

非线性不确定系统准最优学习控制

严求真^{1,2} 孙明轩¹

摘 要 针对不确定非线性系统, 提出准最优学习控制方法, 解决参数与非参数不确定特性同时存在情形下的轨迹跟踪问题. 给出迭代学习与重复学习两种控制策略, 根据 Sontag 公式解决标称系统的优化控制, 并以鲁棒学习手段处理参数与非参数不确定特性. 提出断续函数连续化方案, 以避免传统 Sontag 公式在实现时可能存在的颤振问题. 分析证明经过足够多次迭代或足够多个周期的重复运行后, 闭环系统可实现系统状态以预设精度跟踪参考信号. 仿真结果表明所设计学习系统在收敛速度方面快于非优化设计.

关键词 准最优非线性控制, 学习控制, 参数化, 非参数不确定性

引用格式 严求真, 孙明轩. 非线性不确定系统准最优学习控制. 自动化学报, 2015, 41(9): 1659–1668

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140781

Suboptimal Learning Control for Nonlinear Systems with Both Parametric and Nonparametric Uncertainties

YAN Qiu-Zhen^{1,2} SUN Ming-Xuan¹

Abstract In this paper, two suboptimal learning control methods, an iterative one and a repetitive one, are proposed for a class of nonlinear systems with both time-varying parametric and nonparametric uncertainties. Sontag formula is used for the control design of a nominal system, while the robust learning mechanism is adopted to deal with both parametric and nonparametric uncertainties. A continuous controller design is carried out in order to avoid the chattering phenomenon that may arise due to the use of Sontag formula. It is shown that the closed-loop system state follows the desired trajectory with the pre-specified accuracy, as iteration or repetition increases. Numerical results demonstrate the effectiveness of the suboptimal learning control scheme.

Key words Suboptimal nonlinear control, learning control, parametrization, nonparametric uncertainties

Citation Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Suboptimal learning control for nonlinear systems with both parametric and nonparametric uncertainties. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(9): 1659–1668

采用学习控制方法, 闭环系统可实现输出信号对参考信号在整个作业区间上的完全跟踪. 这种控制方法问世至今已三十年, 这种整个作业区间上的零误差跟踪性能越来越引起人们的关注^[1]. 目前, 基于 Lyapunov 方法设计学习控制器已经成为学习控制领域的研究热点^[2–3], 主要结果集中于参数化方法, 通过设计微分/差分学习律估计固定/时变未知参数, 设计控制器实现跟踪任务. 这些工作要求被

估计参数不随迭代次数变化. 近年来的相关研究结果考虑非线性参数不确定性^[4] 及与迭代次数相关的参数不确定性^[5] 等复杂情形. 常规要求期望轨迹是单一不变的固定轨迹^[6], 采用参数化方法时, 也可放宽为关于迭代次数的非一致轨迹^[7]. 与参数化方法相比, 非参数不确定性的假设要求更低, 适用范围更广, 但到目前为止, 非参数不确定系统学习控制方面的相关结果较少. 早期的文献主要根据界函数设计控制量^[8]. 近期的文献结合鲁棒方法和学习方法处理该类不确定性^[9–11].

为了改善学习控制系统的跟踪性能, 可采用最优学习控制方法. 常规方法需求解关于性能函数的哈密尔顿-雅可比-贝尔曼方程^[12], 但由于求解方程困难, 实际设计中人们常常追求次优设计. 文献 [13] 针对 MIMO 线性时变参数不确定系统, 提出一种准最优学习控制方法, 该方法根据 Sontag 公式^[14–15] 给出对应标称系统的准最优控制, 并利用迭代学习方法估计时变参数不确定性.

初值问题是迭代学习控制的基本问题之

收稿日期 2014-11-13 录用日期 2015-03-03
Manuscript received November 13, 2014; accepted March 3, 2015

国家自然科学基金 (60874041, 61174034, 61374103), 浙江省高等学校访问学者专业发展项目 (FX2013206) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60874041, 61174034, 61374103) and University Visiting Scholars Developing Project of Zhejiang Province (FX2013206)

本文责任编辑 王聪

Recommended by Associate Editor WANG Cong

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江水利水电学院信息工程学院 杭州 310018

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018

—[16–18]. 当前, 多数学习算法要求系统初态等于参考信号的初值, 但由于实际重复精度的限制, 初始定位误差总是存在的. 研究适用于任意初值情形的学习算法, 有利于扩大这种控制技术中的应用范围. 目前相关的工作有时变边界层、参考信号初始修正和误差跟踪方法等. 在参考信号光滑闭合场合, 可以选用重复学习方法设计控制系统^[2, 19]. 该方法在实施时不需进行复位操作, 而以上一运行周期的状态终值作为下一运行周期的状态初值. 文献 [9, 20] 称该类控制方法为满足对齐条件 (Alignment condition) 的迭代学习控制. 本文统称这类控制方法为重复学习控制. 重复控制系统常以未知时变参数的变化周期作为重复作业周期, 而设计重复学习控制系统时, 重复作业周期与参数变化周期可以不等, 只需参数不确定性在各重复作业周期中呈现相同特性即可, 故重复学习控制方法的适用范围大于重复控制. 近年来的研究课题还有基于马氏决策过程模型的动态系统学习控制^[21]、非最小相位系统自适应学习控制^[22] 等.

本文针对参数/非参数不确定非线性系统, 提出准最优迭代学习控制和重复学习控制方法. 根据 Sontag 公式给出标称系统的优化控制, 并采用鲁棒学习策略处理非参数不确定性. 利用光滑过渡函数对传统 Sontag 公式进行连续化处理, 克服根据传统 Sontag 公式设计控制器时可能出现的颤振现象. 经过足够多次迭代运行或足够多个周期的重复学习后, 可以实现系统状态以预设精度跟踪参考信号. 采用本文方法设计控制器, 闭环系统的误差收敛速度快于非优化方法设计的学习控制器. 文中给出了在系统误差初值非零情形下, 系统误差变量与滤波误差之间的不等式关系, 利用这一关系, 本文给出基于滤波误差反馈的重复学习控制设计方案, 有别于同类文献中介绍的设计方法.

