确定的系数矩阵. 根据鲁棒控制思想, 我们将其处理成不确定矩阵并假设其满足:

$$\Delta A_i = H_i F_i E_i \quad (13)$$

其中, $F_i \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 是未知矩阵且满足 $F_i^T F_i \leq I$, I 为适维单位矩阵, H_i 和 E_i 是已知适维实矩阵.

注 1. 条件 (13) 是鲁棒控制中处理范数不确定的通常假设. 在本文中, 我们借助鲁棒控制思想来处理含有再制造和废弃不确定的闭环供应链系统的 H_∞ 控制问题, 不难验证, 条件 (13) 易于满足. 事实上, 对于 $i = 1, 3$,

$$\Delta A_i = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix}$$

对 ΔA_i 可作如下分解:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

分别注意分解式中的列向量与行向量, 取

$$\begin{aligned} H_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ F_i &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha + \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则有 $\Delta A_i = H_i F_i E_i$, 且由假设 3 知, $F_i^T F_i \leq I$.

在闭环供应链系统中, 决定产品生产率与回收再制造率的控制输入取决于产品的库存状态. 如前所述, 由于供应链是一类有着不同层次和等级的混

杂系统, 传统的实时控制方案在大多数情形下并不适用, 而将产品库存信息按一定时间间隔反馈给生产系统往往更具现实意义. 据此思想, 在生产与回收系统的执行器前端设置缓冲设备, 通过对产品库存状态量测信息的时间戳进行计算, 进而将控制信号每隔一段时间发送给执行器. 在此机制下, 设计如下基于输入滞后的状态反馈控制率

$$\mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{b}} + K_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k - \tau_{\sigma(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

其中, $\tau_{\sigma(k)}$ 为控制信号存在缓冲器中的阶跃时滞且 $\bar{\tau} = \max\{\tau_{\sigma(k)}\}$, $\underline{\tau} = \min\{\tau_{\sigma(k)}\}$, $\hat{\mathbf{b}} = [\bar{d} \quad 0]^T$.

因此, 闭环供应链切换系统可以描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)})\mathbf{x}(k) + \\ \quad B_1 K_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k - \tau_{\sigma(k)}) + B_2 \omega(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (15)$$

系统 (15) 的初始条件给定如下:

$$\mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta) = \mathbf{x}_0, \sigma(0) = 0, \quad \theta = -\tau, \dots, 0 \quad (16)$$

注 2. 控制器设计包含常向量 $\hat{\mathbf{b}}$, 此为用户需求中恒定需求部分, 将用户需求分解为恒定需求和不确定需求, 便于利用 H_∞ 理论对系统进行分析和设计.

我们的目标是在闭环供应链切换时滞系统数学模型基础上, 设计鲁棒 H_∞ 控制器, 使具有再制造与废弃的闭环供应链系统在满足 H_∞ 性能条件下稳定.

2 稳定性分析与控制器设计

在这一部分, 我们将给出具有 Markov 跳变参数的闭环供应链系统均方指数稳定的充分条件, 并给出基于输入滞后的状态反馈控制器设计方法.

下述引理将有助于主要结果的证明.

引理 1^[36]. 给定适维矩阵 $G = G^T, H, E$ 对于所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F , 使得:

$$G + HFE + E^T F^T H^T < 0$$

则存在标量 $\epsilon > 0$, 有:

$$G + \epsilon HH^T + \epsilon^{-1} E^T E < 0$$

首先, 我们考虑系统 (15) 的标称系统, 即 $\Delta A_{\sigma(k)} \equiv 0$ 情况下系统的稳定性与鲁棒 H_∞ 性

能. 标称系统模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + B_1K_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k - \tau_{\sigma(k)}) + \\ B_2\omega(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (17)$$

我们首先引入如下两个定义.

定义 1^[37]. 若对于任意初始条件 $(\mathbf{x}_0, 0)$, 如果存在常数 α 与 λ 使得:

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{x}(k)\|^2\} \leq \alpha e^{-\lambda k} \sup_{-\bar{\tau} < \theta \leq 0} \mathbb{E}\|\phi(\theta)\|^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

成立, 则系统 (15) 被称为均方指数稳定的.

定义 2^[37]. 对于任意干扰 $\omega(t) \in l_2$, 系统 (15) 被称为均方指数稳定的并具有干扰抑制水平 γ , 若系统 (15) 均方指数稳定且满足 $\|\mathbf{z}(k)\|_2 \leq \gamma\|\omega(k)\|_2$, 其中 $\|\mathbf{z}(k)\|_2 = [\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[z_k^T z_k]]^{\frac{1}{2}}$.

我们有以下主要结果.

