

群目标联合检测与估计误差界的递推形式

连峰¹ 吕宁¹ 韩崇昭¹

摘 要 在随机有限集框架下给出了当杂波和漏检存在时, 群目标联合检测与估计 (Joint detection and estimation, JDE) 误差界的递推形式. 首先, 将多个群目标运动过程建模为一个多 Bernoulli 过程, 并采用连续个体目标数假设建模群目标观测似然函数; 其次, 采用最优子模式分配距离定义群目标 JDE 误差; 最终, 利用信息不等式推导获得了建议的误差界. 仿真实验在不同杂波密度和检测概率场景下利用群势概率假设密度和群势平衡多目标多 Bernoulli 滤波器对该误差界的有效性进行了验证.

关键词 误差界, 群目标跟踪, 联合检测与估计, 随机有限集

引用格式 连峰, 吕宁, 韩崇昭. 群目标联合检测与估计误差界的递推形式. 自动化学报, 2015, 41(12): 2026–2035

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140794

The Recursive Form of Error Bound for Joint Detection and Estimation of Groups

LIAN Feng¹ LV Ning¹ HAN Chong-Zhao¹

Abstract Within the random finite set framework, this paper derives the recursive form of error bound for joint detection and estimation (JDE) of groups in the presence of clutter and missed detection. First, the dynamic of multiple groups is modeled as a multi-Bernoulli process and the group observation likelihood is modeled based on the concept of continuous individual target number. Then, the optimal sub-pattern assignment distance is used to define the JDE error of the groups. Finally, the proposed bound is derived in terms of information inequality. Given various clutter density and probabilities of detection, the effectiveness of the bound is verified through simulation by indicating the performance limitations of the cardinalized probability hypothesis density and cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filters for the groups.

Key words Error bounds, groups tracking, joint detection and estimation, random finite set

Citation Lian Feng, Lv Ning, Han Chong-Zhao. The recursive form of error bound for joint detection and estimation of groups. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(12): 2026–2035

由于传感器分辨率较低或目标距传感器较远, 多个相距较近的点或个体目标无法被一一区分清楚. 将这一簇无法区分的点或个体目标视为一个整体, 它们被称为一个群目标^[1]. 群目标联合检测与估计 (Joint detection and estimation, JDE) 是指根据观测序列递推地估计群个数和存活群的状态. 它是近年来一个新的研究热点. 目前国内外已有一些学者提出了针对该方法^[2–7].

误差界是指一个跟踪算法理论上所能达到的最

小误差, 它是衡量算法性能的重要指标. 传统的克拉美罗下界^[8]仅考虑了估计误差而非检测误差, 故其不适用于 JDE 问题. 随后, Rezaeian 等^[9]在随机有限集 (Random finite set, RFS) 框架下提出了针对单个点目标的 JDE 误差界. Tong 等^[10]给出了该误差界在有漏检无杂波时的递推形式并将其扩展到无杂波无漏检时的多个点目标跟踪场景. 然而, 至今为止尚未有关于群目标 JDE 误差界的相关结论.

通过将多个群目标运动过程建模为一个多 Bernoulli 过程, 并利用 Mahler 提出的基于连续个体目标数的群目标测量似然函数模型^[1], 本文得到了当杂波和漏检同时存在时可递推计算的群目标 JDE 误差界. 该误差界基于最优子模式分配 (Optimal sub-pattern assignment, OSPA) 距离而非传统的欧氏距离获得. 仿真实验部分, 我们在不同杂波密度和检测概率场景下利用群势概率假设密度 (Group cardinalized probability hypothesis density, G-CPHD)^[6]和群势平衡多目标多 Bernoulli (Group cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli, G-CBMeMBer) 滤波器^[7]对该误差界的有效性进行了验证.

收稿日期 2014-11-18 录用日期 2015-06-13
Manuscript received November 18, 2014; accepted June 13, 2015

国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2013CB329405), 国家自然科学基金 (61473217), 陕西省自然科学基金 (2014JQ8333)

Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329405), National Natural Science Foundation of China (61473217), and Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2014JQ8333)

本文责任编辑 潘泉

Recommended by Associate Editor PAN Quan

1. 西安交通大学电子与信息工程学院智能网络与网络安全教育部重点实验室 西安 710049

1. Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security (MOE KLINS), School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049

1 数学基础简介

集合积分和期望: 对于有限集变量 $Y \subseteq \mathcal{Y}$ 的任意实值函数 $\eta(Y)$, 其在区域 $\mathcal{Y}$ 内的集合积分定义为^[11]

$$\int \eta(Y) \delta Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Y}^n} \eta(Y^n) d\mathbf{y}^{(1)} \dots d\mathbf{y}^{(n)} = \eta(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Y}^n} \eta(Y^n) d\mathbf{y}^{(1)} \dots d\mathbf{y}^{(n)} \quad (1)$$

式中, $Y^n = \{\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}\} \subseteq \mathcal{Y}^n$, 记 $Y^0 = \emptyset$. 若 Y 的概率密度为 $f(Y)$, 则 $\eta(Y)$ 的期望为

$$E[\eta] = \int \eta(Y) f(Y) \delta Y \quad (2)$$

多 Bernoulli RFS: 一个多 Bernoulli RFS X 是由 N 个 (单) Bernoulli RFS 的并构成, $X = \bigcup_{t=1}^N X^{(t)}$, 其概率密度可由参数集 $\Upsilon = \{(r^{(t)}, p^{(t)})\}_{t=1}^N$ 完全描述为^[12]

$$\pi(X) = \pi(\emptyset) \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_{|X|} \leq N} \prod_{t=1}^{|X|} \frac{r^{(j_t)}}{1 - r^{(j_t)}} p^{(j_t)}(\mathbf{x}^{(t)}) \quad (3)$$

上式中, $|X|$ 表示集合 X 的势, $r^{(t)} \in [0, 1]$ 为 $X^{(t)} \neq \emptyset$ 的概率, $p^{(t)}(\mathbf{x}^{(t)})$ 为 $\mathbf{x}^{(t)}$ 的概率密度,

$$\pi(\emptyset) = \prod_{t=1}^N (1 - r^{(t)}) \quad (4)$$

OSPA 距离: 由于传统的欧氏距离基于矢量定义, 因此它不能用于衡量集合间的距离. 本文采用阶数 $p = 2$ 的 OSPA 距离^[13] 定义真实集合 X 和估计集合 $\hat{X}$ 间的误差 $e(X, \hat{X})$,

$$e^2(X, \hat{X}) = \begin{cases} 0, & |\hat{X}| = |X| = 0 \\ \left(\min_{\tau \in \Pi_{\max(|\hat{X}|, |X|)}} \left(\sum_{t=1}^{\min(|\hat{X}|, |X|)} \min \left(c^2, \left\| \mathbf{x}^{(t)} - \hat{\mathbf{x}}^{(\tau(t))} \right\|_2^2 \right) + c^2 |\hat{X}| - |X| \right) \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $c > 0$ 为截断误差, Π_n 表示集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列, $\max(\cdot)$ 和 $\min(\cdot)$ 分别表示取最大值和最小值运算, $\|\cdot\|_2$ 表示取 2 范数.