1 问题的提出与准备

考虑有限时间区间 $[0, T]$ 上运行的不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)[u_k + \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k, t) + \Delta(\mathbf{x}_k, t)] \end{cases} \quad (1)$$

式中, 重复作业次数 $k = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k}]^T \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $u_k \in \mathbf{R}$ 为控制输入, 参考信号为 $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$, $x_d^{(n)}$ 存在; $\Delta(\cdot, \cdot)$ 为满足假设 1 的非参数不确定性, $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为未知时变参数向量, $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \cdot) \in \mathbf{R}^m$ 为已知的非线性连续函数向量. $f(\mathbf{x}_k, t)$ 、 $g(\mathbf{x}_k, t) \in C^1[0, T]$ 已

知, 且 $g(\mathbf{x}_k, t) > 0$, 与系统 (1) 对应的标称系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k} = x_{i+1,k}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) + g(\mathbf{x}_k, t)u_k \end{cases} \quad (2)$$

记 $e_{0,k} = \int_0^t (x_{1,k}(\tau) - x_d(\tau))d\tau$, $\mathbf{e}_k = [e_{1,k}, \dots, e_{n,k}]^T = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_d$, $\bar{\mathbf{e}}_k = [e_{0,k}, e_{1,k}, \dots, e_{n,k}]^T$, $\mathbf{e}_k = [e_{0,k}, e_{1,k}, \dots, e_{n-1,k}]^T$.

根据式 (1) 可得误差状态方程

$$\begin{cases} \dot{e}_{i,k} = e_{i+1,k}, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_{n,k} = f(\mathbf{x}_k, t) - x_d^{(n)} + g(\mathbf{x}_k, t)[u_k + \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_k, t) + \Delta(\mathbf{x}_k, t)] \end{cases} \quad (3)$$

本文的控制任务是, 选择合适的控制 Lyapunov 函数, 并根据 Sontag 公式为不确定系统 (1) 设计准最优学习控制器 u_k , 实现 $\mathbf{x}_k$ 在作业区间 $[0, T]$ 上以预设精度跟踪 $\mathbf{x}_d$.

因设计控制器需要, 对系统 (1) 做如下不失一般性之假设:

假设 1. 非参数不确定特性 $\Delta(\cdot, \cdot)$ 满足

$$|\Delta(\boldsymbol{\xi}_1, t) - \Delta(\boldsymbol{\xi}_2, t)| \leq \alpha(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, t)\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|, \forall \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbf{R}^n, \forall \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbf{R}^n \quad (4)$$

其中, $\alpha(\cdot, \cdot, \cdot)$ 为非负连续函数.

定义滤波误差

$$s_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_{i,k} + e_{n,k} \quad (5)$$

其中, 参数 $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ 使得特征方程 $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$ 的所有特征根均具有负实部. 存在对称正定矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足 $PA + A^T P = -Q$, 式中,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

引理 1. s_k 与 $\bar{\mathbf{e}}_k$ 之间满足

$$\int_0^t \|\bar{\mathbf{e}}_k\| |s_k| d\tau \leq (1 + t\|A_0\|e^{\|A_0\|t}) \left[\int_0^t s_k^2 d\tau + \|\bar{\mathbf{e}}_k(0) - \mathbf{b}s_k(0)\| \int_0^t |s_k(\tau)| d\tau \right] \quad (6)$$

其中, $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

证明. 由 s_k 的定义可见

$$\dot{e}_{n,k} = -c_0 e_{1,k} - c_1 e_{2,k} - \cdots - c_{n-1} e_{n,k} + \dot{s}_k$$

于是,

$$\dot{\bar{e}}_k = A_0 \bar{e}_k + b \dot{s}_k \quad (8)$$

式 (8) 在 $[0, t]$ 上的定积分为

$$\bar{e}_k(t) - \bar{e}_k(0) = \int_0^t A_0 \bar{e}_k(\tau) d\tau + b s_k(t) - b s_k(0)$$

对上式两边同取范数, 有

$$\|\bar{e}_k(t)\| \leq \int_0^t \|A_0\| \|\bar{e}_k(\tau)\| d\tau + |s_k(t)| + \|\bar{e}_k(0) - b s_k(0)\| \quad (9)$$

根据 Bellman-Gronwall 引理, 有

$$\|\bar{e}_k(t)\| |s_k| \leq s_k^2 + |s_k| \|A_0\| e^{\|A_0\|t} \int_0^t |s_k(\tau)| d\tau + |s_k| (1 + \|A_0\| e^{\|A_0\|t}) \|\bar{e}_k(0) - b s_k(0)\| \quad (10)$$

对式 (10) 的两边取定积分, 并利用柯西-许瓦茨不等式, 即可得到式 (6). $\square$

为表达简便, 在不引起混淆之处, 文中略去函数的时间自变量 t , 并简记 $\alpha(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_d, t)$ 为 α_k , $\Delta(\mathbf{x}_d, t)$ 为 Δ_d , $v(\mathbf{x}_k, t)$ 为 v_k , $v \in \{f, g, \Delta, \varphi\}$.

注 1. 引理 1 描述的是在误差初值任意情形下, $\bar{e}_k$ 与滤波误差 s_k 之间关系.

2 准最优迭代学习控制器设计与性能分析

本节考虑系统 (1) 满足假设 2 情形时的学习控制算法.

假设 2. 对于第 k ($0, 1, 2, \dots$) 次迭代, 系统状态初始值 $\mathbf{x}_k(0)$ 与参考信号的初始值 $\mathbf{x}_d(0)$ 相等, 即

$$\mathbf{e}_k(0) = 0, \quad \forall k \quad (11)$$

2.1 控制器设计

为避免求解哈密顿-雅克比-贝尔曼方程, 此处拟根据 Sontag 公式设计学习控制器. 为标称系

统 (2) 选择控制 Lyapunov 函数^[23-24] $V_k = \frac{1}{2} s_k^2 + \bar{\mathbf{e}}_k^T P \bar{\mathbf{e}}_k$, 需满足: 当 $\bar{\mathbf{e}}_k \neq 0$ 时,

$$b_k = 0 \Rightarrow a_k < 0 \quad (12)$$

其中,

$$b_k = \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g^T, a_k = \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_e^T \quad (13)$$

此处, $\boldsymbol{\beta}_g = [0, \dots, 0, g_k]^T$, $\boldsymbol{\beta}_e = [e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k}, f_k - x_d^{(n)}]^T$.

