

三维最优持久编队拓扑生成策略

王金然^{1,2} 罗小元¹ 杨帆^{1,3} 关新平⁴

摘 要 针对智能体间的通信拓扑优化问题, 结合图论知识研究了三维空间中最优持久图的生成算法. 首先, 利用刚度矩阵生成最优刚性图; 然后, 根据顶点连通度数的不同分别采取有向化操作方法, 通过逐层缩小最优刚性图范围的方式把刚性图持久化, 生成了最优持久图; 最后, 对三维空间中随机分布的智能体进行仿真实验, 其结果验证了该算法的可行性和有效性, 此算法能降低编队拓扑的通信复杂度, 减少通信能量消耗.

关键词 刚度矩阵, 最优持久图, 编队, 三维空间, 多智能体

引用格式 王金然, 罗小元, 杨帆, 关新平. 三维最优持久编队拓扑生成策略. 自动化学报, 2015, 41(6): 1123–1130

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140474

Generation Strategy of Optimal Persistent Formation Topology in 3D Space

WANG Jin-Ran^{1,2} LUO Xiao-Yuan¹ YANG Fan^{1,3} GUAN Xin-Ping⁴

Abstract Aiming at the problem of network communication topology optimization in agents, the algorithm of generating optimally persistent graph is combined with the knowledge of graph theories in the 3D space. First, an optimally rigid graph is generated by the rigidity matrix, then in the light of the difference of vertex connectivity, different oriented operation of adding directions to each edge are performed. By narrowing the scope of the optimally rigid graph one by one, the rigid graph is made persistent. As a result the optimal persistent graph is presented. At last, simulation experiments on random multi-agents in 3D space show the effectiveness and the feasibility of the proposed approach. This algorithm can lower the complexity of communication formation topology and reduce the energy consumption.

Key words Rigidity matrix, optimal persistent graph, formation, three dimensional space, multi-agent

Citation Wang Jin-Ran, Luo Xiao-Yuan, Yang Fan, Guan Xin-Ping. Generation strategy of optimal persistent formation topology in 3D space. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(6): 1123–1130

多智能体系统 (Multi-agent system) 的编队控制是近几年控制科学领域的一个热门研究课题, 它涉及诸如控制、人工智能、物理、军事、生物等众多的领域, 并且在这些领域得到了广泛的应用, 例如移动机器人编队控制、无人驾驶飞行器的协作控制、

无人水下潜航器的编队控制等^[1–5]. 在编队以及编队的拓扑控制研究中, 持久编队控制具有保持队形不变和智能体间的通信交互不变等优点, 并且能适应任务、环境等的约束, 因此对持久编队的拓扑进行研究具有越来越重要的意义.

在持久编队拓扑研究中, 刚性图理论作为基础发挥了重要作用; 基于此很多学者已经对最小刚性图和最小持久图的拓扑生成进行了研究^[6–10]. Smith 等^[11] 基于 Pebble game 和图形操作的两种算法研究了在有向图中增加顶点操作, 并提出了基于此操作的最小边数的持久图生成算法, 但在算法生成持久图的过程中需不断变化各边方向, 难以应用于持久编队中. Hendrickx 等在文献 [7] 和 [12] 中提出了用于一个编队保持持久队形的图形操作方法, 并且在文献 [13] 中研究了改变有向边方向的操作, 使得具有不同方向的持久图能相互转化, 但没有给出转化的具体方法. 罗小元等^[14] 使用刚度矩阵^[8–10] 的方法研究了带有 Leader-follower 持久编队的队形保持问题, 并设计了相应的控制律, 但这种方法只适用于二维空间中, 且通信复杂度较高. 文献

收稿日期 2014-07-03 录用日期 2014-10-27
Manuscript received July 3, 2014; accepted October 27, 2014
国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (2010CB731800), 国家自然科学基金 (61074065, 61375105), 河北省自然科学基金 (F2012203119) 资助
Supported by National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB731800), National Natural Science Foundation of China (61074065, 61375105), and Nature Science Foundation of Hebei Province (F2012203119)

本文责任编辑 吕金虎

Recommended by Associate Editor LV Jin-Hu

1. 燕山大学电气工程学院 秦皇岛 066004 2. 北京市工贸技师学院轻工分院 北京 100079 3. 中国农业银行天津蓟县支行 天津 301900 4. 上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200240

1. Department of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004 2. Branch of Light Industry, Beijing Industry and Trade Technicians College, Beijing 100079 3. Jixian County Branch, Tianjin Branch, Agricultural Bank of China, Tianjin 301900 4. College of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240

[14] 提出了符合特定特征的一类最小加权持久图的生成方法,但其生成是集中式的;文献 [15–16] 中,虽然提出了一种最优持久编队生成方法,能把智能体间的双向通信优化成单向通信,但此方法不能实现全部智能体的优化,有一定的局限性。

以上文献均是基于二维空间来研究多智能体编队控制的,然而在现实世界中,多智能体编队系统更多地应用于三维空间中,且三维空间中多智能体编队系统的许多性质不同于二维空间,较为复杂。文献 [17–18] 对三维多智能体编队的结构性、移动控制和路径计划进行了研究,而没有考虑其拓扑生成问题;本文基于文献 [15] 中给出的最优刚性图的生成算法,开展了三维空间中持久编队拓扑生成方法的研究,提出了一种最优持久编队拓扑生成算法并进行了仿真,本文的算法能对三维持久编队拓扑生成以及网络通信拓扑的优化等研究提供帮助。