信息不等式: 若 $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ 上的联合概率密度 $f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ 满足正则条件且 $\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / (\partial x_i \partial x_j)$ 存在, 那么如下不等式成立^[14]:

$$\int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (x_l - \hat{x}_l(\mathbf{z}))^2 d\mathbf{x} d\mathbf{z} \geq [J^{-1}]_{l,l} \quad (6)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ 为由 $\mathbf{z}$ 获得的 $\mathbf{x}$ 的无偏估计, x_l 和 $\hat{x}_l(\mathbf{z})$ 分别为 $\mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ 的第 l 个分量, $l = 1, \dots, L$, 其中 L 为 $\mathbf{x}$ 的维数, J 为 $L \times L$ 维 Fisher 信息矩阵, 矩阵中的元素分别为 Fisher 信息矩阵, 矩阵中的元素分别为

$$[J]_{i,j} = -E_f \left[\frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial x_i \partial x_j} \right] = - \int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial x_i \partial x_j} d\mathbf{x} d\mathbf{z}, \quad i, j = 1, 2, \dots, L \quad (7)$$

当且仅当条件概率密度 $f(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ 满足高斯分布时, 式 (6) 取 “=” 号.

2 问题描述

k 时刻单个群目标状态可建模为如下扩展矢量

$$\mathbf{x}'_k = [a_k, \mathbf{x}_k]^T \in \mathcal{X}'_k \quad (8)$$

式中, $\mathbf{x}'_k$ 用于建模位于同一状态 $\mathbf{x}_k$ 处的由一簇 (a_k 个) 个体目标构成的群目标状态, 其中 L 维列向量 $\mathbf{x}_k = [x_{k,1}, \dots, x_{k,L}]^T \in \mathcal{X}_k \subset \mathbf{R}^L$ 表示传统的单目标状态, a_k 表示群所包含的个体目标数. 根据 Mahler 提出的连续个体目标数概念^[1], $a_k \in \mathcal{A}_k \subset \mathbf{R}^+$ 为一个正实数. 表示单个群目标的状态空间, $\mathcal{X}'_k = \mathcal{A}_k \times \mathcal{X}_k \subset \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^L$.

记 k 时刻多个群目标的状态集合为 X'_k , 其由 $k-1$ 时刻存活的群目标和 k 时刻新生的群目标构成, 可将 X'_k 建模为

$$X'_k = \left[\bigcup_{\mathbf{x}'_{k-1} \in X'_{k-1}} \Psi_{k|k-1}(\mathbf{x}'_{k-1}) \right] \cup \Gamma_k \quad (9)$$

式中, Γ_k 表示新生群目标状态集合, 假设其为一个多 Bernoulli RFS, 相应的参数为 $\left\{ \left(r_{\Gamma,k}^{(t)}, p_{\Gamma,k}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{\Gamma,k}}$, $\Psi_{k|k-1}(\mathbf{x}'_{k-1})$ 表示由 $k-1$ 时刻的群 $\mathbf{x}'_{k-1}$ 产生的 k 时刻的群状态集合. $\mathbf{x}'_{k-1}$ 或者以存活概率 $p_{S,k}(\mathbf{x}'_{k-1})$ 演化为 $\mathbf{x}'_k$, 相应的状态转移概率密度记为 $f_{k|k-1}(\mathbf{x}'_k | \mathbf{x}'_{k-1})$, 或者以概率 $1 - p_{S,k}(\mathbf{x}'_{k-1})$ 消亡. 假设式 (9) 中构成并集的各项相互独立, 那么 X'_k 是以 X'_{k-1} 为条件的多 Bernoulli RFS.

记 k 时刻单个传感器观测矢量为 $\mathbf{z}_k \in \mathcal{Z}_k$, 其中 $\mathcal{Z}_k$ 表示观测空间. k 时刻的传感器观测集合记为

Z_k , 它由目标测量和杂波测量构成, 可将 Z_k 表示为

$$Z_k = \left[\bigcup_{\mathbf{x}'_k \in X'_k} \Theta_k(\mathbf{x}'_k) \right] \cup K_k \quad (10)$$

式中, K_k 表示 k 时刻的杂波 RFS, 其概率密度记为 $\kappa_k(K_k)$, $\Theta_k(\mathbf{x}'_k)$ 表示由 k 时刻的群目标 $\mathbf{x}'_k$ 产生的测量集合. 同样假设式 (10) 中构成并集的各项相互独立.

令 $\vartheta_m(a, q)$ 表示关于整数 $m \geq 0$ 的广义二项式分布, 它由概率产生函数 $G_{a,q}(l)$ 定义:

$$\vartheta_m(a, q) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{d^m G_{a,q}}{dl^m}(0) \quad (11)$$

$$G_{a,q}(l) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \varsigma(a-i)q + \varsigma(a-i)ql) \quad (12)$$

其中, $\varsigma(a)$ 为 sigmoidal 函数^[1]. 利用 $\vartheta_m(a, q)$, 单个群目标的观测似然函数可建模为^[1]

$$g_k(\Theta_k(\mathbf{x}'_k) | \mathbf{x}'_k) = |\Theta_k(\mathbf{x}'_k)|! \times \vartheta_{|\Theta_k(\mathbf{x}'_k)|}(a_k, p_{D,k}(\mathbf{x}_k)) \prod_{\mathbf{z}_k \in \Theta_k(\mathbf{x}'_k)} \phi_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \quad (13)$$

式中, $p_{D,k}(\mathbf{x}_k)$ 表示 k 时刻至少有一个源于该群的观测被传感器收到的概率 (也即 $\Theta_k(\mathbf{x}'_k) \neq \emptyset$ 的概率), $\phi_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ 表示传统的单目标单测量似然函数.

RFS 框架下的群目标 JDE 问题是指根据测量集序列 $Z_{1:k} = Z_1, \dots, Z_k$ 获得群状态估计集 $\hat{X}_k(Z_{1:k})$, 它包括群目标个数估计 (也即检测) 和状态估计两方面. 本文的目的是推导得到该问题递推形式的误差界.