求 V_k 关于时间的导数, 可得

$$\dot{V}_k = \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_e^T + \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g^T (u_k + \Delta_k + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_k) = a_k + b_k (u_k + \Delta_k + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_k) \quad (14)$$

据此, 设计控制器

$$u_k = u_{ok} - u_{ik} + u_{rk} - \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \quad (15)$$

式中

$$u_{rk} = -\frac{g_{\alpha m}}{g_k} (1 + T \|A_0\| e^{\|A_0\|T}) s_k \quad (16)$$

$$u_{ik} = \text{sat}(\hat{u}_{ik})$$

$$\hat{u}_{ik} = \text{sat}(\hat{u}_{ik-1}) + \gamma_1 s_k g_k, \hat{u}_{i-1} = 0 \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k = \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + \gamma_2 s_k g_k \boldsymbol{\varphi}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$u_{ok} = -(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{b_k^2 + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})}) b_k \quad (19)$$

此处, $\mu > 0, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, g_{\alpha m} := \max_{\tau \in [0, t]} (g_k \alpha_k)$, ϵ_1

为一小正数, $s_{ak} := |s_k|$, $\epsilon(s_{ak})$ 的定义为: 对于某正常数 ϵ_2 , 当 $s_{ak} \leq \epsilon_2$ 时,

$$\epsilon(s_{ak}) = \frac{10(\epsilon_2 - s_{ak})^3}{\epsilon_2^3} - \frac{15(\epsilon_2 - s_{ak})^4}{\epsilon_2^4} + \frac{6(\epsilon_2 - s_{ak})^5}{\epsilon_2^5}$$

当 $s_{ak} > \epsilon_2$ 时, $\epsilon(s_{ak}) = 0$. 式 (17) 中, $\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数, 其定义为: 对于 $\vartheta \in \mathbf{R}$,

$$\text{sat}(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & |\vartheta| < \bar{\vartheta} \\ \bar{\vartheta} \text{sgn}(\vartheta), & \text{其他} \end{cases}$$

$\bar{\vartheta}$ 为合适的限幅值. 对于 $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbf{R}^m$, $\text{sat}(\boldsymbol{\vartheta})$ 表示对 $\boldsymbol{\vartheta}$ 中的各元素进行限幅.

注 2. 上文中的 $\epsilon(s_{ak})$ 具有光滑过渡性质: 在 $s_{ak} = \epsilon_2$ 处, $\epsilon(s_{ak}) = 0$ 且 $\frac{d\epsilon(s_{ak})}{ds_{ak}} = 0$.

2.2 收敛性分析

将控制量 (15) 应用于系统 (1) 后, 闭环系统具有如下收敛性和稳定性方面的结果:

定理 1. 对满足假设 1、2 的系统 (1) 施加控制律 (15) 后, 经过足够多次迭代运行后, 可实现 $\mathbf{x}_k$ 在 $[0, T]$ 上以任意预设精度跟踪 $\mathbf{x}_d$, 并保证闭环系统所有信号有界.

证明.

1) 检验 V_k 是否满足控制 Lyapunov 函数条件容易看出,

$$b_k = \frac{\partial(\frac{1}{2}s_k^2 + \mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g^T = g_k s_k \quad (20)$$

因为 $g_k > 0$, 故当 $b_k = 0$ 时, $s_k = 0$, 此时,

$$a_k = \frac{\partial(\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_e = \frac{\partial(\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)}{\partial \mathbf{e}_k^T} \dot{\mathbf{e}}_k = \frac{d(\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)}{dt}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k = [e_{1,k}, \dots, e_{n-1,k}, -\sum_{i=1}^{n-1} c_i e_{i,k}]^T = A \mathbf{e}_k$$

结合上述两式可知, 当 $\mathbf{e}_k \neq 0$ 且 $b_k = 0$ 时,

$$a_k = \frac{d(\mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k)}{dt} = \mathbf{e}_k^T (A^T P + P A) \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k^T Q \mathbf{e}_k$$

这就是说, 所选取的 $V_k = \frac{1}{2}s_k^2 + \mathbf{e}_k^T P \mathbf{e}_k$ 满足式 (12) 的要求.

2) 收敛性分析

选择 Lyapunov 泛函

$$L_k = V_k + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{u}_{ik}^2 d\tau + \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k d\tau \quad (21)$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k$, $\tilde{u}_{ik} = u_{ik} - \Delta_d$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$.

当 $|s_k| > \epsilon_2$ 时, $\epsilon_1 \epsilon(s_{ak}) = 0$,

$$V_k = \int_0^t \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_e^T d\tau +$$

$$\int_0^t \frac{\partial V_k}{\partial \bar{\mathbf{e}}_k^T} \boldsymbol{\beta}_g^T (u_k + \Delta_k + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau =$$

$$\int_0^t a_k + b_k (u_k + \Delta_k + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau =$$

$$- \int_0^t \mu b_k^2 d\tau - \int_0^t \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau +$$

$$\int_0^t b_k (u_{rk} - u_{ik} + \Delta_k + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau \quad (22)$$

当 $k > 0$ 时, 有

$$L_k - L_{k-1} =$$

$$V_k - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{ik}^2 - \tilde{u}_{ik-1}^2) d\tau +$$

$$\frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau \leq$$

$$\int_0^t b_k (u_{rk} - u_{ik} + \Delta_k + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau - V_{k-1} +$$

$$\frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{ik}^2 - \tilde{u}_{ik-1}^2) d\tau - \int_0^t \mu b_k^2 d\tau +$$

$$\frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau -$$

$$\int_0^t \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau \quad (23)$$

根据假设 1,

$$\int_0^t b_k \Delta_k d\tau =$$

$$\int_0^t b_k (\Delta_k - \Delta_d + \Delta_d) d\tau \leq$$

$$\int_0^t g_k |s_k| \alpha_k \|\bar{\mathbf{e}}_k\| d\tau + \int_0^t g_k s_k \Delta_d d\tau \quad (24)$$

当系统满足假设 2 时, 由引理 1 可得 $\int_0^t \|\bar{\mathbf{e}}_k(t)\| |s_k| d\tau \leq (1 + t \|A_0\| e^{\|A_0\|t}) \int_0^t s_k^2 d\tau$. 结合式 (16) 可以推出

$$\int_0^t g_k |s_k| \alpha_k \|\bar{\mathbf{e}}_k\| d\tau + \int_0^t b_k u_{rk} d\tau \leq 0 \quad (25)$$

将式 (24) 与式 (25) 的结果应用于式 (23),

$$L_k - L_{k-1} \leq$$

$$- \int_0^t \mu b_k^2 d\tau + \int_0^t b_k (\Delta_d - u_{ik} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau - V_{k-1} -$$

$$\int_0^t \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{ik}^2 - \tilde{u}_{ik-1}^2) d\tau +$$

$$\frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau \quad (26)$$

根据式 (18) 可得,

$$\frac{1}{2\gamma_2} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + g_k s_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k =$$

$$- \frac{1}{\gamma_2} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_k)^T (\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}) - \frac{1}{2\gamma_2} (\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1})^T \times$$

$$(\boldsymbol{\theta}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}) + g_k s_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \leq$$

$$\frac{1}{\gamma_2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T (\boldsymbol{\theta}_{k-1} - \boldsymbol{\theta}_k + \gamma_2 g_k s_k \boldsymbol{\varphi}_k) =$$

$$\frac{1}{\gamma_2} (\boldsymbol{\theta} - \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k))^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)) \leq 0 \quad (27)$$