1 预备知识

令 $G = (V, E)$ 表示空间多智能体编队对应的基础图, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 表示图中各个点的集合,对应于编队中的多个智能体; $E \subset V \times V$ 表示图中各个点的连线集合,对应于智能体之间的通信链接。在编队中,各个智能体只能在其通信范围内与其他智能体进行通信,我们称能够通信的智能体互为邻居,如果图 G 的任意一个顶点对 (i, j) 满足 $\forall (i, j) \in E$ 则 $(j, i) \in E$, 那么图 G 为一个无向图,否则为有向图;在无向图中,邻接矩阵 $A = (a_{ij})$ ($a_{ii} = 0$; 当 $(i, j) \in E, a_{ij} = a_{ji} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$), 每个无向图都存在对应的有向图,有向图中的边均为有向边,无向图 $G = (V, E)$ 对应的有向图为 $G = (V, \vec{E})$, 其中 $\vec{E}$ 为所有有向边的集合。无向图中与顶点 i 互为邻居的点的个数称为 i 的度,记作 $\deg(i)$; 有向图中,边 $(\vec{i}, \vec{j})$ 表示 i 接收 j 发给的信息或 i 追踪 j , 此时 i 的出度为 1, 记作 $d^+(i) = 1$, j 的入度为 1, 记作 $d^-(j) = 1$ 。在三维空间中,智能体 i 的自由度数可表示为 $\max(0, 3 - d^+(i))$ 。

1.1 图论基础

设编队拓扑结构为 $G = (V, E)$, $p_i(t)$ 表示第 i 个智能体的运动轨迹,且 $p_i \in \mathbf{R}^3$ 表示第 i 个智能体的位置坐标,如果 $\forall (i, j) \in E$ 满足 $\|p_i(t) - p_j(t)\| = a$ (a 为常数), 则这个拓扑结构图是刚性图;当拓扑结构图不是刚性图时,称其为可变形图 (Flexible graph), 如图 1 所示,在 $\mathbf{R}^3$ 中图 1(a) 为可变形图 (能沿虚线方向拉伸), 图 1(b) 为沿虚线拉伸后的图, 图 1(c) 为刚性图。

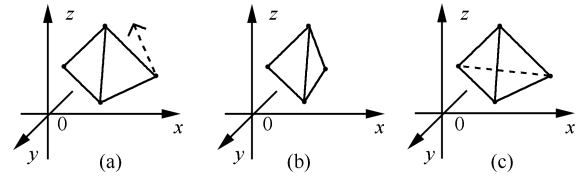


图 1 三维空间中的可变形图和刚性图

Fig. 1 Flexible graph and rigid graph in 3D space

定义 1. 最小刚性图是一类特殊的刚性图,是指能够维持刚性且具有最少边数的一类图,在 $\mathbf{R}^d$ 中,含有 $n \geq d$ 个顶点的刚性图是最小刚性图,当且仅当其边数 $e = 3n - 6$ 。

对最小刚性图中每条边加权,可以得到最优刚性图。

定义 2. 一个无向图是最优刚性图,如果满足以下条件:

- 1) 对应的图是最小刚性图;
- 2) 在所有相同顶点数的刚性图中,其各边边长加权和最小。

由定义 2 知,最优刚性图是一类特殊的最小刚性图,既保证了最少的通信边数,又达到了最小的能量权值,能有效地减少智能体间的通信能量消耗。本文以最优刚性图为基础来研究最优持久图,以最大限度地减少能量消耗。

下面讨论持久图和刚度矩阵。

持久图是有向图,其各边均为有向边,有向边 $(\vec{i}, \vec{j})$ 表示顶点 i 要接收顶点 j 发出的信息或者 i 要与 j 保持距离约束。

定义 3. 在 $\mathbf{R}^d$ 中,如果一个有向图中每个顶点的出度 $d^+(i) \leq d$, 且其对应的无向图是刚性图,则这个有向图是持久图。

在 $\mathbf{R}^d$ 中,一个有向图是最小持久图,当且仅当各个顶点的出度 $d^+(i) \leq d$ 且其对应的无向图是最小刚性图。

最优持久图是一类特殊的最小刚性图,在 $\mathbf{R}^d$ 中,一个有向图是最优持久图,当且仅当其各个顶点的出度 $d^+(i) \leq d$ 且其对应的无向图是最优刚性图。

定义 4 (刚度矩阵). 一个结构 $G = (V, E)$, 有 $|V| = n$ 个顶点,每个顶点是 $p_i \in \mathbf{R}^r$, 共 $|E|$ 条边,各顶点坐标按如下顺序排列则可以建立一个矩阵 $M \in \mathbf{R}^{|E| \times nr}$, 其行和列分别对应此结构的边和顶点,各顶点坐标按如下顺序排列:

$$[p_1^1, \dots, p_1^r, p_2^1, \dots, p_2^r, \dots, p_n^1, \dots, p_n^r]$$

如 M 中边 (i, j) 所对应的行可表示如下:
 $p_i^1, \dots, p_i^r, p_j^1, \dots, p_j^r, \dots, p_n^1, \dots, p_n^r$
 $(i, j) [0, \dots, p_i^1 - p_j^1, \dots, 0, \dots, p_j^1 - p_i^1, \dots, 0, \dots, 0]$
 这样建立的矩阵 M 就称为刚度矩阵 (Rigidity

matrix). 如图 2 所示的三维图中有 4 个顶点, 坐标依次为 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1)$ 、 $(0, 1, 0)$, 此三维坐标对应 M 有 12 列, 图 2 中有 6 条边对应 M 中有 6 行.