3 群目标 JDE 误差界的递推形式

k 时刻 RFS 框架下群目标 JDE 的均方误差可定义为

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= E \left[e_k^2 \left(X'_k, \hat{X}'_k(Z_{1:k}) \right) \right] = \\ &\int \int f_k(X'_k, Z_k | Z_{1:k-1}) \times \\ &e_k^2 \left(X'_k, \hat{X}'_k(Z_{1:k}) \right) \delta X'_k \delta Z_k = \\ &\int \int \gamma_k(Z_k | X'_k) f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1}) \times \\ &e_k^2 \left(X'_k, \hat{X}'_k(Z_{1:k}) \right) \delta X'_k \delta Z_k \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $e_k(X'_k, \hat{X}'_k(Z_{1:k}))$ 表示 X'_k 和 $\hat{X}'_k(Z_{1:k})$ 的误差, 其由式 (5) 所示的 OSPA 距离定义, $f_k(X'_k, Z_k | Z_{1:k-1})$ 表示给定 $Z_{1:k-1}$ 时, X'_k 和 Z_k 的联合概率密度, $\gamma_k(Z_k | X'_k) = f_k(Z_k | X'_k)$ 表示

总的传感器测量似然函数. 根据文献 [1] 中的基本卷积公式 (11.252) 可得 $\gamma_k(Z_k | X'_k)$ 为

$$\gamma_k(Z_k | X'_k) = \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{|X'_k|} = Z_k} \kappa_k(W_0) \times g_k(W_1 | \mathbf{x}'_k^{(1)}) \cdots g_k(W_{|X'_k|} | \mathbf{x}'_k^{(|X'_k|)}) \quad (15)$$

式中, $W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{|X'_k|} = Z_k$ 表示若 $i \neq j$ ($i, j = 0, 1, \dots, |X'_k|$) 则 $W_i \cap W_j = \emptyset$, 且 $W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{|X'_k|} = Z_k$, 也即 $W_0, W_1, \dots, W_{|X'_k|}$ 是 Z_k 的一个个数为 $|X'_k| + 1$ 的划分. 求和运算是关于测量集合 Z_k 的所有互不相交的子集 $W_0, W_1, \dots, W_{|X'_k|}$ 进行.

为了得到群目标 JDE 误差界的递推形式, 需要引入如下假设:

1) 采用最大后验概率 (Maximum a posterior, MAP) 检测准则估计群目标的个数. 也即 k 时刻群目标状态估计集合 $\hat{X}'_k(Z_{1:k})$ 的势 $\hat{n}_k$ 通过最大化后验概率 $P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k})$ 得到:

$$\hat{n}_k = \arg \max_n P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k}) \quad (16)$$

说明. 由于检测器和估计器之间存在着极其复杂的内在关系, 因此若没有 MAP 检测准则的约束, 几乎无法获得群目标 JDE 误差界的表达式.

2) 状态估计器为无偏的, 它是利用信息不等式获得本文结论的必要条件.

3) 群目标状态集的 Bayes 递推近似为一个多 Bernoulli 过程. 即其 k 时刻的先验概率密度 $f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1})$ 和后验概率密度 $f_k(X'_k | Z_{1:k})$ 分别满足参数集为 $\Upsilon_{k|k-1} = \left\{ \left(r_{k|k-1}^{(t)}, p_{k|k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k|k-1}}$ 和 $\Upsilon_k = \left\{ \left(r_k^{(t)}, p_k^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_k}$ 的多 Bernoulli 分布, 其中 $\Upsilon_{k|k-1}$ 和 Υ_k 的递推公式可由 G-CBMeMBer 滤波器^[7] 的预测步和更新步获得.

定理 1. 若群目标状态和传感器测量分别满足如式 (9) 所示的多 Bernoulli 模型和如式 (10) 所示的观测模型, 那么给定时刻群目标多 Bernoulli 后验概率密度的参数集 $\Upsilon_{k-1} = \left\{ \left(r_{k-1}^{(t)}, p_{k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k-1}}$, 其 k 时刻联合 MAP 检测与无偏估计的误差界为

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &\geq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0, n+\hat{n}>0}^N \frac{\Omega_k^{n,m}}{m! \cdot n! \cdot \max(n, \hat{n})} \times \\ &\left(\sum_{t=1}^{\min(n, \hat{n})} \min \left(c^2 \omega_{k, \hat{n}, n, m}, \sum_{l=1}^{L+1} [J_{k, t, \hat{n}, n, m}^{-1}]_{l, l} \right) + \right. \\ &\left. c^2 \omega_{k, \hat{n}, n, m} |n - \hat{n}| \right) \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$[J_{k,t,\hat{n},n,m}]_{i,j} = \frac{-1}{\omega_{k,\hat{n},n,m}^2} \times \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k} f_k(\mathbf{x}'_k, Z_k^m | Z_{1:k-1}, |X'_k| = n) \times \frac{\partial^2 \log f_k(\mathbf{x}'_k, Z_k^m | Z_{1:k-1}, |X'_k| = n)}{\partial x'_{k,i} \partial x'_{k,j}} \times d\mathbf{x}'_k dz_k^{(1)} \cdots dz_k^{(m)} \quad (18)$$

$$\omega_{k,\hat{n},n,m} = \frac{\pi_{k|k-1}(\emptyset)}{\Omega_k^{n,m}} \times \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \cdots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n = Z_k^m} D_k^{j_1, \dots, j_n} \times (W_0, W_1, \dots, W_n) dz_k^{(1)} \cdots dz_k^{(m)} \quad (19)$$

$$\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m} = \{Z_k^m \in \mathcal{Z}_k^m : \arg \max_n \{\beta_k^n(Z_k^m | Z_{1:k-1})\} = \hat{n}\} \quad (20)$$

$$\beta_k^n(Z_k^m | Z_{1:k-1}) = \left(\sum_{1 \leq j_1 \neq \cdots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \prod_{t=1}^n \frac{r_{k|k-1}^{(j_t)}}{1 - r_{k|k-1}^{(j_t)}} \right) \times \left(\sum_{1 \leq j_1 \neq \cdots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n = Z_k^m} D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n) \right) \quad (21)$$

$$f_k(\mathbf{x}'_k, Z_k^m | Z_{1:k-1}, |X'_k| = n) = \frac{\pi_{k|k-1}(\emptyset)}{\Omega_k^{n,m}} \sum_{1 \leq j_1 \neq \cdots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n = Z_k^m} \frac{D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n)}{H_k^{j_t}(W_t)} p_{k|k-1}^{(j_t)}(\mathbf{x}'_k) \times g_k(W_t | \mathbf{x}'_k) \quad (22)$$

$$\Omega_k^{n,m} = \pi_{k|k-1}(\emptyset) \sum_{1 \leq j_1 \neq \cdots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n = Z_k^m} \int_{\mathcal{Z}_k^m} D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n) dz_k^{(1)} \cdots dz_k^{(m)} \quad (23)$$

$$D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n) = \kappa_k(W_0) \cdot \prod_{t=1}^n \frac{r_{k|k-1}^{(j_t)}}{1 - r_{k|k-1}^{(j_t)}} H_k^{j_t}(W_t) \quad (24)$$

$$H_k^{j_t}(W_t) = \int_{\mathcal{X}'_k} p_{k|k-1}^{(j_t)}(\mathbf{x}'_k) g_k(W_t | \mathbf{x}'_k) d\mathbf{x}'_k \quad (25)$$

$$\pi_{k|k-1}(\emptyset) = \prod_{t=1}^{N_{k|k-1}} (1 - r_{k|k-1}^{(t)}) \quad (26)$$