类似地, 根据式 (17) 可以推出,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma_1}(u_{ik}^2 - u_{ik-1}^2) + g_k s_k (\Delta_d - u_{ik}) &\leq \\ \frac{1}{\gamma_1}(\Delta_d - u_{ik})(u_{ik-1} - u_{ik} + \gamma_1 g_k s_k) &= \\ \frac{1}{\gamma_1}(\Delta_d - \text{sat}(\hat{u}_{ik}))(\hat{u}_{ik} - \text{sat}(\hat{u}_{ik})) &\leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

将式 (27) 与式 (28) 代入式 (26),

$$L_k - L_{k-1} \leq - \int_0^t (\sqrt{a_k^2 + b_k^4} + \mu g_k^2 s_k^2) d\tau - V_{k-1}$$

取上式中的 $k = 0, 1, 2, \dots, N$, 并求和, 有

$$\begin{aligned} L_N &\leq L_0 - \sum_{i=1}^N \int_0^t \mu g_i^2 s_i^2 d\tau - \sum_{i=1}^N V_{i-1} - \\ &\sum_{i=1}^N \int_0^t \sqrt{a_i^2 + b_i^4} d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

至此可知, 经过足够多次迭代后, 将有

$$|s_k| \leq \epsilon_2 \quad (30)$$

成立. 这是因为, 若经过 $N = \frac{2L_0}{\epsilon_2^2}$ 次迭代后, 仍有 $|s_k| > \epsilon_2$, 则 $L_N < L_0 - \frac{1}{2}\epsilon_2^2 \frac{2L_0}{\epsilon_2^2} = 0$. 这与 Lyapunov 函数的非负性相矛盾. 由式 (10) 与式 (30) 知,

$$\|\bar{e}_k\| \leq (1 + te^{t\|A_0\|})\epsilon_2 \quad (31)$$

故可选择合适的 ϵ_2 , 使得 $\mathbf{x}_k$ 在足够多次迭代后, 以预设精度跟踪 $\mathbf{x}_d$. 由式 (29) 可得 $\mathbf{e}_k$ 及 s_k 的有界性, 根据饱和函数的性质知 u_{ik} 有界. 至此, 易知系统中的其他信号也是有界的. $\square$

学习律 (17) 中采用饱和函数对学习量进行完全限幅, 是为了确保在各次迭代学习过程中闭环系统信号有界, 此外也可采用部分限幅措施设计学习律.

注 3. 根据传统 Sontag 公式设计的控制量

$$u_{ok} = \begin{cases} -(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{b_k^2})b_k, & b_k \neq 0 \\ -\mu b_k, & b_k = 0 \end{cases} \quad (32)$$

在 $\mathbf{e}_k \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上是光滑的, 但 u_{ok} 在 $b_k = 0$ 处可能不连续, 故在实施时可能发生颤振现象.

注 4. 文中算法利用 $e_{1,k}$ 的积分项 $e_{0,k}$ 将系统阶数从 n 阶扩展到 $n+1$ 阶, 由于采用该积分项设计控制器, 可提高控制精度.

3 准最优重复学习控制

上文介绍的准最优迭代学习控制方法要求系统在每次迭代开始前进行精确复位操作, 以达到假设 2

的零初始误差要求. 本节考虑参考信号满足假设 3 情形的学习控制算法. 此时, 在每周运行开始前, 不进行重复定位, 而以上一周运行完成时刻的状态值作为本周运行的初值, 即

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k-1}(T), \quad k = 1, 2, \dots \quad (33)$$

假设 3. 系统在进行重复运行时, 其参考信号 $\mathbf{x}_d$ 光滑, 且 $\mathbf{x}_d(T) = \mathbf{x}_d(0)$.

定理 2. 选择与定理 1 相同的 V_k , 在第 k 个重复学习周期中, 对满足假设 1、3 的系统 (1) 施加控制律

$$u_k = u_{ok} - u_{ik} + u_{rk} - \boldsymbol{\theta}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k \quad (34)$$

其中,

$$\begin{aligned} u_{rk} &= -\frac{g_{\alpha m}}{g_k}(1 + T\|A_0\|e^{\|A_0\|T})s_k \times \\ &\left[1 + \frac{\|\bar{\mathbf{e}}_k(0) - \mathbf{b}s_k(0)\|}{|s_k| + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})}\right] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \text{sat}(\hat{u}_{ik}) \\ \hat{u}_{ik} &= \text{sat}(\hat{u}_{ik-1}) + \gamma_1 s_k g_k, \hat{u}_{i-1} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$u_{ok} = -(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{b_k^2 + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})})b_k \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_k &= \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k &= \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) + \gamma_2 s_k g_k \boldsymbol{\varphi}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (38)$$

并根据式 (33) 所描述的方式确定各周期的系统状态初值, $\mathbf{x}_0(0)$ 为任意有界值, 经过足够多周期的重复学习后, 可实现 $\mathbf{x}_k$ 在 $[0, T]$ 上以任意预设精度跟踪 $\mathbf{x}_d$, 并保证闭环系统所有信号有界. 式中, $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, a_k$ 与 b_k 的定义参见式 (13).

证明. 选择与式 (21) 相同形式的 Lyapunov 泛函, 其中的符号的含义与上节中的同名符号类似. 当 $|s_k| > \epsilon_2, k > 0$ 时, 采用类似于式 (22) 和式 (23) 中的处理方式, 有

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} &\leq \\ &- \int_0^t \mu b_k^2 d\tau + \int_0^t b_k (u_{rk} - u_{ik} + \Delta_k + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau + \\ &V_k(0) - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{ik}^2 - \tilde{u}_{ik-1}^2) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau - \int_0^t \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau \end{aligned}$$

根据假设 1, 类似于式 (24),

$$\int_0^t b_k \Delta_k d\tau \leq \int_0^t g_k |s_k| \alpha_k \|\bar{\mathbf{e}}_k\| d\tau + \int_0^t g_k s_k \Delta_d d\tau$$

当 $|s_k| > \epsilon_2$ 时, $s_k \frac{s_k}{|s_k| + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})} = |s_k|$, 于是结合引理 1 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^t g_k \alpha_k \|\bar{\mathbf{e}}_k(t)\| |s_k| d\tau - \int_0^t b_k u_{rk} d\tau = \\ & \int_0^t g_k \alpha_k \|\bar{\mathbf{e}}_k(t)\| |s_k| d\tau - g_{\alpha m} (1 + T \|A_0\| e^{\|A_0\|T}) \times \\ & \left[\int_0^t s_k^2 d\tau + \|\bar{\mathbf{e}}_k(0) - \mathbf{b} s_k(0)\| \times \right. \\ & \left. \int_0^t \frac{s_k^2}{|s_k| + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})} d\tau \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (39)$$