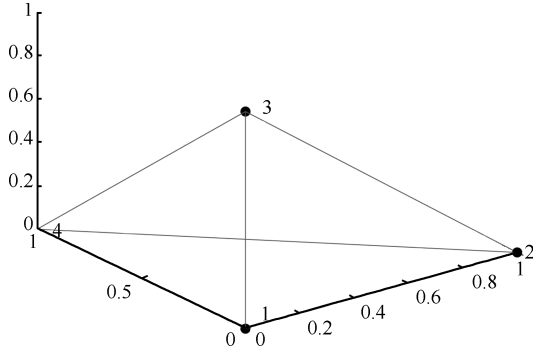


图 2 4 个顶点的三维图

Fig.2 The graph with four vertices

又依据定义 4, 图 2 所对应的刚度矩阵为

$M =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

有关刚度矩阵满足如下的引理 1.

引理 1^[4]. 设 M 是 r 维空间中有 n 个顶点的一般结构的刚度矩阵, 在有 $n \geq 4$ 个边的三维空间中, 这个结构是刚性的, 当且仅当 $\text{rank}(M) = 3n - 6$.

1.2 最优刚性图生成算法

对有 n 个顶点的图 $G = (V, E)$, 为了得到最优持久拓扑图, 可先生成最优刚性拓扑图, 下面给出生成最优刚性拓扑图的算法^[15].

算法 1 (生成最优刚性图).

- 1) 输入拓扑结构 $G = (V, E)$, G 有 n 个顶点, 编号依次为 $\{V = 1, 2, \dots, n\}$;
- 2) for $i = 1 : n$
 - 搜索顶点 i 的邻接顶点 N_i ;
 - 计算由 N_i 和 i 组成的子图中所有边 E_i^Δ 的长度;
- 3) 将这些边按加权从小到大排序;
- 4) 据上述序列建立子图的刚度矩阵 M_i^Δ ;
- 5) 以 M_i^Δ 的首行初始化 M_i ;
- 6) for 所有边 E_i^Δ
 - if $\text{rank}(M_i) \leq 3n - 6$ 把 M_i^Δ 的下一行添加到 M_i 形成新矩阵 M_i' ;
 - if M_i 满秩
 - $M_i = M_i'$;

```

        记录此行对应的边;
    end if
end if
end for
7) for  $j = \{N_i, i\}$ 
    for  $k = \{N_i, i, k \neq j\}$ 
        if  $(j, k) \notin E_i'$ 
            删除所有在  $E_i'$   $i = 1, 2, \dots, n$  中记录的
             $(j, k)$ ;
        end
    end
end
end
8) 根据在  $E_i'$  中的记录画出最优刚性图.

```

2 三维最优持久图的生成

2.1 相关理论

本节讨论生成三维空间中最优持久图的相关理论, 给出部分定义、定理等结论作为研究基础.

定义 5 (哈尼伯格序列). 三维空间中, 哈尼伯格序列是一个关于图 $G_3, G_4, \dots, G_n$ 的序列, 其中图 G_3 是一个包含三个顶点的完全图, 并且每个图 G_i ($i \geq 4$) 可以由图 G_{i-1} 通过增加顶点操作或者边分离操作获得 (如图 3 所示). 由于完全图 G_4 是一个最小刚性图, 并且增加顶点操作和边分离操作保证了生成图的最小刚性, 所以每个图 G_i 都是一个最小刚性图, 因此哈尼伯格序列是一个最小刚性序列.

下面利用哈尼伯格序列来研究图的生成, 给出如下引理 2.

引理 2^[7]. 每个最小刚性图 G_i ($i > 3$) 均可作为某个哈尼伯格序列的结果而获得.

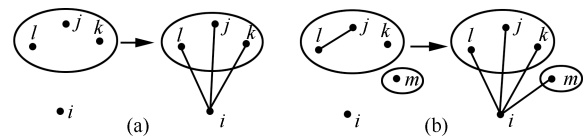


图 3 刚性图扩展的两个基本操作 ((a) 增加顶点操作; (b) 边分离操作)

Fig.3 The two basic operations of rigid graph extension ((a) Adding vertex operation (b) Edge-splitting operation in three-dimensional space)

图 3(a) 中 l, j, k 处于同一平面内, 在图 $G_{i-1} = (V_{i-1}, E_{i-1})$ 中应用增加顶点操作, 意味着在图 $G_{i-1} = (V_{i-1}, E_{i-1})$ 上增加一个具有 0 入度和 3 出度的顶点 i 和三条有向边 $(i, j), (i, k), (i, l)$, $j, k, l \in V_{i-1}$; 最终得到图 $G_i = (V_i, E_i)$, 其中 $V_i = V_{i-1} \cup \{i\}$, $E_i = E_{i-1} \cup \{(i, j), (i, k), (i, l)\}$.