定理 1. 具有 Markov 跳变参数 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 且状态转移概率矩阵满足条件 (11) 的闭环供应链系统 (17) 是均方指数稳定的且具有干扰抑制水平 γ , 若对于给定正常数 λ , 存在一组对称正定矩阵 $P_i (i \in \mathcal{S})$ 及 Q , 使得以下优化问题可解:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \Theta_0^i := \\ & \begin{bmatrix} L_0 & A_i^T G_i B_1 K_i & A_i^T G_i B_2 \\ * & K_i^T B_1^T G_i B_1 K_i - e^{-\lambda \tau_i} Q & K_i^T B_1^T G_i B_2 \\ * & * & B_2^T G_i B_2 - e^{-\lambda \gamma^2} I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$L_0 = A_i^T G_i A_i - e^{-\lambda} P_i + \delta Q + e^{-\lambda} C^T C$$

$$G_i = \sum_{j=1}^4 p_{ij} P_j, \quad \delta = 1 + (1 - \underline{p})(\bar{\tau} - \underline{\tau})$$

$$\bar{Q} = (1 - \underline{p})Q, \quad \underline{p} = \min\{p_{ii}\} i, j \in \mathcal{S}$$

证明. 我们首先考虑系统在 $\omega \equiv 0$ 时的情况. 根据 Schur 补引理, 由条件 (18) 可得:

$$\Theta_1^i := \begin{bmatrix} L_1 & A_i^T G_i B_1 K_i \\ * & K_i^T B_1^T G_i B_1 K_i - e^{-\lambda \tau_i} Q \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

其中, $L_1 = A_i^T G_i A_i - e^{-\lambda} P_i + \delta Q$.

构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V_{\sigma}(\mathbf{x}_k, k) = V_1(\mathbf{x}_k, k) + V_2(\mathbf{x}_k, k) + V_3(\mathbf{x}_k, k) \quad (20)$$

其中

$$V_1(\mathbf{x}_k, k) = \mathbf{x}^T(k) P_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k)$$

$$V_2(\mathbf{x}_k, k) = \sum_{l=k-\tau_{\sigma(k)}}^{k-1} \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l-1)} Q \mathbf{x}(l)$$

$$V_3(\mathbf{x}_k, k) = \sum_{\theta=-\bar{\tau}+2}^{-\underline{\tau}+1} \sum_{l=k+\theta-1}^{k-1} \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l-1)} \bar{Q} \mathbf{x}(l)$$

为了书写简便, 以下采用 $A_i, \Delta A_i, P_i, F_i, E_i, K_i$ 表示在模态 $\sigma(k) = i$ 时的矩阵 $A_{\sigma(k)}, \Delta A_{\sigma(k)}, P_{\sigma(k)}, F_{\sigma(k)}, E_{\sigma(k)}, K_{\sigma(k)}, \mathcal{F}_n = \{\mathbf{x}(0), \dots, \mathbf{x}(n)\}, \forall n \geq 0$.

考虑 Markov 性, 根据条件期望的计算容易得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V_1(k+1)|\mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V_1(k) = \\ \mathbf{x}^T(k) (A_i^T G_i A_i - e^{-\lambda} P_i) \mathbf{x}(k) + \\ 2\mathbf{x}^T(k) A_i^T G_i B_1 K_i \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\ \mathbf{x}(k - \tau_i)^T K_i^T B_1^T G_i B_1 K_i \mathbf{x}(k - \tau_i) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbb{E}\{V_2(k+1)|\mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V_2(k) =$$

$$\begin{aligned} p_{ii} \left[\sum_{l=k-\tau_i+1}^k e^{-\lambda(k-l)} - \sum_{l=k-\tau_i}^{k-1} e^{-\lambda(k-l)} \right] \mathbf{x}^T(l) Q \mathbf{x}(l) + \\ \sum_{j \neq i} p_{ij} \left(\sum_{l=k-\tau_j+1}^k - \sum_{l=k-\tau_i}^{k-1} \right) \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) = \\ p_{ii} [\mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i)] + \\ \sum_{j \neq i} p_{ij} \left(\sum_{l=k-\tau_j+1}^{k-1} - \sum_{l=k-\tau_i+1}^{k-1} \right) \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) + \\ \sum_{j \neq i} p_{ij} \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - \\ \sum_{j \neq i} e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) = \\ \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\ \sum_{j \neq i} p_{ij} \left(\sum_{l=k-\tau_j+1}^{k-1} - \sum_{l=k-\tau_i+1}^{k-1} \right) \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) \end{aligned} \quad (22)$$