其中, $\left\{ \left(r_{k|k-1}^{(t)}, p_{k|k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k|k-1}}$ 可根据文献 [7] 由 $\left\{ \left(r_{k-1}^{(t)}, p_{k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k-1}}$ 递推获得, $f_k(\mathbf{x}'_k, Z_k^m | Z_{1:k-1}, |X'_k| = n)$ 表示 k 时刻给定条件 $Z_{1:k-1}$ 和 $|X'_k| = n$ 时, $(\mathbf{x}'_k, Z_k^m)$ 的联合概率密度, $\Omega_k^{n,m}$ 为其归一化因子. $J_{k,t,\hat{n},n,m}$ 表示 k 时刻给定条件 $|Z_k| = m$, $|X'_k| = n$ 和 $|\hat{X}'(Z_k^m)| = \hat{n}$ 时, 第 k 个群目标的 Fisher 信息矩阵. $J_{k,t,\hat{n},n,m}$ 和 $\omega_{k,\hat{n},n,m}$ 计算公式中的积分区域 $\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}$ 表示 k 时刻根据 MAP 检测准则将群个数估计为 $\hat{n}$ 时, $\mathcal{Z}_k^m$ 中所对应的测量空间. $\mathcal{Z}_k^{0,m}, \mathcal{Z}_k^{1,m}, \dots, \mathcal{Z}_k^{N,m}$ 是 $\mathcal{Z}_k^m$ 的一个个数为 $N+1$ 的划分.

定理 1 的计算步骤

1. 根据 G-CBMeMBer 滤波器的预测步由

$$\Upsilon_{k-1} = \left\{ \left(r_{k-1}^{(t)}, p_{k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k-1}}$$

计算 $\Upsilon_{k|k-1} = \left\{ \left(r_{k|k-1}^{(t)}, p_{k|k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k|k-1}}$;

2. 根据式 (23) 计算 $\Omega_k^{n,m}$;

3. 根据式 (22) 计算密度 $f_k(\mathbf{x}'_k, Z_k^m | Z_{1:k-1}, |X'_k| = n)$;

4. 根据式 (20) 和 (21) 所示的 MAP 检测准则将测量

空间 $\mathcal{Z}_k^m$ 划分为 $\mathcal{Z}_k^{0,m}, \mathcal{Z}_k^{1,m}, \dots, \mathcal{Z}_k^{N,m}$;

5. 根据式 (18) 和 (19) 计算 $[J_{k,t,\hat{n},n,m}]_{i,j}$ 和 $\omega_{k,\hat{n},n,m}$;

6. 根据式 (17) 最终可得 k 时刻群目标联合 MAP 检测与无偏估计的误差界

由式 (21)~(23) 可以看出定理 1 需要在集合 $\mathcal{Z}_k^m$ 的划分空间上进行求和运算, 其计算量随测量个数 m 的增长而迅速增多. 因此, 为了控制所建议误差界的计算代价, 通常需要采用一些近似的测量集合划分方法. 例如 Granstrom 等^[15] 建议的距离划分和子划分相结合的方法, 其计算代价近似为 $O(m^4)$; 或 Zhang 等^[16] 提出的基于模糊自适应共振理论 (Adaptive resonance theory, ART) 模型的快速划分算法, 其计算代价近似为 $O(2m^2)$ 等. 这些

方法在保证较高精度的同时可以有效控制 Z_k^m 中所需参与计算的划分个数。

还需要说明的是: 由于 k 时刻信息矩阵 $J_{k,t,\hat{n},n,m}$ 的积分区域 $\mathcal{Z}_{k-1}^{\hat{n},m}$ 与 $k-1$ 时刻信息矩阵 $J_{k-1,t,\hat{n},n,m}$ 的积分区域 $\mathcal{Z}_{k-1}^{\hat{n},m}$ 不同, 导致无法根据式 (18) 写出 $J_{k-1,t,\hat{n},n,m}$ 与 $J_{k,t,\hat{n},n,m}$ 的递推关系。因此不同于后验克拉美罗下界的递推过程, σ_k^2 不能由 σ_{k-1}^2 递推获得。

4 算例及分析

假设 2 维监控区域 $\mathcal{S} = [-50\text{ m}, 50\text{ m}] \times [-50\text{ m}, 50\text{ m}]$ 内存在多个群目标, 在所监控的时间段内群个数未知且可能随时间变化。监控时间长度为 40 s, 传感器采样间隔 $\Delta t = 1\text{ s}$ 。 k 时刻单个群的状态可表示为 $\mathbf{x}'_k = [a_k, x_k]^T$, 其中 $x_k = [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \ddot{x}_k, \ddot{y}_k]^T$, $[x_k, y_k]^T$, $[\dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$ 和 $[\ddot{x}_k, \ddot{y}_k]^T$ 分别为 X 轴和 Y 轴的位移、速度和加速度。假设群状态转移概率密度 $f_{k|k-1}(\mathbf{x}'_k | \mathbf{x}'_{k-1})$ 满足:

$$f_{k|k-1}(\mathbf{x}'_k | \mathbf{x}'_{k-1}) = \mathcal{N}(a_k; a_{k-1}, \varepsilon_k) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; F_k \mathbf{x}_{k-1}, Q_k) \quad (27)$$

式中, $\mathcal{N}(\cdot; \mathbf{m}, Q)$ 表示高斯分布的概率密度, $\mathbf{m}$ 和 Q 分别为其均值和协方差矩阵。令 $\varepsilon_k = 1$, F_k 和 Q_k 满足均加速模型,

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_2 \quad (28)$$

$$Q_k = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 1 \end{bmatrix} \otimes I_2 \quad (29)$$

式中, $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积, I_n 表示 $n \times n$ 维单位对角矩阵, σ 表示均加速模型的过程噪声标准差, 令 $\sigma = 0.01\text{ m/s}^2$ 。

k 时刻的新生群目标状态集 Γ_k 满足参数为 $\left\{ \left(r_{\Gamma,k}^{(t)}, p_{\Gamma,k}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{\Gamma,k}}$ 的多 Bernoulli 分布, 其中

$$p_{\Gamma,k}^{(t)}(\mathbf{x}'^{(t)}) = \mathcal{N}(a_k^{(t)}; a_{\Gamma,k}^{(t)}, \varepsilon_{\Gamma,k}^{(t)}) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_k^{(t)}; \mathbf{x}_{\Gamma,k}^{(t)}, Q_{\Gamma,k}^{(t)}), \quad t = 1, \dots, N_{\Gamma,k} \quad (30)$$

式中, 令 $N_{\Gamma,k} = 4$, $r_{\Gamma,k}^{(1)} = r_{\Gamma,k}^{(2)} = 0.1$, $r_{\Gamma,k}^{(3)} = r_{\Gamma,k}^{(4)} = 0.05$, $a_{\Gamma,k}^{(1)} = a_{\Gamma,k}^{(2)} = 4$,