综合上述三式, 可知当 $|s_k| > \epsilon_2$ 时,

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} \leq & - \int_0^t \mu b_k^2 d\tau + \int_0^t g_k s_k (-u_{ik} + \Delta_d + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k \boldsymbol{\varphi}_k) d\tau + \\ & V_k(0) - V_{k-1} + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t (\tilde{u}_{ik}^2 - \tilde{u}_{ik-1}^2) d\tau + \\ & \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}) d\tau \end{aligned} \quad (40)$$

类似于上节中对式 (26)~(28) 的处理方法, 可以推出

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} \leq & V_k(0) - \int_0^t \mu g_k^2 s_k^2 d\tau - V_{k-1} - \\ & \int_0^t \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

利用关系 (33), 可知不等式 $L_k(T) - L_{k-1}(T) \leq - \int_0^T \mu g_k^2 s_k^2 d\tau - \int_0^T \sqrt{a_k^2 + b_k^4} d\tau$ 成立, 于是可以推出 $L_0(T) \geq L_1(T) \geq \dots \geq L_k(T)$ 以及

$$\begin{aligned} L_k(T) \leq & L_0(T) - \sum_{i=1}^k \int_0^T \mu g_i^2 s_i^2 d\tau - \\ & \sum_{i=1}^k \int_0^T \sqrt{a_i^2 + b_i^4} d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

由式 (41) 知,

$$\begin{aligned} L_k(t) \leq & V_k(0) + \frac{1}{2\gamma_1} \int_0^t \tilde{u}_{ik-1}^2 d\tau + \\ & \frac{1}{2\gamma_2} \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} d\tau - \int_0^t \mu g_k^2 s_k^2 d\tau \leq \\ & L_{k-1}(T) - \int_0^t \mu g_k^2 s_k^2 d\tau \leq \\ & L_0(T) - \int_0^t \mu g_k^2 s_k^2 d\tau \end{aligned} \quad (43)$$

于是可知 $\mathbf{e}_k$ 在 $[0, T]$ 上一致有界. 进而从式 (3) 可以看出 $\dot{\mathbf{e}}_k$ 是有界的, 于是可知 $s_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上连续.

假设经过足够多周期运行后, 在任意一个时刻 $t_\epsilon \in (0, T)$ 的 $s_k(t_\epsilon) > \epsilon_2$, 由 s_k 的连续性可知, 必存在 $t_\delta > 0$, 满足 $s_k(t) > \epsilon_2, \forall t \in [t_\epsilon - \frac{t_\delta}{2}, t_\epsilon + \frac{t_\delta}{2}]$. 由式 (42) 知

$$L_k(T) < L_0(T) - \mu k \epsilon_2^2 t_\delta g^2 \quad (44)$$

当 $k > \frac{L_0(T)}{\mu \epsilon_2^2 t_\delta g^2}$, $L_k(T) < 0$. 这与 Lyapunov 泛函的非负性相矛盾. 因此当 $k > \frac{L_0(T)}{\mu \epsilon_2^2 t_\delta g^2}$,

$$|s_k(t)| \leq \epsilon_2, \quad t \in (0, T) \quad (45)$$

此处 g 表示 g_k 的下界. 类似地, 可以证明经过足够多周期运行后, 式 $|s_k(t)| \leq \epsilon_2$ 在端点 $t = T$ 时也成立. $\square$

本节给出的准最优重复学习控制算法, 无需满足许多常规迭代学习控制算法中所要求的零初始误差这一假设性前提条件. 在实施时, 系统连续运行, 不需进行停顿复位.

4 仿真算例

例 1. 考虑在 $[0, T]$ 上重复运行的混沌系统^[9]

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = f_k + g_k(u_k + \Delta_k + \boldsymbol{\theta}^T(t) \boldsymbol{\varphi}_k) \end{cases} \quad (46)$$

式中, $f_k = -x_{1,k}^3$, $g_k = 1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2$, $\Delta_k = -0.1x_{2,k}/(1 + 0.01x_{1,k}^2 + 0.005x_{2,k}^2)$, $\boldsymbol{\theta}(t) = [\cos(16\pi t), \cos(8\pi t)]^T$, $\boldsymbol{\varphi}_k = [\frac{\sin(x_{1,k})}{1+0.01x_{1,k}^2+0.005x_{2,k}^2}, \frac{\sin(x_{2,k})}{1+0.01x_{1,k}^2+0.005x_{2,k}^2}]^T$. Δ_k 与 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 分别为非参数不确定性与参数不确定性. 控制的目的是设计 u_k , 使得闭环系统经过足够多周期运行后, 系统状态 $[x_{1,k}, x_{2,k}]^T$ 能够在 $[0, T]$ 上完全跟踪参考信号 $\mathbf{x}_d = [x_{1d}, x_{2d}]^T = [\cos \pi t, \pi \sin(\pi t)]^T$. 不难看出 $\mathbf{x}_d$ 满足假设 3.

情形 1.1. 采用控制律 (34) 进行仿真, 仿真中取 $T = 2$, $[x_{1,0}(0), x_{2,0}(0)]^T = [1.2, 0]^T$, $\mu = 5$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\epsilon_1 = 0.0000001$, $\epsilon_2 = 0.001$, $s_k = \int_0^t e_{1,k} d\tau + 2e_{1,k} + e_{2,k}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $e_{1,k} = x_{1,k} - x_{1d}$, $e_{2,k} = x_{2,k} - x_{2d}$, $\alpha_k = 0.1([1 + |x_{1,k}| + |x_{1d}| + 0.01(x_{1d}^2 + x_{1,k}^2) + 0.005(x_{2d}^2 + x_{2,k}^2)]^2 + [0.02(|x_{1d}| + |x_{1,k}|)(|x_{2d}| + |x_{2,k}|)]^2)^{\frac{1}{2}}$. 可以检验 α_k 的取值满足假设 1. $\bar{u}_{ik} = 50$, $\boldsymbol{\theta} = [20, 20]^T$. 运行 50 周期后的结果如图 1~5 所示. 系统在第 50

周期运行期间的状态信息 x_1 和 x_2 分别如图 1 和图 2 所示. 可以看出, $\mathbf{x}_k$ 在整个作业区间精确跟踪 $\mathbf{x}_d$. 在第 50 周期运行期间的误差信息见图 3 和图 4. 控制量在第 50 周期运行期间的取值情况见图 5. J_k 随重复次数的变化情况见图 6 中的曲线 rlc1, $J_k := \int_0^T \|\mathbf{e}_k(\tau)\|^2 d\tau$, $\mathbf{e}_k = [e_{1,k}, e_{2,k}]^T$.