注意到 $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 - p_{ii} \leq 1 - \underline{p}$, 式 (22) 进一步可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{V_2(k+1)|\mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V_2(k) = \\ \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \neq i} p_{ij} \left[\sum_{l=k-\tau_j+1}^{k-\tau} + \sum_{l=k-\tau+1}^{k-1} - \sum_{l=k-\tau_i+1}^{k-1} \right] \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) \leq \\
& \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& \sum_{j \neq i} p_{ij} \sum_{l=k-\tau_j+1}^{k-\tau} \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) \leq \\
& \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& (1 - p) \sum_{l=k-\tau+1}^{k-\tau} \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} Q \mathbf{x}(l) \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{V_3(k+1) | \mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V_3(k) = \\
& \sum_{\theta=-\tau+2}^{-\tau+1} \left[\sum_{l=k+\theta}^k - \sum_{l=k+\theta-1}^{k-1} \right] \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} \bar{Q} \mathbf{x}(l) = \\
& (\bar{\tau} - \tau) \mathbf{x}^T(k) \bar{Q} \mathbf{x}(k) - \sum_{l=k-\bar{\tau}+1}^{k-\tau} \mathbf{x}^T(l) e^{-\lambda(k-l)} \bar{Q} \mathbf{x}(l) \quad (24)
\end{aligned}$$

联立式 (21), (23) 与 (24) 可得:

$$\begin{aligned}
& E\{V(k+1) | \mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V(k) \leq \\
& \mathbf{x}^T(k) (A_i^T G_i A_i - e^{-\lambda} P_i) \mathbf{x}(k) + \\
& 2 \mathbf{x}^T(k) A_i^T G_i B_1 K_i \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& \mathbf{x}^T(k - \tau_i) K_i^T B_1^T G_i B_1 K_i \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda \tau_i} \mathbf{x}^T(k - \tau_i) Q \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& (1 - p) (\bar{\tau} - \tau) \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) = \\
& \xi_1^T(k) \Theta_1^i \xi_1(k) \quad (25)
\end{aligned}$$

其中, $\xi_1(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k - \tau_i)]^T$.

因此, 我们有:

$$\begin{aligned}
& E\{V(\mathbf{x}_{k+1}, k+1) | \mathcal{F}_k\} - e^{-\lambda} V(\mathbf{x}_k, k) \leq \\
& -\lambda_{\min}(-\Theta_1^i) \xi_1^T(k) \xi_1(k) \leq -\beta \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) \quad (26)
\end{aligned}$$

其中, $\lambda_{\min}(-\Theta_1^i)$ 表示 $-\Theta_1^i$ 的最小特征值, 且当 $\sigma(k) \in \mathcal{S}$ 时, $\beta = \inf\{\lambda_{\min}(-\Theta_1^i)\}$. 对任意 $K \geq 1$, 有:

$$\begin{aligned}
& E\{V(\mathbf{x}_{K+1}, K+1)\} - e^{-\lambda K} E\{V(\mathbf{x}_0, 0)\} = \\
& -\beta \sum_{k=0}^K E[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)]
\end{aligned}$$

进而由

$$\sum_{k=0}^K E[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)] \leq$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta} [e^{-\lambda K} E\{V(\mathbf{x}_0, 0)\} - E\{V(\mathbf{x}_{K+1}, K+1)\}] \leq \\
& \frac{1}{\beta} e^{-\lambda K} E\{V(\mathbf{x}_0, 0)\} \quad (27)
\end{aligned}$$

可得 $\sum_{k=0}^{\infty} E[\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k)] \leq \frac{1}{\beta} e^{-\lambda K} E\{V(\mathbf{x}_0, 0)\}$. 因此, 当 $\omega = 0$ 系统 (17) 均方指数稳定.

下面证明在零初始条件下, 当 $\omega \neq 0$ 时, 系统满足 $\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) \leq \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k)$. 定义如下性能指标:

$$J = E \left[\sum_{k=0}^N e^{-\lambda} [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k)] | \mathbf{x}_0, \sigma(0) \right] \quad (28)$$

由零初始条件得, $V(\mathbf{x}(0)) = 0$, $V(\mathbf{x}(N+1)) \geq 0$, 则:

$$\begin{aligned}
J &= E \left[\sum_{k=0}^N e^{-\lambda} [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) - V(\mathbf{x}(k)) + \right. \\
& \quad \left. V(\mathbf{x}(k+1))] + V(\mathbf{x}(0)) - V(\mathbf{x}(N+1)) \right] \leq \\
& \sum_{k=0}^N \{ e^{-\lambda} \mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - e^{-\lambda} \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) + \\
& \quad E[V(\mathbf{x}(k+1)) - e^{-\lambda} V(\mathbf{x}(k))] \} = \\
& \sum_{k=0}^N [e^{-\lambda} \mathbf{x}^T(k) C^T C \mathbf{x}(k) - e^{-\lambda} \gamma^2 \omega^T(k) \omega(k) + \\
& \quad \mathbf{x}^T(k) (A_i^T G_i A_i - e^{-\lambda} P_i + \delta Q) \mathbf{x}(k) + \\
& \quad 2 \mathbf{x}^T(k) A_i^T G_i B_1 K_i \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& \quad \mathbf{x}^T(k - \tau_i) (K_i^T B_1^T G_i B_1 K_i - e^{-\lambda \tau_i} Q) \mathbf{x}(k - \tau_i) + \\
& \quad 2 \mathbf{x}^T(k) A_i^T G_i B_2 \omega(k) + \\
& \quad 2 \mathbf{x}^T(k - \tau_i) K_i^T B_1^T G_i B_2 \omega(k) + \\
& \quad \omega^T(k) B_2^T G_i B_2 \omega(k)] = \\
& \sum_{k=0}^N [\xi_2^T(k) \Theta_2^i \xi_2(k)] \quad (29)
\end{aligned}$$

其中, $\xi_2(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k - \tau_i) \quad \omega^T(k)]^T$, 所以由式 (18) 可知 $J < 0$. $\square$

注 3. 定理 1 中的条件 (18) 并非线性矩阵不等式, 因为其含有控制增益阵 K_i 和 Lyapunov-Krasovskii 泛函矩阵乘积的交叉项. 因此, 定理 1 只是理论上的系统均方指数稳定结果, 并不具有现实操作意义, 只有通过适当的矩阵变换将式 (18) 变为线性矩阵不等式才可求出控制器增益.

在定理 1 基础上, 我们给出下面的定理.

定理 2. 具有 Markov 跳变参数 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 且状态转移概率矩阵满足条件 (11) 的闭环供应链系统 (17) 是均方指数稳定的且具有干扰抑制水平 γ , 若存在一组对称正定矩阵 $X_i > 0, Y_i > 0 (i \in$

$\mathcal{S}$), $U > 0$, 以及正常数 λ , 使得以下优化问题 (30) (31) 做合同变换得: 可解.

此时控制器可设计为 $K_i = Y_i U^{-1}$, 其中

$$W_i = (\sqrt{p_{i1}}I \quad \sqrt{p_{i2}}I \quad \sqrt{p_{i3}}I \quad \sqrt{p_{i4}}I) \\ \mathcal{X} = \text{diag}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

证明. 注意到式 (18) 中的 $G_i = W_i \mathcal{P} W_i^T$, 其中 $\mathcal{P} = \text{diag}\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, 则 Θ_0^i 可以改写为

$$\Theta_0^i = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}Q & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i^T W_i \\ K_i^T B_1^T W_i \\ B_2^T W_i \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} W_i^T A_i & W_i^T B_1 K_i & W_i^T B_2 \end{bmatrix}$$

其中, $L_2 = e^{-\lambda}(C^T C - P_i) + \delta Q$.

由 Schur 补引理可得:

$$\Theta_0^i = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 & A_i^T W_i \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}Q & 0 & K_i^T B_1^T W_i \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I & B_2^T W_i \\ * & * & * & -\mathcal{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

令 $X_i = P_i^{-1}$, $U = Q^{-1}$. 用 $\text{diag}\{X_i, U, I, I\}$ 对式

$$\begin{bmatrix} X_i L_2 X_i & 0 & 0 & X_i A_i^T W_i \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}U & 0 & U K_i^T B_1^T W_i \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I & B_2^T W_i \\ * & * & * & -\mathcal{X} \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

再次利用 Schur 补引理, 有式 (33).

在式 (33) 中令 $Y_i = K_i U$ 便得式 (30) 的左侧, 进而有 $\Theta_0^i < 0$. 根据定理 1, 则系统 (17) 在均方意义下指数稳定且具有 H_∞ 性能. $\square$

下面我们考虑由回收再制造率所带来的系统不确定性, 根据鲁棒控制思想研究闭环供应链系统 (15) 的分析与设计.

定理 3. 具有 Markov 跳变参数 $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 且状态转移概率矩阵满足条件 (11) 的闭环供应链系统 (15) 是均方指数稳定的且具有干扰抑制水平 γ , 若存在一组对称正定矩阵 $X_i > 0, Y_i > 0, W_i, U$, 以及标量 $\epsilon_i > 0 (i \in \mathcal{S})$, 使得以下优化问题 (34) 可解.

此时控制器可设计为 $K_i = Y_i U^{-1}$, 其中 $L_4 = -\mathcal{X} + \epsilon_i W_i^T H_i H_i^T W_i$.