$a_{\Gamma,k}^{(3)} = a_{\Gamma,k}^{(4)} = 6$, $\varepsilon_{\Gamma,k}^{(1)} = \varepsilon_{\Gamma,k}^{(2)} = \varepsilon_{\Gamma,k}^{(3)} = \varepsilon_{\Gamma,k}^{(4)} = 1$, $\mathbf{x}_{\Gamma,k}^{(1)} = [20, 20, -1, -1, 0.05, 0.05]^T$, $\mathbf{x}_{\Gamma,k}^{(2)} = [20, -20, -1, 2, 0.05, -0.05]^T$, $\mathbf{x}_{\Gamma,k}^{(3)} = [-20, 20, 2, -1, -0.05, 0.05]^T$, $\mathbf{x}_{\Gamma,k}^{(4)} = [-20, -20, 2, -0.05, -0.05]^T$, $Q_{\Gamma,k}^{(1)} = Q_{\Gamma,k}^{(2)} = Q_{\Gamma,k}^{(3)} = Q_{\Gamma,k}^{(4)} = \text{diag}\{16, 16, 0.04, 0.04, 0.0004, 0.0004\}$, 其中 $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵。

k 时刻的群目标观测似然函数如式 (13) 所示, 其中单目标单测量似然 $\phi_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$ 为

$$\phi_k(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k), R_k) \quad (31)$$

式中, $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$ 表示状态 x_k 的观测函数, R_k 表示测量噪声协方差矩阵。令 $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = \left[\sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \arctan(y_k/x_k) \right]^T$, $R_k = \text{diag}\{\varsigma_r^2, \varsigma_\theta^2\}$, 其中 $\varsigma_r = 5\text{ m}$, $\varsigma_\theta = 0.1\text{ rad}$ 。

令群目标存活概率为 $p_{S,k}(\mathbf{x}'_{k-1}) = p_S = 0.9$, 传感器检测概率为 $p_{D,k}(\mathbf{x}_k) = p_D$ 。

k 时刻的杂波集合 K_k 为一个 Poisson RFS, 其密度 $\kappa_k(K_k)$ 可表示为式 (32)。

$$\kappa_k(K_k) = e^{-\lambda_k} \prod_{\mathbf{z}_k \in K_k} v_k(\mathbf{z}_k) = e^{-\lambda_k} \prod_{\mathbf{z}_k \in K_k} \lambda_k \varphi_k(\mathbf{z}_k) \quad (32)$$

式中, $v_k(\mathbf{z}_k) = \lambda_k \varphi_k(\mathbf{z}_k)$ 表示杂波强度, λ_k 为平均杂波数, 为 $\varphi_k(\mathbf{z}_k)$ 单个杂波分布的概率密度。令 $\lambda_k = \lambda$, $\varphi_k(\mathbf{z}_k) = \mathcal{U}(\mathbf{z}_k; \mathcal{S})$, 其中 $\mathcal{U}(\cdot; \mathcal{S})$ 表示在监控区域 $\mathcal{S}$ 内均匀分布的概率密度函数。

令 $k = 0$ 时刻的群目标初始个数为 $N_0 = 4$, 初始存活概率为 $r_0^{(1)} = r_0^{(2)} = 0.8$, $r_0^{(3)} = r_0^{(4)} = 0.6$, 初始状态为 $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 8$, $a_0^{(3)} = a_0^{(4)} = 10$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = [10, 10, 0, 0, -0.05, -0.05]^T$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = [10, -10, 0, -2, -0.05, 0.1]^T$, $\mathbf{x}_0^{(3)} = [-10, 10, 1, 1, -0.05, -0.05]^T$, $\mathbf{x}_0^{(4)} = [-10, -10, -1, -1, 0.05, 0.05]^T$ 。

将上述参数带入定理 1, 即可递推获得建议的群目标 JDE 误差界, 需要说明的是:

1) $[J_{k,t,\hat{n},n,m}]_{i,j}$ 计算公式中的求偏导数运算可利用软件 Mathematica 方便的获得;

2) 由于 $[J_{k,t,\hat{n},n,m}]_{i,j}$ 和 $\omega_{k,\hat{n},n,m}$ 的计算公式中包含积分运算且没有解析表达式形式, 因此需要采用数值积分法^[17] 计算。

我们利用 G-CPHD 滤波器^[6] 和 G-CBMeMBer 滤波器^[7] 两种算法对建议的误差界进行验证。为清楚起见, 令 $\sigma_{a,k}^2$ 和 $\sigma_{p,k}^2$ 分别表示 k 时刻群的个体目标数 JDE 误差和位置 JDE 误差, 我们对两者的 (下) 界分别进行展示。令 OSPA 距离中的个体目标数截断误差为 $c_{a,k}^2 = 60$, 位置截断

误差为 $c_{p,k}^2 = 500$.

图 1 展示了在不同 p_D 下, 建议误差界的时间平均值与上述 2 种算法的时间平均 OSPA 误差 (该误

差由 500 次蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 仿真实验获得) 随 λ 的变化曲线.

从图 1 可以看出:

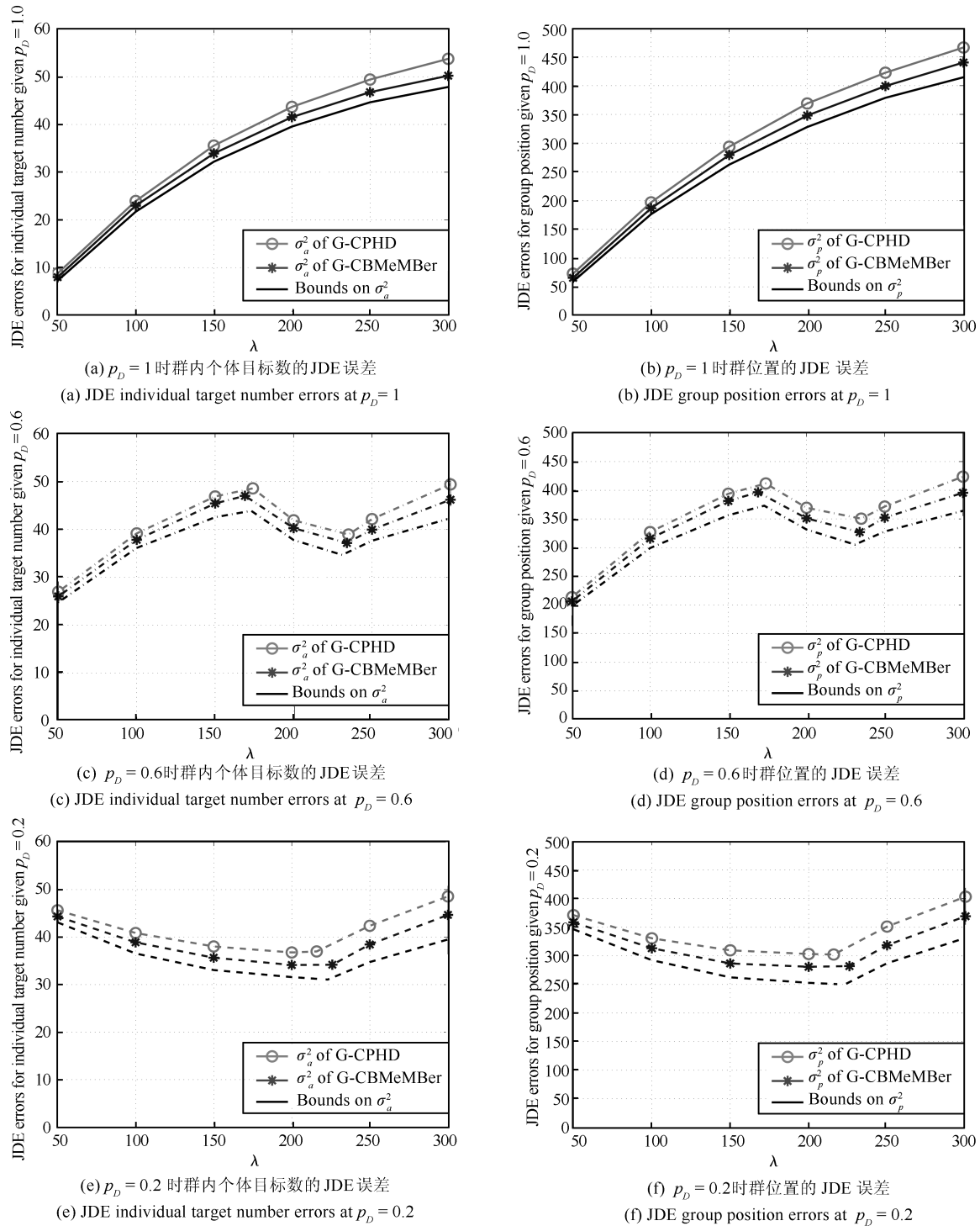


图 1 G-CPHD 和 G-CBMeMBer 滤波器的时间平均 OSPA 距离与建议误差界的时间平均值随 λ 的变化曲线

Fig. 1 The time averaged OSPA distance and time averaged value's curves of the proposed error bound with λ changes for G-CPHD and G-CBMeMBer filter

1) 给定不同的 p_D , 建议的误差界并不总是随 λ 单调增. 或给定不同的 λ , 建议的误差界并不总是随 p_D 单调减. 这是由于当 $p_D < 1$ 或 $\lambda > 0$ 时, λ 或 p_D 的增大均能同时产生两个相反的作用: 降低群丢失的可能性和增加虚假群估计. 若前者占据主导作用, 该界随 λ 或 p_D 的增大而减小; 否则, 该界随 λ 或 p_D 的增大而增大.

2) 对于不同的 λ 和 p_D , 尽管 G-CPHD 和 G-CBMeMBer 滤波器的时间平均 OSPA 误差曲线没有完全达到建议的误差界, 但两者均接近于该界, 并且后者的性能优于前者. 这是由于: G-CPHD 和 G-CBMeMBer 算法本身均有不同程度的近似 (例如, 两者分别假设群目标状态集合的递推为聚类过程和多 Bernoulli 过程), 并且在它们的粒子滤波实现中, G-CPHD 在状态提取步由于聚类还会引入额外误差, 而 G-CBMeMBer 无需聚类便可直接提取状态, 故其性能优于前者.

3) 给定 p_D 若 λ 越大, 或者给定 λ 若 p_D 越小, G-CPHD 和 G-CBMeMBer 滤波器的时间平均 OSPA 误差超过建议的界越多. 但两者中的最优值与该界相比: a) 相对误差最大不超过约 12%; b) 不同 p_D 和 λ 下的平均相对误差约为 7%, 上述两点说明建议的误差界能够正确反映这两个群目标 JDE 算法可能达到的最优性能, 它可用作衡量该类算法性能的一个有效指标.

5 结论与展望

本文在 RFS 框架下提出了杂波和漏检同时存在时, 群目标 JDE 误差界的递推形式. 该误差界基于 OSPA 距离而非传统的欧氏距离获得. 最后通过仿真算例展示了该误差界的应用. 今后的工作主要集中在以下 2 点:

- 1) 将本文结论扩展到多传感器场景;
- 2) 研究基于该误差界的传感器管理技术.

附录

定理 1 的证明

首先根据式 (16) 所示的 MAP 检测准则估计群个数. 若 k 时刻传感器获得观测集 Z_k^m , 那么根据 Bayes 递推公式可得 $P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}, Z_k^m)$ 为

$$\frac{P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}, Z_k^m) = P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}) P_k(Z_k^m | |X'_k| = n)}{P_k(Z_k^m | Z_{1:k-1})} \quad (A1)$$

其中

$$P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}'_k} f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1}) d\mathbf{x}'_k \cdots d\mathbf{x}'_k^{(n)} \quad (A2)$$

$$P_k(Z_k^m | |X'_k| = n) = \int_{\mathcal{X}'_k} f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1}) \times \gamma_k(Z_k^m | X'_k) d\mathbf{x}'_k^{(1)} \cdots d\mathbf{x}'_k^{(n)} \quad (A3)$$

我们已假设 $f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1})$ 近似满足参数为 $\Upsilon_{k|k-1} = \left\{ \left(r_{k|k-1}^{(t)}, p_{k|k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k|k-1}}$ 的多 Bernoulli 分布, 将该密度和式 (15) 所示的传感器测量似然函数代入式 (A2) 和 (A3), 并对 $\mathbf{x}'_k^{(1)}, \dots, \mathbf{x}'_k^{(n)}$ 积分后可得:

$$P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}) = \pi_{k|k-1}(\emptyset) \times \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \prod_{t=1}^n \frac{r_{k|k-1}^{(j_t)}}{1 - r_{k|k-1}^{(j_t)}} \quad (A4)$$

$$P_k(Z_k^m | |X'_k| = n) = \pi_{k|k-1}(\emptyset) \times \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_n = Z_k^m} D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n) \quad (A5)$$

其中, $\pi_{k|k-1}(\emptyset)$, $D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n)$ 和 $H_k^{j_t}(W_t)$ 如式 (24) ~ (26) 所示.

将式 (A4) 和 (A5) 带入式 (A1) 后可得:

$$P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}, Z_k^m) = \frac{\pi_{k|k-1}^2(\emptyset)}{P_k(Z_k^m | Z_{1:k-1})} \beta_k^n(Z_k^m | Z_{1:k-1}) \quad (A6)$$

其中, $\beta_k^n(Z_k^m | Z_{1:k-1})$ 如式 (21) 所示.