图 3(b) 中顶点 m 不位于由顶点 j, k, l 所确定的平面内, 边分离操作意味着在图 $G_{i-1} =$

(V_{i-1}, E_{i-1}) 中去掉一条边 $\overrightarrow{(l, j)} \in V_{i-1}$, 增加新的顶点 i 和新的边 $\overrightarrow{(i, l)}, \overrightarrow{(i, j)}, \overrightarrow{(i, k)}, \overrightarrow{(i, m)}$, 得到图 $G_i = (V_i, E_i)$, 其中 $V_i = V_{i-1} \cup \{i\}$, $E_i = E_{i-1} \cup \{\overrightarrow{(i, j)}, \overrightarrow{(i, l)}, \overrightarrow{(i, k)}, \overrightarrow{(i, m)}\}$.

由于每个最小刚性图 G_i ($i > 3$) 均可以由完全图 G_3 通过不断地增加顶点操作或者边分离操作而获得, 而每次进行两种操作后新增加的顶点的连通度都会是 3 或 4, 所以在每个最小刚性图中一定含有连通度为 3 或者 4 的顶点, 由此给出如下推论 1.

推论 1. 每个最小刚性图中至少包含一个连通度为 3 或者 4 的顶点.

基于以上给出的刚性图拓展理论, 在最优刚性图中对顶点进行有向化操作和路径取反操作可生成最优持久图. 下面讨论顶点的有向化操作和路径取反操作并给出相关结论, 顶点的有向化操作如图 4 所示. 其中图 4(a)~(c) 分别为 2 度、3 度和 4 度顶点的有向化过程, 图 4(c) 中要求顶点 m 不位于由顶点 j, k, l 所确定的平面内.

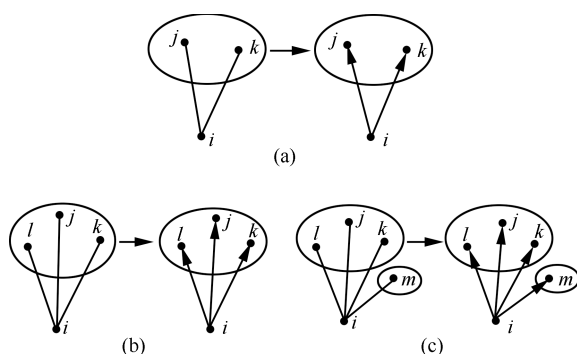


图 4 刚性图的有向化操作 ((a)~(c) 分别为 2 度、3 度和 4 度顶点的有向化操作)

Fig. 4 Adding directions for rigid graph ((a)~(c) are 2, 3 and 4 degrees vertices adding directions, respectively.)

据推论 1, 可以对每个连通度为 3 或 4 的顶点进行有向化操作, 这里假设顶点的 3 个度或者 4 个度均不在同一个平面内, 如图 4(b) 和 (c) 所示; 又由于三维图中必然包含二维图, 所以在最优刚性图中可能包含连通度为 2 的顶点, 对 2 度顶点我们采用二维持久图生成的策略进行有向化操作, 如图 4(a) 所示.

在顶点的有向化操作过程中, 顶点的出度和入度会随之发生变化, 其满足的结论如下:

定理 1. 一个三维最小持久图的自由度总和为 6, 且至少有 3 个顶点的出度小于 3.

证明. 由定义 3 可知, 对于有 n 个顶点的三维最小持久图, 满足每个顶点 i 的出度 $d^+(i) \leq 3$, 则所有顶点最多有 $3n$ 个出度, 又因为最小持久图对应的无向图是刚性图, 由定义 2 知最小持久图共有

$3n - 6$ 条边, 而每条边就会代表一个入度或一个出度, 所以 n 个顶点的有向图共有出度 $3n - 6$ 个, 而第 i 个顶点的自由度表示为 $\max(0, 3 - d^+(i))$, 所以 n 个顶点的全部自由度为 $3n - (3n - 6) = 6$; 又由于每个顶点的自由度最多为 3, 且不能同时出现两个顶点的自由度都为 3 的情况 (否则会造成信息传输混乱), 所以至少有 3 个顶点的出度小于 3. $\square$

由定理 1 可知, 对于最小持久图 G_n , 至少有 3 个顶点的出度小于 3 (除去几个顶点的出度小于 3 之外, 其余所有顶点的出度都等于 3), 则生成此持久图至少会有一次 2 度操作, 因此, 每增加一个出度为 4 的顶点进行有向化操作就会从出度小于或等于 3 的顶点上夺走一个出度, 结果就会有一个出度为 2 或 1 的顶点出现, 所以对最小持久图 G_n 所对应的刚性图进行有向化操作时, 若顶点连通度为 4 并对其进行 4 度有向化操作, 就会使剩余无向图减少一个出度, 照此进行下去, 最终生成图就会有一个顶点的出度小于 3, 即出现一个 2 度或 1 度顶点, 由此得如下推论 2.

推论 2. 三维最小持久图中, 对顶点执行一次 4 度操作之后, 剩余的无向图就会增加一个 2 出度或 1 出度的顶点.