情形 1.2. 采用非优化学习控制方法为系统 (46) 设计重复学习控制律

$$u_k = u_{fk} - u_{ik} + u_{rk} - \theta_k^T \varphi_k \quad (47)$$

式中,

$$\begin{aligned} u_{fk} &= -\frac{f_k - \ddot{x}_d}{g_k} \\ u_{rk} &= -\frac{g_{\alpha m}}{g_k} (1 + T \|A_0\| e^{\|A_0\| T}) [s_k + \|\bar{\mathbf{e}}_k(0) - b s_k(0) \|\operatorname{sgn}(s_k)] \end{aligned} \quad (48)$$

并选用与情形 1.1 相同形式的 u_{ik} 和 θ_k , 仿真参数的选取情况同情情形 1.1. 图 6 中曲线 rlc3 为采用控制律 (47) 进行仿真时的 J_k 随重复次数的变化情况.

情形 1.3. 根据传统 Sontag 公式为系统 (46) 设计准最优重复学习控制律

$$u_k = u_{ok} - u_{ik} + u_{rk} - \theta_k^T \varphi_k \quad (49)$$

式中, u_{ok} 的取值见式 (32), u_{rk} 的取值同式 (48),

$$\begin{aligned} \theta_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_k) \\ \hat{\theta}_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_{k-1}) + \gamma_2 s_k g_k \varphi_k, \quad \hat{\theta}_{-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

仿真参数取值同前. J_k 随重复次数的变化情况见图 6 中曲线 rlc2. 第 50 周期运行期间的控制量情况见图 7. 可以看出, 存在比较严重的颤振现象.

例 2. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,k} = x_{2,k} \\ \dot{x}_{2,k} = f_k + g_k(u_k + \theta^T(t) \varphi_k) \end{cases} \quad (50)$$

式中, 各符号的含义同例 1. 参考信号 $\mathbf{x}_d = [x_{1d}, x_{2d}]^T = [12t^2(1-t), 24t(1-t) - 12t^2]^T$.

情形 2.1. 采用文献 [13] 提出的方法设计控制器, 选择控制律

$$u_k = u_{ok} - \theta_k^T \varphi_k \quad (51)$$

进行仿真, 式中, u_{ok} 的取值见式 (32),

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \gamma_2 b_k \varphi_k, \quad \theta_{-1} = \mathbf{0}$$

此处, $\underline{a}_k = \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{e}_k^T}(e_{1,k}, f_k - \dot{x}_d)^T$, $\underline{b}_k = \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{e}_k^T}(0, g_k)^T$. 选取的控制 Lyapunov 函数为

$$V_k = \frac{1}{2}(e_{1,k} + e_{2,k})^2 + \frac{1}{2}e_{1,k}^2 \quad (52)$$

初值条件为 $x_{1,k}(0) = x_{1d}(0)$, $x_{2,k}(0) = x_{2d}(0)$. 仿真中, 取 $T = 1, \mu = 5, \gamma_2 = 2$. 迭代 50 次后, J_k 随迭代变化情况见图 8 中曲线 ilc1. 第 50 次迭代期间的控制量大小见图 9, 可以看出, 存在比较严重的颤振现象.

情形 2.2. 采用本文提出的连续化方法对文献 [13] 给出的算法进行改进, 即选择控制律

$$u_k = u_{ok} - \theta_k^T \varphi_k \quad (53)$$

进行仿真, 其中,

$$\begin{aligned} u_{ok} &= -(\mu + \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + b_k^4}}{b_k^2 + \epsilon_1 \epsilon(s_{ak})}) b_k \\ \theta_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_k) \\ \hat{\theta}_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_{k-1}) + \gamma_2 b_k \varphi_k, \quad \hat{\theta}_{-1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (54)$$

仿真中, 取 $T = 1, \mu = 5, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 2, \epsilon_1 = 0.001, \epsilon_2 = 0.006, \hat{\theta} = [20, 20]^T$, 初值条件同情情形 2.1. 迭代 50 次后, J_k 随迭代变化情况见图 8 中曲线 ilc2, 第 50 次迭代期间的控制量大小见图 10.

情形 2.3. 考虑对系统 (50) 实施非优化学习控制算法, 选择控制律

$$u_k = -\frac{f_k - \ddot{x}_d}{g_k} - \theta_k^T \varphi_k$$

进行仿真, 其中,

$$\begin{aligned} \theta_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_k) \\ \hat{\theta}_k &= \operatorname{sat}(\hat{\theta}_{k-1}) + \gamma_2 s_k \varphi_k, \quad \hat{\theta}_{-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

仿真参数及初值条件同情情形 2.2. 迭代 50 次后, J_k 随迭代变化情况见图 8 中曲线 ilc3.

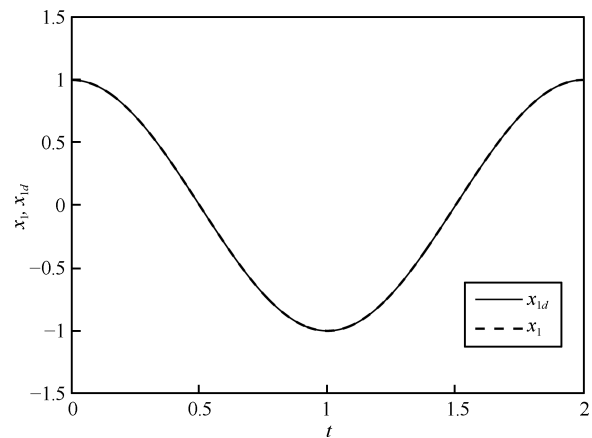


图 1 x_1 及其期望轨迹 x_{1d} : 情形 1.1

Fig. 1 x_1 and its desired trajectory x_{1d} : Case 1.1

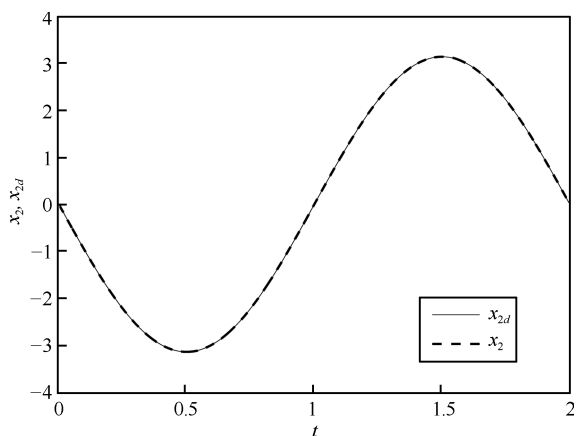
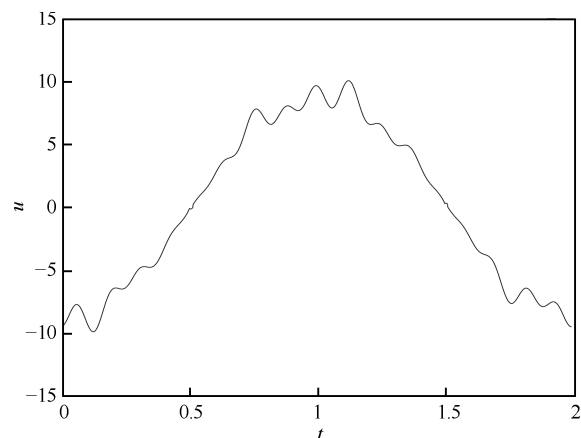
图 2 x_2 及其期望轨迹 x_{2d} : 情形 1.1Fig. 2 x_2 and its desired trajectory x_{2d} : Case 1.1