对于 MAP 检测器, 若满足:

$$\hat{n} = \arg \max_n \{ P_k(|X'_k| = n | Z_{1:k-1}, Z_k^m) \} = \arg \max_n \{ \beta_k^n(Z_k^m | Z_{1:k-1}) \} \Leftrightarrow Z_k^m \in \mathcal{Z}_k^{\hat{n}, m} \quad (A7)$$

则判定 $|\hat{X}'_k(Z_{1:k-1}, Z_k^m)| = \hat{n}$.

利用式 (1) 所示的集合积分定义, 可将式 (14) 写为

$$\sigma_k^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{m! \cdot n!} \int_{Z_k^m} \int_{\mathcal{X}_k^n} f_{k|k-1}(X'_k | Z_{1:k-1}) \cdot e_k^2(X'_k, \hat{X}'_k(Z_{1:k-1}, Z_k^m)) \times d\mathbf{x}'_k^{(1)} \cdots d\mathbf{x}'_k^{(n)} d\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots d\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (A8)$$

再根据式 (20) 所示的 MAP 检测准则将式 (A7) 中的积分区域 Z_k^m 划分为 $Z_k^{0,m}, Z_k^{1,m}, \dots, Z_k^{N,m}$, 则式 (A7) 又可重新写为

$$\sigma_k^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0}^N \frac{1}{m! \cdot n!} \times \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} e_k^2 \left(X'_k{}^n, \hat{X}'_k{}^{\hat{n}} (Z_{1:k-1}, Z_k^m) \right) \times \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (\text{A9})$$

令 $f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1})$ 表示给定 $Z_{1:k-1}$ 时, $(X'_k{}^n, Z_k^m)$ 的联合概率密度,

$$f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1}) = \frac{1}{\Omega_k^{n,m}} \times \gamma_k(Z_k^m | X'_k{}^n) f_{k|k-1}(X'_k{}^n | Z_{1:k-1}) \quad (\text{A10})$$

其中, $\Omega_k^{n,m}$ 为归一化因子,

$$\Omega_k^{n,m} = \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_{k|k-1}(X'_k{}^n | Z_{1:k-1}) \times \gamma_k(Z_k^m | X'_k{}^n) \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (\text{A11})$$

上两式中, 将参数集为 $\Upsilon_{k|k-1} = \left\{ \left(r_{k|k-1}^{(t)}, p_{k|k-1}^{(t)} \right) \right\}_{t=1}^{N_{k|k-1}}$ 多 Bernoulli 先验密度 $f_{k|k-1}(X'_k{}^n | Z_{1:k-1})$ 和式 (15) 所示的传感器测量似然函数代入式 (A10) 和式 (A11) 并对式 (A11) 中的 $\mathbf{z}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{z}_k^{(m)}$ 积分后可得:

$$f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1}) = \frac{\pi_{k|k-1}(\emptyset)}{\Omega_k^{n,m}} \times \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_n = Z_k^m} \kappa_k(W_0) \times \prod_{t=1}^n \frac{r_{k|k-1}^{(j_t)}}{1 - r_{k|k-1}^{(j_t)}} p_{k|k-1}^{(j_t)} \left(\mathbf{x}'_k{}^{(t)} \right) g_k \left(W_t | \mathbf{x}'_k{}^{(t)} \right) \quad (\text{A12})$$

$$\Omega_k^{n,m} = \pi_{k|k-1}(\emptyset) \times \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_n \leq N_{k|k-1}} \sum_{W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_n = Z_k^m} \int_{\mathcal{Z}_k^m} D_k^{j_1, \dots, j_n}(W_0, W_1, \dots, W_n) \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (\text{A13})$$

根据式 (5) 所示的 OSPA 距离定义和式 (A10), 式 (A9) 变为

$$\sigma_k^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0, n+\hat{n}>0}^N \frac{\Omega_k^{n,m}}{m! \cdot n! \cdot \max(\hat{n}, n)} \times \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1}) \times \left(\min_{\tau \in \Pi_{\max(\hat{n}, n)}} \sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min \left(c^2, \left\| \mathbf{x}'_k{}^{(t)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(\tau(t))} (Z_{1:k-1}, Z_k^m) \right\|_2^2 \right) + c^2 |n - \hat{n}| \right) \times \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (\text{A14})$$

令

$$\omega_{k, \hat{n}, n, m} = \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1}) \times \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \quad (\text{A15})$$

表示密度 $f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1})$ 在空间 $\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m} \times \mathcal{X}'_k^n$ 上的积分.

将式 (A12) 代入式 (A15) 并对 $\mathbf{x}'_k{}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}'_k{}^{(n)}$ 积分后可得 $\omega_{k, \hat{n}, n, m}$ 如式 (19) 所示. 不妨记

$$\tau^{\min} = \arg \min \sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min \left(c^2, \left\| \mathbf{x}'_k{}^{(t)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(\tau(t))} (Z_{1:k-1}, Z_k^m) \right\|_2^2 \right) \quad (\text{A16})$$

表示 $\Pi_{\max(n, \hat{n})}$ 中使得 $\sum_{t=1}^{\min(n, \hat{n})} \min \left(c^2, \left\| \mathbf{x}'_k{}^{(t)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(\tau(t))} (Z_{1:k-1}, Z_k^m) \right\|_2^2 \right)$ 最小的排序.

那么, 根据式 (A14) 和式 (A15), 式 (A13) 可重写为

$$\sigma_k^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N \sum_{\hat{n}=0, n+\hat{n}>0}^N \frac{\Omega_k^{n,m}}{m! \cdot n! \cdot \max(\hat{n}, n)} \times \left(\sum_{t=1}^{\min(\hat{n}, n)} \min \left(c^2 \omega_{k, \hat{n}, n, m}, \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k(X'_k{}^n, Z_k^m | Z_{1:k-1}) \times \left\| \mathbf{x}'_k{}^{(t)} - \hat{\mathbf{x}}_k^{(\tau^{\min}(t))} (Z_{1:k-1}, Z_k^m) \right\|_2^2 \times \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{x}'_k{}^{(n)} \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(1)} \cdots \mathrm{d}\mathbf{z}_k^{(m)} \right) + c^2 |n - \hat{n}| \omega_{k, \hat{n}, n, m} \right) \quad (\text{A17})$$

定义

$$f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right) = \int_{\mathcal{X}'_k^{n-1}} f_k \left(X'_k, Z_k^m \middle| Z_{1:k-1} \right) d\mathbf{x}'_k(1) \cdots d\mathbf{x}'_k(t-1) d\mathbf{x}'_k(t+1) \cdots d\mathbf{x}'_k(n) \quad (\text{A18})$$

表示给定条件 $Z_{1:k-1}$ 和 $|X'_k| = n$ 时 $(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m)$ 的联合概率密度. 将式 (A12) 带入式 (A18) 并对 $\mathbf{x}'_k(1), \dots, \mathbf{x}'_k(t-1), \mathbf{x}'_k(t+1), \dots, \mathbf{x}'_k(n)$ 积分后可得 $f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right)$ 如式 (22) 所示.