下面讨论路径取反操作, 路径取反操作是对有向图的一种操作, 这种操作不会对相应的无向图产生影响, 但是能改变有向图, 如图 5 所示, 图 5(a) 中 i, j 两点直接相连, i 的出度 $d^+(i) = 1$, j 的入度 $d^-(j) = 1$, 路径取反操作后 i 的入度 $d^-(i) = 1$, j 的出度 $d^+(j) = 1$, 可知这种操作能改变顶点的出度从而改变顶点的自由度, 图 5(a) 中 j 的自由度向 i 上转移了一个. 图 5(b) 中 i, j 两点途经 k, l 等点间接相连, 路径取反操作后, k, l 等途经点的出度和入度保持不变, 而只有顶点 i, j 的出度和入度会发生变化, 因此有向图的总自由度保持不变.

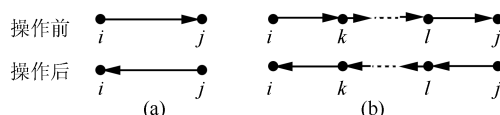


图 5 有向图的路径取反操作

Fig. 5 Invert path in directed graph

下面给出两个顶点能够进行路径取反操作的条件, 如定理 2 所述.

定理 2. 在持久图 $G = (V, E)$ 中, 设 i 和 j 是图中两个顶点, 顶点 i 和 j 之间存在一条有向路径可以进行路径取反操作当且仅当 $d^+(i) \geq 1$ 且 $d^-(j) \geq 1$.

证明. 必要性, 设持久图中 i 和 j 之间的有向路径为 (i, j) , 则 i 的出度至少为 1, 且 j 的入度至少为 1; 充分性, 因持久图是连通图, 所以对于图中的两个

顶点, 其中一个顶点出度大于等于 1, 另一个顶点入度大于等于 1 时, 这两个顶点之间一定存在一条有向路径, 可以进行路径取反操作, 将两个顶点的自由度相互转移。□

由定理 1 知, 持久图中在出度为 4 的顶点和出度小于 3 的顶点之间一定存在一条有向路径可以进行路径取反操作, 将出度为 4 的顶点的出度转移到出度小于 3 的顶点上, 所以在对连通度为 4 的顶点执行有向化操作之后, 可在 4 度顶点和与之相连接的 2 度顶点或 1 度顶点之间寻找一条最短有向路径进行取反操作, 使其出度和入度互换一次, 对所有的 4 度顶点均执行一次此类操作就可使生成的最小持久图满足定理 1。

2.2 生成依据

由第 1.2 节中所述生成算法首先生成最优刚性图, 其次根据第 2.1 节中的定理和相关结论对最优刚性图进行有向化操作以及路径取反操作生成最优持久图, 以下给出三维空间中实行度操作生成最优持久图的几个基本依据:

- 1) 若顶点连通度为 2, 则直接进行同于图 4(a) 的有向化操作, 缩小最优刚性图的范围;
- 2) 若顶点连通度为 3, 直接进行同于图 4(b) 的有向化操作, 缩小最优刚性图的范围;
- 3) 若顶点连通度为 4, 直接进行同于图 4(c) 的有向化操作, 缩小最优刚性图的范围;
- 4) 若顶点连通度为 1, 则直接画出有向边;
- 5) 在连通度为 4 度的顶点和小于 3 度的顶点之间寻找一条最短有向路径并进行取反操作。

2.3 生成算法

本节将运用第 2.2 节中的几个基本依据, 生成最优持久编队。灵活地运用几个基本依据, 可由最优刚性图生成多个最优持久图。经过路径取反操作, 可以将持久图中顶点的自由度转移, 将各个顶点的出度和入度互换, 所以经过路径取反操作可以将多个由刚性图生成的持久图进行相互转化。为了生成唯一的持久图, 我们给出如下的最优持久图的度操作过程, 如图 6 所示。

图 6 中, A 为邻接矩阵, $d(i)$ 为智能体 i 的连通度, 且 $d(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $d^+(i)$ 为智能体 i 的出度, $d^-(i)$ 为智能体 i 的入度; Dijkstra 算法是一种计算两点间最短路径的方法, 详见文献 [19]。

此算法实现了最优刚性编队的有向化, 编队中的所有通信边为有向边, 并且确保每个智能体的通信邻居个数不超过 3, 此算法生成的编队即为最优持久编队。基于此算法, 所有的多智能体最优刚性编队均可生成唯一的持久编队。