证明. 令 $\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i$. 则由定理 2 可得式 (35).

$$\min \gamma \text{ s.t. } \Theta_2^i := \begin{bmatrix} -e^{-\lambda}X_i & 0 & 0 & X_i A_i^T W_i & X_i & X_i \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}U & 0 & Y_i^T B_1^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I & B_2^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathcal{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -e^{\lambda}\ell & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta}U \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-\lambda}X_i & 0 & 0 & X_i A_i^T W_i & X_i & X_i \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}U & 0 & U K_i^T B_1^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I & B_2^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathcal{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -e^{\lambda}\ell & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta}U \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

$$\min \gamma \text{ s.t. } \Theta_3^i := \begin{bmatrix} -e^{-\lambda}X_i & 0 & 0 & X_i A_i^T W_i & X_i & X_i & X_i E_i^T \\ * & -e^{-\lambda\tau_i}U & 0 & Y_i^T B_1^T W_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda}\gamma^2 I & B_2^T W_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\delta}U & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -e^{\lambda}\ell & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

注意到

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_2^i = \Theta_2^i + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X_i \Delta A_i^T W_i & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} = \\ & \Theta_2^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_i^T H_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_i \begin{bmatrix} E_i X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} X_i E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_i^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H_i^T W_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

根据引理 1, 考虑由再制造率和废弃率所带来的适当的系统不确定性, 我们有:

$$\Theta_2^i + \epsilon_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W_i^T H_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & H_i^T W_i & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\epsilon_i^{-1} \begin{bmatrix} X_i E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

其中, $\epsilon_i > 0, i \in \mathcal{S}$. 亦即式 (38).

由 Schur 补引理可得式 (34). $\square$

注 4. 通过优化方法求出的干扰抑制水平 γ , 根据 H_∞ 控制理论和抑制牛鞭效应之间的关系, 闭环供应链系统的鲁棒 H_∞ 控制器能有效抑制牛鞭效应.

3 仿真例子

这一部分将结合国内某钢铁企业从事废钢回收的历史资料^[38], 给出闭环供应链系统实例, 并应用 Matlab 仿真说明所得结果的有效性.

根据实际情况和企业历史数据, 对模型参数作如下设定: 可用商品仓库及回收商品仓库的衰减率分别为 $\rho_1 = 0.07$, $\rho_2 = 0.09$, 成本参数矩阵取 $C = 3.1I$. 初始值设定为 $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 10$ (单位: 10^6 吨). 市场需求率 $d(k)$ 分解为常值 $\bar{d}$ 和一个未知的成分 $\omega(k) \in l_2$, 即满足假设 2. 再制造率 α 及废弃率 β 视为不确定参数且满足假设 3. 生产及回收再制造时滞 τ_i 取离散时间常数 (单位: 周). 因此, 我们有如下系统参数:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.93 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0.93 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{\Theta}_2^i := \begin{bmatrix} -e^{-\lambda} X_i & 0 & 0 & X_i \bar{A}_i^T W_i & X_i & X_i \\ * & -e^{-\lambda \tau_i} U & 0 & Y_i^T B_1^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda \gamma^2} I & B_2^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathcal{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -e^{\lambda} \ell & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta} U \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-\lambda} X_i & 0 & 0 & X_i \bar{A}_i^T W_i & X_i & X_i \\ * & -e^{-\lambda \tau_i} U & 0 & Y_i^T B_1^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & -e^{-\lambda \gamma^2} I & B_2^T W_i & 0 & 0 \\ * & * & * & L_4 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -e^{\lambda} \ell & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{\delta} U \end{bmatrix} + \epsilon_i^{-1} \begin{bmatrix} X_i E_i^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i X_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑如下的系统状态转移概率矩阵

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.65 & 0.15 & 0.15 & 0.05 \\ 0.55 & 0.25 & 0.15 & 0.05 \\ 0.7 & 0.1 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix}$$

另取

$$E_1 = E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过 Matlab 求解式 (34), 我们发现抑制牛鞭效应的干扰抑制水平 γ 随生产及回收再制造的时滞上界 $\bar{\tau}$ 不同而不同. 当 $\bar{\tau} = 2.0$ 时, 优化干扰抑制水平为 $\gamma = 2.7700$; 当 $\bar{\tau} = 6.9$ 时, 干扰抑制水平只能优化为 $\gamma = 2.8190$. 时滞对系统性能的影响呈现某种准周期的特性, 这可以从文献 [39] 得到印证.