根据式 (A18) 可将式 (A17) 中的积分项重新写为

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k \left(X'_k, Z_k^m \middle| Z_{1:k-1} \right) \times \\ & \left\| \mathbf{x}'_k(t) - \hat{\mathbf{x}}_{k,l}^{(\tau^{\min}(t))} \left(Z_{1:k-1}, Z_k^m \right) \right\|_2^2 \times \\ & d\mathbf{x}'_k(1) \cdots d\mathbf{x}'_k(n) d\mathbf{z}_k(1) \cdots d\mathbf{z}_k(m) = \\ & \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right) \times \\ & \sum_{l=1}^{L+1} \left(\mathbf{x}'_{k,l}(t) - \hat{\mathbf{x}}_{k,l}^{(\tau^{\min}(t))} \left(Z_{1:k-1}, Z_k^m \right) \right)^2 \times \\ & d\mathbf{x}'_k(t) d\mathbf{z}_k(1) \cdots d\mathbf{z}_k(m) \quad (\text{A19}) \end{aligned}$$

对密度 $f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right)$ 应用信息不等式可得:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right) \times \\ & \left(\mathbf{x}'_{k,l}(t) - \hat{\mathbf{x}}_{k,l}^{(\tau^{\min}(t))} \left(Z_{1:k-1}, Z_k^m \right) \right)^2 d\mathbf{x}'_k(t) d\mathbf{z}_k(1) \times \\ & \cdots d\mathbf{z}_k(m) \geq [J_{k,t,\hat{n},n,m}^{-1}]_{l,l}, \quad l = 1, \dots, L+1 \quad (\text{A20}) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} [J_{k,t,\hat{n},n,m}]_{i,j} &= \frac{-1}{\omega_{k,t,\hat{n},n,m}^2} \int_{\mathcal{Z}_k^{\hat{n},m}} \int_{\mathcal{X}'_k^n} \\ & f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right) \times \\ & \frac{\partial^2 \log f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right)}{\partial x'_{k,i}(t) \partial x'_{k,j}(t)} \times \\ & d\mathbf{x}'_k(t) d\mathbf{z}_k(1) \cdots d\mathbf{z}_k(m) \quad (\text{A21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_k \left(\mathbf{x}'_k(t), Z_k^m \middle| Z_{1:k-1}, |X'_k| = n \right) \times \\ & d\mathbf{x}'_k(t) d\mathbf{z}_k(1) \cdots d\mathbf{z}_k(m) \quad (\text{A22}) \end{aligned}$$

由式 (A15)、(A18) 和式 (A22) 可容易看出:

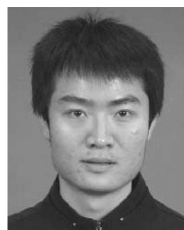
$$\omega_{k,t,\hat{n},n,m} = \omega_{k,\hat{n},n,m} \quad (\text{A23})$$

根据信息不等式, 当且仅当条件概率密度 $f_k \left(\mathbf{x}'_k(t) \middle| Z_{1:k-1}, Z_k^m, |X'_k| = n \right)$ 满足高斯分布时, 式 (A20) 取 “=” 号. 最终, 将式 (A20) 带入式 (A19) 并结合式 (A17) 即可得式 (17). $\square$

References

- 1 Mahler R P S. *Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*. Norwood, MA, USA: Artech House, 2007.
- 2 Waxman M J, Drummond O E. A bibliography of cluster (group) tracking. In: *Proceedings of the 2004 Signal and Data Processing of Small Targets*. Orlando, FL, USA: SPIE, 2004. 551–560
- 3 Nandakumaran N, Sinha A, Kirubarajan T. Joint detection and tracking of unresolved targets with monopulse radar. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, **44**(4): 1326–1341
- 4 Gorji A A, Tharmarasa R, Blair W D, Kirubarajan T. Multiple unresolved target localization and tracking using colocated MIMO radars. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, **48**(3): 2498–2517
- 5 Mahler R. PHD filters for nonstandard targets, II: unresolved targets. In: *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion, FUSION'09*. Seattle, Wash, USA: IEEE, 2009. 922–929
- 6 Lian F, Han C Z, Liu W F, Liu J, Sun J. Unified cardinalized probability hypothesis density filters for extended targets and unresolved targets. *Signal Processing*, 2012, **92**(7): 1729–1744
- 7 Zhang G H, Lian F, Han C Z. CBMeMber filters for nonstandard targets, II: Unresolved targets. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Information Fusion (FUSION)*. Salamanca, Spain: IEEE, 2014. 1–6
- 8 Tichavský P, Muravchik C H, Nehorai A. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(5): 1386–1396
- 9 Rezaeian M, Vo B N. Error bounds for joint detection and estimation of a single object with random finite set observation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(3): 1943–1506
- 10 Tong H S, Zhang H, Meng H D, Wang X Q. The recursive form of error bounds for RFS state and observation with P_d

- < 1. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, **61**(10): 2632–2646
- 11 Goodman I R, Mahler R P S, Nguyen H T. *Mathematics of Data Fusion*. Boston, USA: Kluwer Academic Publishers, 1997.
 - 12 Vo B T, Vo B N, Cantoni A. The cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(2): 409–423
 - 13 Ristic B, Vo B N, Clark D, Vo B T. A metric for performance evaluation of multi-target tracking algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, **59**(7): 3452–3457
 - 14 Poor H V. *An Introduction to Signal Detection and Estimation* (2nd Edition). New York, USA: Springer-Verlag, 1994.
 - 15 Granstrom K, Lundquist C, Orguner O. Extended target tracking using a Gaussian-mixture PHD filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, **48**(4): 3268–3286
 - 16 Zhang Y Q, Ji H B. A novel fast partitioning algorithm for extended target tracking using a Gaussian mixture PHD filter. *Signal Processing*, 2013, **93**(11): 2975–2985
 - 17 Mishra M, Gupta N. Monte Carlo integration technique in method of moments solution of integral equation. In: *Proceedings of the 2007 Applied Electromagnetics Conference*. Kolkata, India: IEEE, 2007. 1–4



连 峰 西安交通大学综合自动化研究所副教授. 主要研究方向为信息融合与目标跟踪. 本文通信作者.

E-mail: lianfeng1981@gmail.com

(**LIAN Feng** Associate professor at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University.

His research interest covers information fusion and target tracking. Corresponding author of this paper.)



吕 宁 西安交通大学综合自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为信息融合理论及应用.

E-mail: lvning1108@aliyun.com

(**LV Ning** Ph.D. candidate at the Institute of Integrated Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University.

His research interest covers theory and application of information fusion.)



韩崇昭 西安交通大学电子与信息工程学院自动化系教授. 主要研究方向为多源信息融合, 随机控制与自适应控制, 非线性频谱分析.

E-mail: czhan@mail.xjtu.edu.cn

(**HAN Chong-Zhao** Ph.D., professor in the Department of Automation, School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University.

His research interest covers multisource information fusion, stochastic control and adaptive control, and nonlinear spectral analysis.)