图 5 控制输入: 情形 1.1

Fig. 5 Control input: Case 1.1

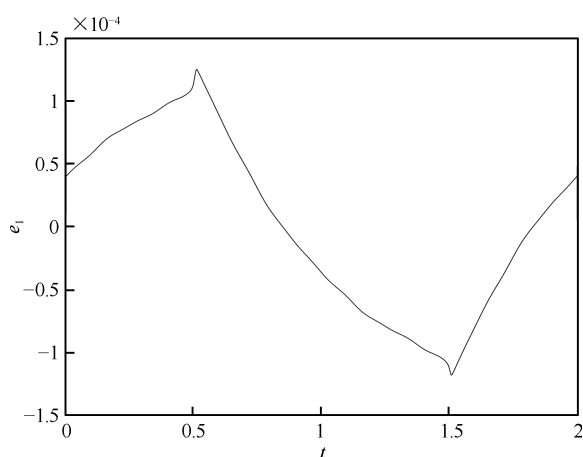
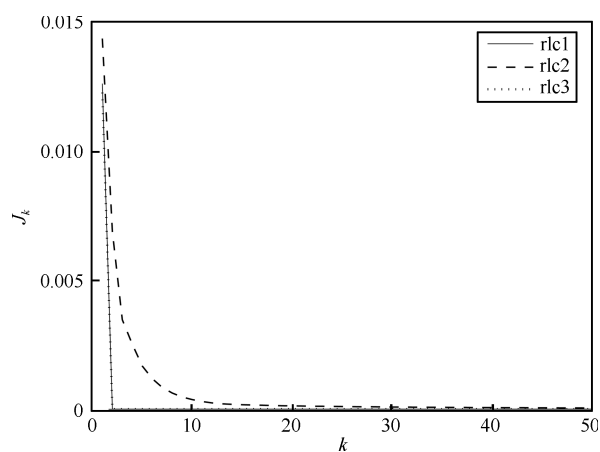
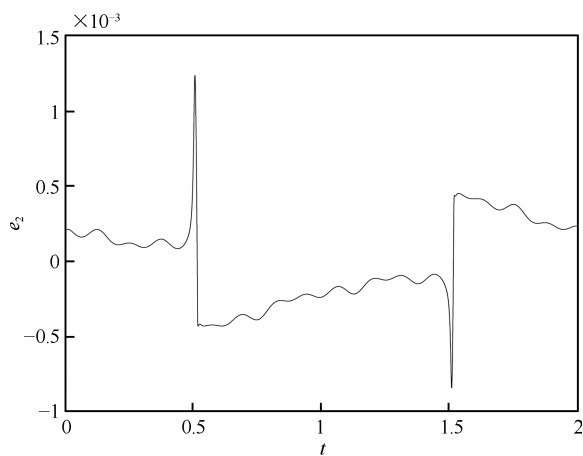
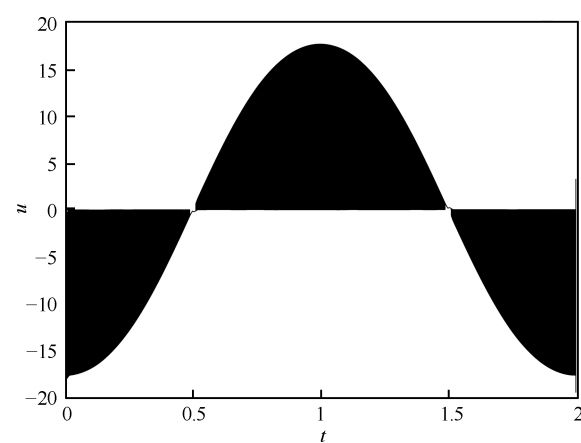
图 3 误差 e_1 : 情形 1.1Fig. 3 The error e_1 : Case 1.1图 6 $\int_0^T \|\mathbf{e}_k(\tau)\|^2 d\tau$ 随重复周期数的变化Fig. 6 $\int_0^T \|\mathbf{e}_k(\tau)\|^2 d\tau$ with respect to cycles图 4 误差 e_2 : 情形 1.1Fig. 4 The error e_2 : Case 1.1

图 7 控制输入: 情形 1.3

Fig. 7 Control input: Case 1.3

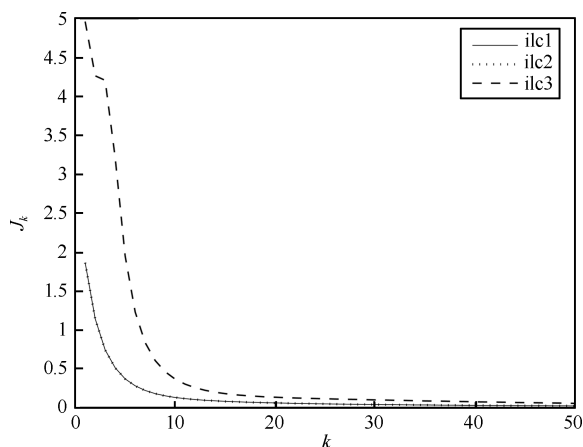


图 8 $\int_0^T \|\mathbf{e}_k(\tau)\|^2 d\tau$ 随迭代次数的变化
Fig. 8 $\int_0^T \|\mathbf{e}_k(\tau)\|^2 d\tau$ with respect to iterations