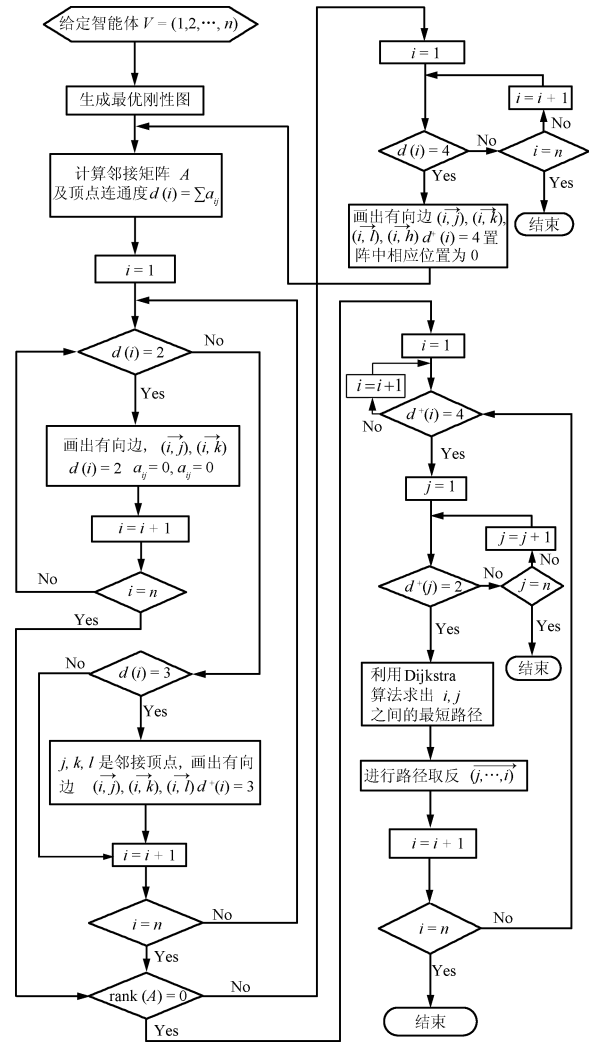


图 6 生成最优持久图的流程图

Fig. 6 Process of generating the optimal persistent graph

就算法复杂度而言, 设算法复杂度为 $O(f(n))$, 其中, $f(n)$ 是执行 1, 2, 3 度以及路径取反操作的次数, 当 $O(f(n))$ 越大时, 复杂度越高, 反之复杂度越低。刚性图 $G = (V, E)$ 可由子图 G_3 通过 $n - 3$ 次增加顶点操作或边分离操作生成, 持久图 G_n 最少可以在 $n - 1$ 次有向化操作后生成, 在此操作过程中每增加一次 4 度顶点操作就要增加一次路径取反操作, 因此复杂度最高为 $O(n - 1 + x)$, 其中 x 为进行 4 度操作的次数, 且 $x \in [0, (3n - 6)/4]$, 为了能成功生成最优持久编队, 此算法的复杂度为 $O(n - 1 + x) \in [n - 1, (7n - 10)/4]$, 而文献 [14] 所提到的二维空间中当顶点包含于边数为 5 的基础圈中时, 算法复杂度为 $O(f(n)) \rightarrow \infty$, 经比较本文算法较优。

3 仿真

本节通过仿真研究算法的有效性, 在三维空

间中考虑以 $(0, 0, 0)$ 为中心, 以 $[-20, 30]$ 、 $[-40, 40]$ 、 $[-40, 30]$ 为长、宽、高所确定的区域作为研究范围, 选取均值为 20 服从正态分布且分布稀疏的 12 个随机点, 代表随机分布的 12 个智能体, 如图 7 所示 (实际中, 总会有多个智能体存在, 这里若选取的智能体过多或太密集则会影响三维空间中仿真图形的视觉效果).

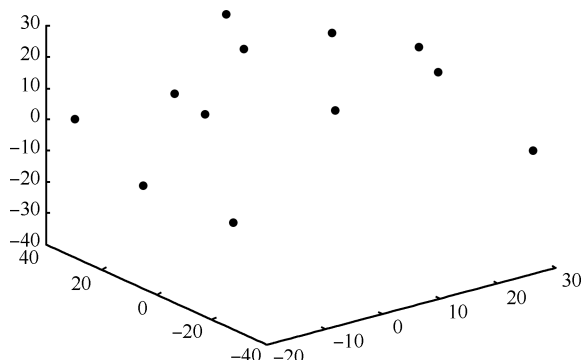


图 7 随机分布的智能体

Fig. 7 Random distribution agents

假设所有智能体具有相同的最大通信半径. 首先采用第 1.2 节中生成最优刚性图的算法生成最优刚性图, 然后再对此刚性编队实行有向化操作生成持久编队. 这 12 个智能体生成的最优刚性编队如图 8 所示, 其中智能体间的无向连线表示双方具有通信链接, 由定义 1 可知, 覆盖这 12 个智能体的最优通信链路共有 30 条, 即图 8 中共有 30 条边.

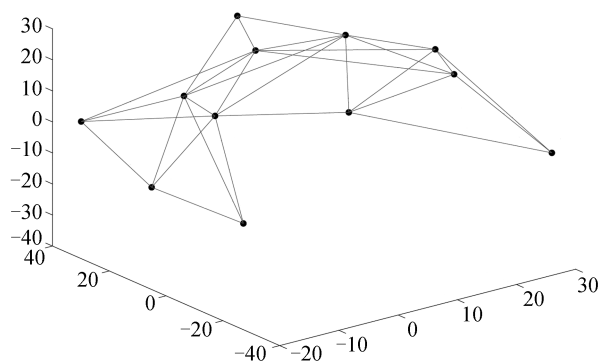


图 8 最优刚性编队

Fig. 8 The optimal rigidity formation

在图 8 的基础上, 采用第 2.3 节中的算法对这 30 条边进行有向化操作. 首先执行 3 度智能体的有向化操作, 逐轮搜索所有度为 3 的智能体, 并对其进行有向化, 然后搜索度为 2 的智能体并对其进行有向化. 在算法执行过程中, 为了标识不同智能体的操作顺序, 我们给 12 个智能体进行了编号. 执行过程生成的编队图形如图 9~11 所示.