为进一步仿真, 取 $\bar{\tau} = 2.0$, 得如下控制器增益:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.6323 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.6323 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.7587 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.7588 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.8852 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.8852 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 0.1012 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.1012 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

首先考虑系统在仅有回收和再制造不确定性条件下的鲁棒控制问题. 设再制造率和废弃率为不确定常数, 仿真结果如图 2~4 所示, 其中图 2 为含有再制造不确定性闭环供应链系统的切换信号, 图 3 和 4 分别为在此情形下可用商品仓库库存水平变化和回收商品仓库库存水平变化.

下面考虑系统中同时含有外部需求不确定和再制造过程不确定情况下鲁棒 H_∞ 控制问题. 假定外部需求不确定 $\omega(k) \in l_2$. 仿真结果如图 5 和 6 所示, 图 5 和 6 分别为在系统同时含有外部需求不确

定和回收再制造不确定情形下可用商品仓库库存水平变化和回收商品仓库库存水平变化.

从仿真结果可见, 对于具有 Markov 跳变参数的闭环供应链系统, 通过设计鲁棒 H_∞ 控制器可以有效抑制回收再制造过程中的不确定需求扰动, 即在抑制牛鞭效应的情况下使得闭环供应链系统趋于稳定.

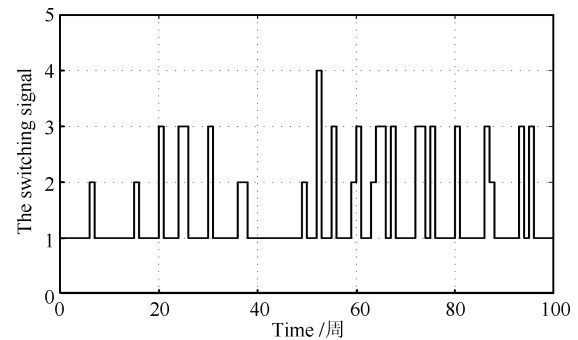


图 2 具有 Markov 跳变参数的闭环供应链系统切换信号

Fig. 2 The switching signal of CLSC

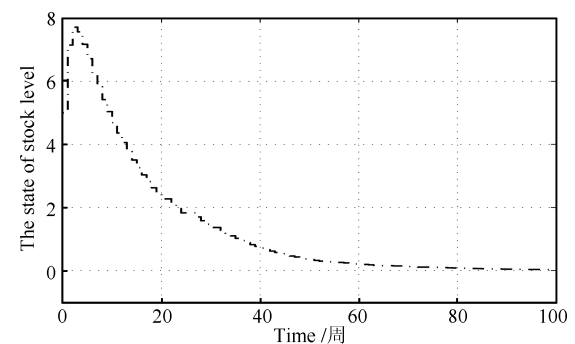


图 3 可用商品仓库库存水平变化

Fig. 3 The state of the serviceable stock

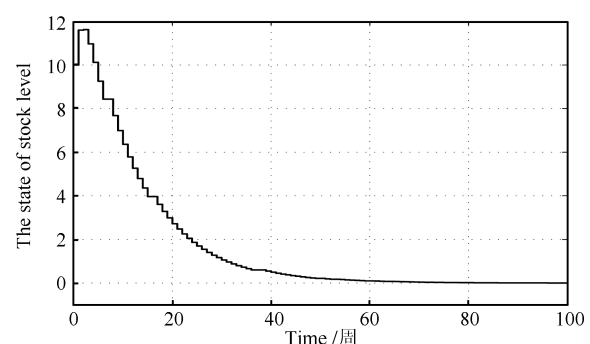


图 4 回收商品仓库库存水平变化

Fig. 4 The state of the returned stock

4 结论

本文将闭环供应链系统建模为具有 Markov 跳变参数的切换系统, 并研究其 H_∞ 控制问题. 把受生产率、回收率和衰减率影响的库存水平作为状态

变量, 根据不同库存水平状态确定 4 个子系统, 并假设它们之间的切换具有 Markov 性, 从而将闭环供应链系统建模为具有 Markov 跳变参数的切换系统. 应用鲁棒 H_∞ 控制方法以 LMI 形式给出了保证系统稳定且具有抑制牛鞭效应 H_∞ 性能的充分条件. 仿真例子说明了所得结果的有效性. 随着电子商务、无线射频识别技术 (Radio frequency identification, RFID)、网络控制及工业工程等技术的发展, 充分考虑闭环供应链系统的复杂特性以便对其有效地分析与控制, 还需要进一步深入研究.