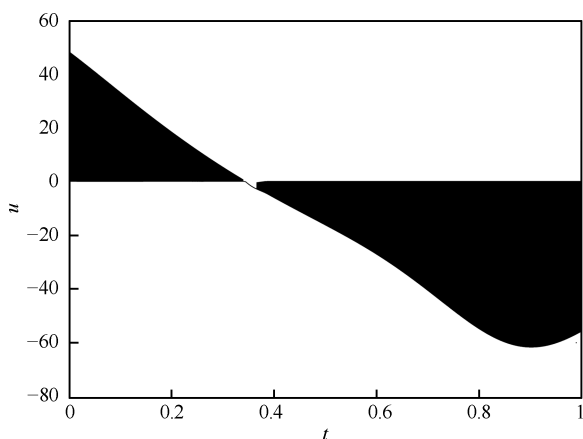


图 9 控制输入: 情形 2.1
Fig. 9 Control input: Case 2.1

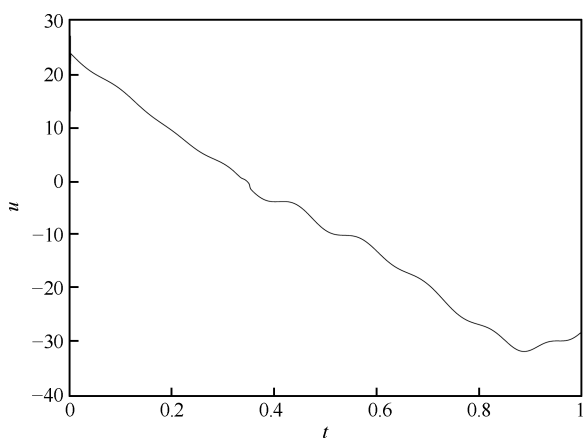


图 10 控制输入: 情形 2.2
Fig. 10 Control input: Case 2.2

图 6 中的曲线 rlc1 和 rlc2 几乎完全重合, 图 8 中的曲线 ilc1 和 ilc2 几乎完全重合, 表明采用本文方法设计控制器, 闭环系统误差收敛速度接近于根据传统 Sontag 公式设计的控制器. 比较图 5 和图

7, 图 9 和图 10, 说明本文给出的连续化方案可以消除颤振现象.

上述两个仿真例子说明了本文所提方法的有效性, 实施该算法的闭环系统具有较快的误差收敛速度, 同时又可避免根据传统 Sontag 公式设计控制器时可能发生的颤振.

5 结论

本文针对参数/非参数不确定非线性系统, 提出准最优迭代学习控制和重复学习控制方法, 旨在获得较非优化算法更快的闭环系统误差收敛速度. 根据 Sontag 公式给出标称系统的优化控制, 并采用鲁棒学习策略处理非参数不确定性. 本文利用光滑过渡函数对传统 Sontag 公式进行连续化处理, 避免了根据传统 Sontag 公式设计控制系统时可能出现的颤振现象. 经过足够多次迭代运行或足够多个周期的重复学习后, 可以实现系统状态以预设精度跟踪参考信号.

References

- 1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123–140
- 2 Dixon W E, Zergeroglu E, Dawson D M, Costic B T. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, **32**(4): 538–545
- 3 Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940–1945
- 4 Chen Wei-Sheng, Wang Yuan-Liang, Li Jun-Min. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delays. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(12): 1556–1560
(陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制. *自动化学报*, 2008, **34**(12): 1556–1560)
- 5 Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based iterative learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(11): 2665–2670
- 6 Tayebi A. Adaptive iterative learning control for robot manipulators. *Automatica*, 2004, **40**(7): 1195–1203
- 7 Xu J X, Xu J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, **34**(1): 589–597
- 8 Ham C, Qu Z H. A new learning control based on the Lyapunov direct method. In: *Proceedings of Southcon/94 Conference Record*. Orlando, FL: IEEE, 1994. 121–125

- 9 Jin X, Xu J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and nonparametric uncertainties. *Automatica*, 2013, **49**(8): 2508–2516
- 10 Chen Peng-Nian, Qin Hua-Shu. Adaptive tracking control of periodic signals for a class of uncertain nonlinear systems. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2009, **29**(10): 1343–1352
(陈彭年, 秦化淑. 不确定非线性系统的周期信号自适应跟踪. 系统科学与数学, 2009, **29**(10): 1343–1352)
- 11 Marino R, Tomei P, Verrelli C M. Robust adaptive learning control for nonlinear systems with extended matching unstructured uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(6): 645–675
- 12 Anderson B D O, Moore J B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- 13 Xu J X, Tan Y. A suboptimal learning control scheme for non-linear systems with time-varying parametric uncertainties. *Optimal Control Applications and Methods*, 2001, **22**(3): 111–126
- 14 Sontag E D. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1989, **21**(3): 462–471
- 15 Chen Yi-Mei, Han Zheng-Zhi. Optimal adaptive control of a class of nonlinear uncertain systems. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 54–59
(陈奕梅, 韩正之. 一类非线性不确定系统的最优自适应控制. 自动化学报, 2006, **32**(1): 54–59)
- 16 Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(5): 724–732
- 17 Yan Qiu-Zhen, Sun Ming-Xuan. Error trajectory tracking by robust learning control for nonlinear systems. *Control Theory & Applications*, 2013, **30**(1): 23–30
(严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法. 控制理论与应用, 2013, **30**(1): 23–30)
- 18 Lv Qing, Fang Yong-Chun, Ren Xiao. Iterative learning control for accelerated inhibition effect of initial state random error. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(7): 1295–1302
(吕庆, 方勇纯, 任逍. 加速抑制随机初态误差影响的迭代学习控制. 自动化学报, 2014, **40**(7): 1295–1302)
- 19 Sun M X, Wang D W, Chen P N. Repetitive learning control of nonlinear systems over finite intervals. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2010, **53**(1): 115–128
- 20 Xu J X, Qu Z H. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 1998, **34**(8): 983–988
- 21 Xu Xin, Shen Dong, Gao Yan-Qing, Wang Kai. Learning control of dynamical systems based on Markov decision processes: research frontiers and outlooks. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(5): 673–687
(徐昕, 沈栋, 高岩青, 王凯. 基于马尔可夫决策过程模型的动态系统学习控制: 研究前沿与展望. 自动化学报, 2012, **38**(5): 673–687)
- 22 Zhang Li, Liu Shan. Basis function based adaptive iterative learning control for non-minimum phase systems. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(12): 2716–2725
(张黎, 刘山. 非最小相位系统的基函数型自适应迭代学习控制. 自动化学报, 2014, **40**(12): 2716–2725)
- 23 Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P V. *Constructive Nonlinear Control*. New York: Springer, 1997.
- 24 Xu J X. A quasi-optimal sliding mode control scheme based on control Lyapunov function. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, **349**(4): 1445–1458



严求真 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为学习控制.
E-mail: zjyqz@126.com
(YAN Qiu-Zhen Ph. D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control.)



孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为学习控制. 本文通信作者. E-mail: mxsun@zjut.edu.cn
(SUN Ming-Xuan Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His main research interest is learning control. Corresponding author of this paper.)