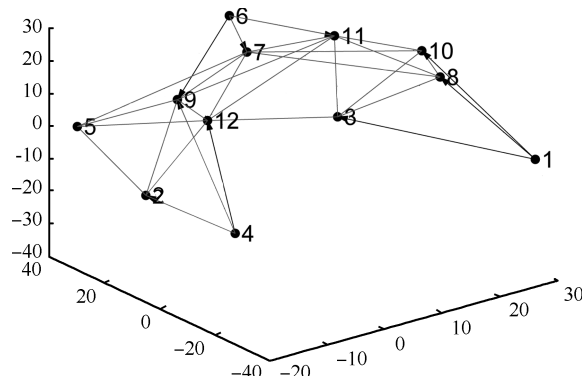


图 9 智能体 1, 4, 6 的有向化

Fig. 9 Adding direction of agents 1, 4 and 6

图 9 为进行第一轮搜索后 3 度智能体的有向化的结果, 可以看出智能体 1, 4, 6 进行了有向化; 接着在剩余的最优刚性图中进行新一轮搜索, 此次搜索到智能体 2 的度为 3, 对其执行有向化操作; 第三次搜索到智能体 5 的度仍为 3, 并对其进行有向化操作; 照此执行下去, 依次搜索到智能体 9, 12, 3, 7 的度均为 3, 分别对以上标号的智能体进行有向化操作, 所生成图形如图 10 所示.

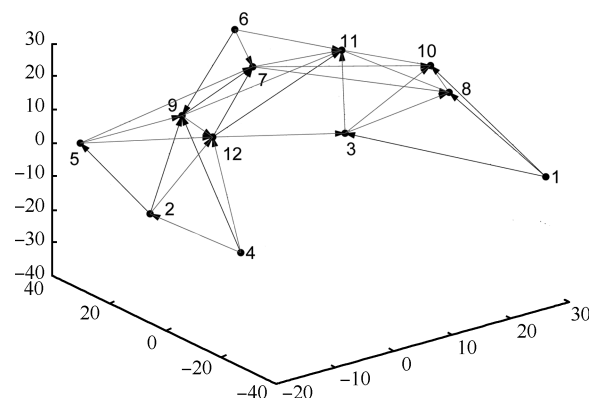


图 10 智能体 2, 5, 9, 12, 3, 7 依次进行了有向化

Fig. 10 Adding direction of agents 2, 5, 9, 12, 3, 7 successively

在执行完 3 度操作之后, 开始执行 2 度智能体的有向化, 此时剩余的刚性图中仅包含 3 个智能体, 未进行有向化的边只剩下 3 条, 按所剩结点度数由小到大的顺序搜索并对其进行度的有向化操作, 最后生成图形如图 11 所示.

以上操作过程满足了定理 1 的内容, 此编队的自由度总和为 6, 且智能体 8, 10, 11 的出度均小于 3, 其余智能体出度等于 3, 从而保证了生成的编队为最优持久编队; 对应于通信拓扑中, 有向边表示智能体之间具有单向通信, 与图 8 相比, 这里将双向通信拓扑变为单向通信拓扑, 降低了编队的通信复杂度, 减少了通信能量消耗.

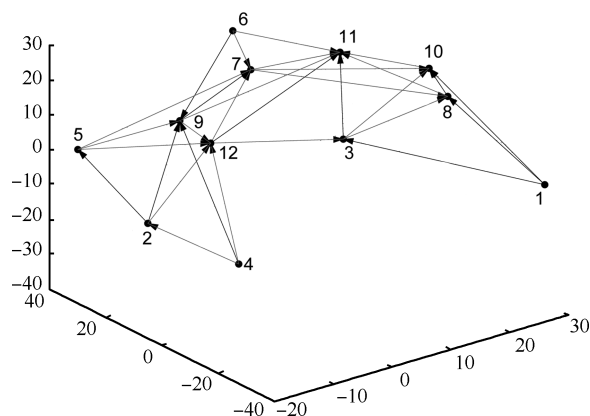


图 11 智能体 8, 10, 11 的有向化

Fig. 11 Adding direction of agents 8, 10, 11 successively

4 结论

本文首先将文献 [15] 中提出的最优刚性图的生成算法应用于三维空间中, 生成了三维空间中的最优刚性图, 在此基础上, 给出了顶点的有向化理论, 根据这些理论, 采用逐轮搜索的方式, 针对每个顶点连通度数的不同分别采取有向化操作方法, 通过逐层缩小最优刚性图范围的过程, 实现了所有通信链路的有向化, 最终生成分布式最优持久图, 通过仿真验证了此方法的可行性和有效性. 应用于编队控制理论中该方法能够解决三维空间中持久编队的拓扑生成问题, 能够保持智能体间的追踪目标不变, 实现编队整体的协调控制; 对于网络通信而言, 该方法实现了信息节点间的单向通信, 降低了通信复杂度, 从而减少了网络通信能量消耗.

本文是基于静态环境下的三维最优持久编队拓扑生成问题, 动态环境下的三维最优持久通信拓扑编队生成问题将是未来的研究内容.