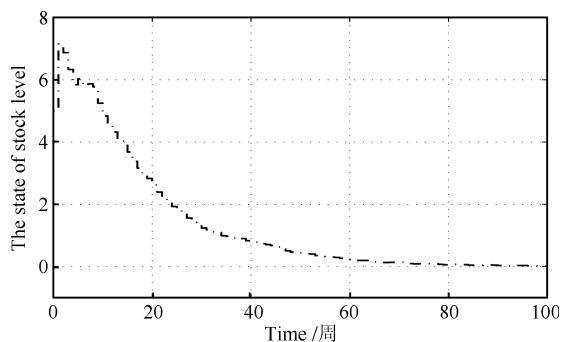


图 5 需求和回收再制造不确定下可用商品仓库库存水平变化

Fig. 5 The state of the serviceable stock with uncertainties

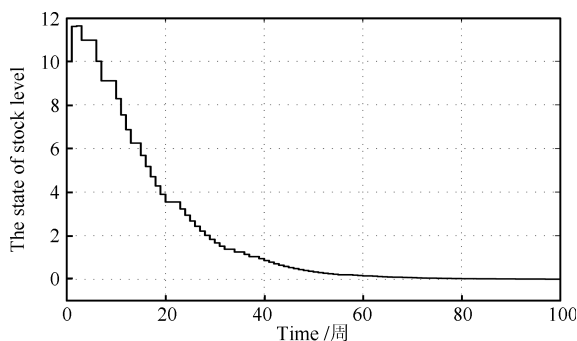


图 6 需求和回收再制造不确定下回收商品仓库库存水平变化

Fig. 6 The state of the returned stock with uncertainties

References

- 1 Amezcua T, Bras B. Lean remanufacture of an automobile clutch. In: Proceedings of 1st International Working Seminar on Reuse. Eindhoven, The Netherlands, 1996.
- 2 Robot T L. The remanufacturing industry: hidden giant. Research Report, Manufacturing Engineering Department, Boston University, Technical Report, 1996.
- 3 Savaskan R C, Bhattacharya S, van Wassenhove L N. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing. *Management Science*, 2004, **50**(2): 239–252
- 4 Hong I H, Yeh J S. Modeling closed-loop supply chains in the electronics industry: a retailer collection application. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2012, **48**(4): 817–829
- 5 Kiesmüller G P. Optimal control of a one product recovery system with leadtimes. *International Journal of Production Economics*, 2003, **81-82**(5): 333–340
- 6 Seierstad A, Sydsæter K. *Optimal Control Theory with Economic Applications* (3rd Edition). Amsterdam: North-Holland, 1987.
- 7 Kleber R, Minner S, Kiesmüller G. A continuous time inventory model for a product recovery system with multiple options. *International Journal of Production Economics*, 2002, **79**(2): 121–141
- 8 Guide V D R, van Wassenhove L N. Closed-loop supply chains: an introduction to the feature issue (Part 1). *Production and Operations Management*, 2006, **15**(3): 345–350
- 9 Guide V D R, van Wassenhove L N. Closed-loop supply chains: an introduction to the feature issue (Part 2). *Production and Operations Management*, 2006, **15**(4): 471–472
- 10 Pishvae M S, Rabbani M, Torabi S A. A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(2): 637–649
- 11 Hammond D, Beullens P. Closed-loop supply chain network equilibrium under legislation. *European Journal of Operational Research*, 2007, **183**(2): 895–908
- 12 Wei J, Zhao J. Reverse channel decisions for a fuzzy closed-loop supply chain. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(3): 1502–1513
- 13 Özkır V, Başlıgil H. Multi-objective optimization of closed-loop supply chains in uncertain environment. *Journal of Cleaner Production*, 2013, **41**: 114–125
- 14 El-Sayed M, Afia N, El-Kharbotly A. A stochastic model for forward-reverse logistics network design under risk. *Computers & Industrial Engineering*, 2010, **58**(3): 423–431
- 15 Dobos I. Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics system. *International Journal of Production Economics*, 2003, **81-82**: 351–360
- 16 Rodrigues L, Boukas E K. Piecewise-linear H_∞ controller synthesis with applications to inventory control of switched production systems. *Automatica*, 2006, **42**(8): 1245–1254
- 17 Bauso D, Blanchini F, Pesenti R. Robust control strategies for multi-inventory systems with average flow constraints. *Automatica*, 2006, **42**(8): 1255–1266
- 18 Sarimveis H, Patrinos P, Tarantilis C D, Kiranoudis C T. Dynamic modeling and control of supply chain systems: a review. *Computers & Operations Research*, 2008, **35**(11): 3530–3561
- 19 Huang Xiao-Yuan, Ge Ru-Gang. Survey of dynamic supply chain and control. *Control and Decision*, 2008, **23**(11): 1201–1204
(黄小原, 葛汝刚. 动态供应链与控制问题研究进展. *控制与决策*, 2008, **23**(11): 1201–1204)
- 20 Lou Shan-Zuo, Tian Xin-Cheng. Modeling and control for inventory with stochastic supply disruptions and returns. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(11): 2436–2444
(娄山佐, 田新诚. 随机供应中断和退货环境下库存问题的建模与控制. *自动化学报*, 2014, **40**(11): 2436–2444)
- 21 Lou Shan-Zuo, Tian Xin-Cheng. Contingent control of inventory under stochastic supply disruptions and returns. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 94–103
(娄山佐, 田新诚. 随机供应中断和退货环境下库存的应急控制. *自动化学报*, 2015, **41**(1): 94–103)
- 22 Zhao X D, Liu X W, Yin S, Li H Y. Improved results on stability of continuous-time switched positive linear systems. *Automatica*, 2014, **50**(2): 614–621

- 23 Long L J, Zhao J. A small-gain theorem for switched interconnected nonlinear systems and its applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(4): 1082–1088
- 24 Boukas E K, Zhang Q, Yin G. Robust production and maintenance planning in stochastic manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(6): 1098–1102
- 25 Lemos J M, Pinto L F. Distributed linear-quadratic control of serially chained systems: application to a water delivery canal. *IEEE Control Systems*, 2012, **32**(6): 26–38
- 26 Nandola N N, Rivera D E. An improved formulation of hybrid model predictive control with application to production-inventory systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, **21**(1): 121–135
- 27 Lee H L, Padmanabhan V, Whang S. The bullwhip effect in supply chains. *Sloan Management Review*, 1997, **38**(3): 93–102
- 28 Towill D R, Zhou L, Disney S M. Reducing the bullwhip effect: looking through the appropriate lens. *International Journal of Production Economics*, 2007, **108**(1–2): 444–453
- 29 Huang X Y, Yan N N, Guo H F. An H_∞ control method of the bullwhip effect for a class of supply chain system. *International Journal of Production Research*, 2007, **45**(1): 207–226
- 30 Boccadoro M, Martinelli F, Valigi P. Supply chain management by H_∞ control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2008, **5**(4): 703–707
- 31 Stadtler H. Supply chain management: an overview. *Supply Chain Management and Advanced Planning*. Berlin Heidelberg: Springer, 2015. 3–28
- 32 Udenio M, Fransoo J C, Peels R. Destocking, the bullwhip effect, and the credit crisis: empirical modeling of supply chain dynamics. *International Journal of Production Economics*, 2015, **160**: 34–46
- 33 Cao Y Y, Lam J. Robust H_∞ control of uncertain markovian jump systems with time-delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(1): 77–83
- 34 Boukas E K, Liu Z K. Robust H_∞ control of discrete-time markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(12): 1918–1924
- 35 Wang Guo-Liang, Bo Hai-Ying. Stabilization of singular markovian jump systems with general switching. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(1): 216–220
(王国良, 薄海英. 广义马氏跳变系统在一般转移速率下的控制器设计. *自动化学报*, 2015, **41**(1): 216–220)
- 36 Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 1996, **63**(4): 741–750
- 37 Mao X R. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*. New Delhi, India: CRC Press, 1994.
- 38 Huang Xiao-Yuan, Yan Ni-Na, Qiu Ruo-Zhen. Dynamic models of closed-loop supply chain & robust H_∞ control strategies with time-delay & parameter uncertainty. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2007, **13**(7): 1313–1321
(黄小原, 晏妮娜, 邱若臻. 一类参数和时滞不确定的闭环供应链动态模型与鲁棒 H_∞ 控制. *计算机集成制造系统*, 2007, **13**(7): 1313–1321)
- 39 Jayaram S, Kapoor S G, DeVor R E. Analytical stability analysis of variable spindle speed machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2000, **122**(3): 391–397



李庆奎 山西大学数学科学学院副教授。主要研究方向为切换时滞系统, 网络控制系统及供应链系统。本文通信作者。
E-mail: sdlqk01@126.com
(**LI Qing-Kui** Associate professor at the School of Mathematical Sciences, Shanxi University. His research interest covers switched delay systems, networked control systems, and supply chain systems. Corresponding author of this paper.)



李梅 山西大学数学科学学院硕士研究生。主要研究方向为网络化供应链系统。E-mail: feiyang_0418@163.com
(**LI Mei** Master student at the School of Mathematical Sciences, Shanxi University. Her research interest covers network-based supply chain systems.)



贾新春 山西大学数学科学学院教授。主要研究方向为网络化控制系统, 模糊控制和智能系统。
E-mail: xchjia@sxu.edu.cn
(**JIA Xin-Chun** Professor at the School of Mathematical Sciences, Shanxi University. His research interest covers networked control systems, fuzzy control, and intelligent control.)