References

- Dasgupta P. A multi-agent swarming system for distributed automatic target recognition using unmanned aerial vehicles. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2008, **38**(3): 549–563
- Lu X Q, Austin F, Chen S H. Flocking in multi-agent systems with active virtual leader and time-varying delays coupling. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(2): 1014–1026
- Han K, Lee J, Kim Y. Unmanned aerial vehicle swarm control using potential functions and sliding-mode control. *Proceedings of the IMechE — Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2008, **222**(6): 721–730
- Yu C B, Hendrickx J M, Fidan B, Anderson B D O, Blondel V D. Three and higher dimensional autonomous formations: rigidity, persistence and structural persistence. *Automatica*, 2007, **43**(3): 387–402
- Tanner H G, Christodoulakis D K. Decentralized cooperative control of heterogeneous vehicle groups. *Robotics and Autonomous systems*, 2007, **55**(11): 811–823
- Bui L D, Kim Y G. An obstacle-avoidance technique for autonomous underwater vehicles based on BK-products of fuzzy relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, **157**(4): 560–577
- Hendrickx J M, Anderson B D O, Blondel V D. Rigidity and persistence of directed graphs. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005. 2176–2181
- Yu J Y, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays. *Systems & Control Letters*, 2010, **59**(6): 340–348
- Yu Hong-Wang, Zheng Yu-Fan. Dynamic behavior of multi-agent systems with distributed sampled control. *Acta Automatica Sinica*, 2012, **38**(3): 357–365
(余宏旺, 郑毓蕃. 多智能体系统在分布式采样控制下的动力学行为. *自动化学报*, 2012, **38**(3): 357–365)
- Ren R, Zhang Y Y, Luo X Y, Li S B. Automatic generation of optimally rigid formations using decentralized methods. *International Journal of Automation and Computing*, 2010, **7**(4): 557–564
- Smith B S, Egerstedt M, Howard A. Automatic generation of persistent formations for multi-agent networks under range constraints. *Mobile Networks and Applications*, 2009, **14**(3): 322–335
- Hendrickx J M, Fidan B, Yu C, Anderson B D O, Blondel V D. Formation reorganization by primitive operations on directed graphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**(4): 968–979
- Hendrickx J M, Fidan B, Yu C, Anderson B D O, Blondel V D. Elementary operations for the reorganization of minimally persistent formations. In: *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Kyoto, Japan: IEEE, 2006. 859–873
- Luo Xiao-Yuan, Shao Shi-Kai, Guan Xin-Ping, Zhao Yuan-Jie. Dynamic generation and control of optimally persistent formation for multi-agent system. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(9): 1431–1438
(罗小元, 邵士凯, 关新平, 赵渊洁. 多智能体最优持久编队动态生成与控制. *自动化学报*, 2013, **39**(9): 1431–1438)
- Luo X Y, Shao S K, Guan X P. Automatic generation of min-weighted persistent formations. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(8): 3104–3114
- Cao H, Bai Y Q, Chen J, Fang H. Control of 2D minimally persistent formations with three co-leaders in a cycle. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, **10**(21): 1–9
- Wen G G, Yu Y G. Research of Multi-agent Persistent Formation Movement Control [Master dissertation], Beijing Jiaotong University, China, 2009.

- 18 Lin Z Y, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(1): 121–127
- 19 Liu X Y, Chen Y L. Application of Dijkstra algorithm in logistics distribution lines. In: *Proceedings of the 3rd International Symposium on Computer Science and Computational Technology*. Jiaozuo, China: IEEE, 2010. 48–50



王金然 讲师. 燕山大学电气工程学院控制科学与工程专业博士研究生. 主要研究方向为多智能体刚性编队和持久编队. E-mail: lzx13315666200@126.com
(**WANG Jin-Ran** Lecturer, Ph.D. candidate of control science and engineering at the College of Electrical Engineering, Yanshan University. Her research interest covers multi-agent rigid formation and persistent formation.)



罗小元 燕山大学电气工程学院教授. 2005 年于燕山大学获得博士学位. 主要研究方向为多智能体协调控制, 网络系统预测控制. 本文通信作者.
E-mail: xyluo@ysu.edu.cn

(**LUO Xiao-Yuan** Professor at the College of Electrical Engineering, Yanshan University. He received his Ph.D. degree from Yanshan University in 2005. His research interest covers coordinated control of multi-agent systems and

predictive control of network systems. Corresponding author of this paper.)



杨帆 中国农业银行天津市分行蓟县支行员工. 2014 年于燕山大学获得硕士学位. 主要研究方向为无线传感器网络控制, 多智能体协调控制.

E-mail: 462799761@qq.com

(**YANG Fan** Staff at Tianjin Branch of Agricultural Bank of China. He received his master degree from Yanshan

University in 2014. His research interest covers control of wireless sensor network and coordinated control of multi-agent systems.)



关新平 燕山大学教授, 上海交通大学教授. 1990 年于哈尔滨工业大学获得博士学位. 主要研究方向为网络化系统控制, 多智能体协调控制.

E-mail: xpguan@ysu.edu.cn

(**GUAN Xin-Ping** Professor at Yanshan University and Shanghai Jiao Tong University. He received his Ph.D.

degree from Harbin Institute of Technology in 1990. His research interest covers control of network systems and coordinated control of multi-agent systems.)